



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ



10 КЛАСС. Вариант 9

✓ 1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

✓ 2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2 - 6ab + b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

✓ 3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

✓ 5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-12; 24)$, $Q(3; 24)$ и $R(15; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$.

✓ 6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

✓ 7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Пусть $a = \frac{k_1 + t_1}{2 \cdot 7} \cdot Q$,
 $b = \frac{k_2 + t_2}{2 \cdot 7} \cdot B$,
 $c = \frac{k_3 + t_3}{2 \cdot 7} \cdot C$

$$abc = \frac{k_1 + k_2 + k_3}{2} \cdot \frac{t_1 + t_2 + t_3}{7} \cdot \frac{Q \cdot B \cdot C}{14}$$

Тогда $abc = 2 \cdot 7 \cdot a \cdot b \cdot c$, что есть

$$k_1 + k_2 \geq 14, t_1 + t_2 \geq 10$$

аналогично

$$k_2 + k_3 \geq 17, t_2 + t_3 \geq 17$$

$$k_1 + k_3 \geq 20, t_1 + t_3 \geq 37$$

Суммы неравенств:

$$2(k_1 + k_2 + k_3) \geq 14 + 17 + 20$$

$$k_1 + k_2 + k_3 \geq 25,5$$

$$k_1 + k_2 + k_3 \geq 26, \text{ так как } k_1 \in \mathbb{N}_0, k_2 \in \mathbb{N}_0, k_3 \in \mathbb{N}_0$$

Это означает что

$$k_1 = 4, k_2 = 6, k_3 = 12$$

$$2(t_1 + t_2 + t_3) \geq 10 + 17 + 37$$

$$t_1 + t_2 + t_3 \geq 32$$

так как

$$t_1 + t_2 \geq 37, \text{ что}$$

$$t_1 + t_2 + t_3 \geq 37$$

Доказываем

$$\text{при } t_2 = 27, t_3 = 0, t_1 = 10$$

$$\begin{aligned} \text{Задача имеет вид } abc &\geq \frac{k_1 + k_2 + k_3}{2} \cdot \frac{t_1 + t_2 + t_3}{7} \\ &\geq \frac{26 + 3 + 0}{2} \cdot \frac{10 + 27 + 0}{7} \end{aligned}$$

Решение задачи при $Q = 2 \cdot 7, B = 2 \cdot 7, C = 2 \cdot 7$

абс при этом равно $\frac{26}{2} \cdot \frac{27}{7}$

$$\text{Ответ: } abc = \frac{26}{2} \cdot \frac{27}{7}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 2

Найти как минимум сколько чисел

$a+b$: m и a^2+ab+b^2 : m что

$$m = \text{НОД}(a+b, a^2+ab+b^2) =$$

$$= \text{НОД}(a+b, (a+b)^2 - ab) = \text{НОД}(a+b, ab),$$

так как $\frac{a}{b}$ -несократима, что $\text{НОД}(a, b) = 1$

$$\text{НОД}(a+b, a) = \text{НОД}(a+b, b) = 1. \text{ Значит}$$

$$\text{НОД}(a+b, ab) = s, \text{ а значит } \text{НОД}(a+b, ab) = \text{НОД}(a+b, s) \leq s.$$

Пример на s : $a = 1, b = 7$ групп
 $\frac{a}{b} = \frac{1}{7}$ - несократима $\frac{a+b}{a^2+ab+b^2} = \frac{s}{1 \cdot 6 \cdot 7 + 7 \cdot 7} = \frac{s}{8}$.

значит $m = s$.

Ответ: $m = s$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

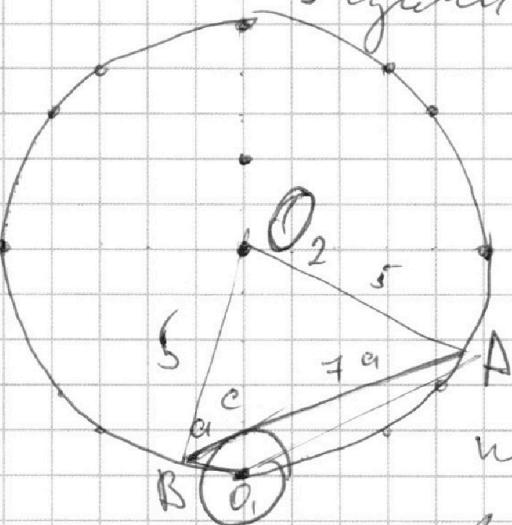
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 3



Нужно $BC = q$, чтобы
 $AC = BC \cdot 7 = 7q$

$O_1C \perp AB$, так как
 O_1C -радиус, а B касание-
ная, значит $O_1C = 1$

Но истина $\triangle BO_1C$, $BO_1 = \sqrt{1+q^2}$,
значит $AO_1 = \sqrt{1+49q^2}$.

Но истина $\triangle BO_1A$ $\frac{AB}{\sin \angle BO_1A} = 2R = 10$

$q = 10 \cdot \sin \angle BO_1A$, $\sin \angle BO_1A = 0,8q$

$$S_{\triangle BO_1A} = \frac{O_1C \cdot AD}{2} = \frac{O_1B \cdot O_1A \cdot \sin \angle BO_1A}{2}$$

$$1 \cdot 8q = \sqrt{1+q^2} \cdot \sqrt{1+49q^2} \cdot 0,8q$$

$$\sqrt{1+q^2} \cdot \sqrt{1+49q^2} = 10$$

$$(1+q^2)(1+49q^2) = 100$$

$$49q^4 + 50q^2 - 99 = 0$$

$$49 \cdot (q^2 - 1)(q^2 + 99) = 0$$

$$q^2 = 1$$

$$q_1 = \pm 1$$

$$\text{или } q^2 = -\frac{99}{49}$$

нет решений, так как $q^2 \geq 0$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$Q = -1$ - неверно, и.к. $Q > 0$

$Q = 1$

$B C = 1$, $A C = 7$

$A B = 8$

Ответ: $A B = 8$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 4

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x$$

Решаем методом сопротивления неравенств

$$(2x^2 - 5x + 3) - (2x^2 + 2x + 1) = (2 - 7x)(\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1})$$
$$-7x + 2 = (2 - 7x)(\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1})$$

Если $2 - 7x = 0$, то

$$x = \frac{2}{7} = \text{Корень}$$

и.к. ~~$\sqrt{2(\frac{2}{7})^2 - 5 \cdot \frac{2}{7} + 3} > 0$~~ и $2\left(\frac{2}{7}\right)^2 + 2 \cdot \frac{2}{7} + 1 > 0$

Число

$$1 = \sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1}$$

Сопротивление неравенство 0, и.к. первый корень
не отрицателен



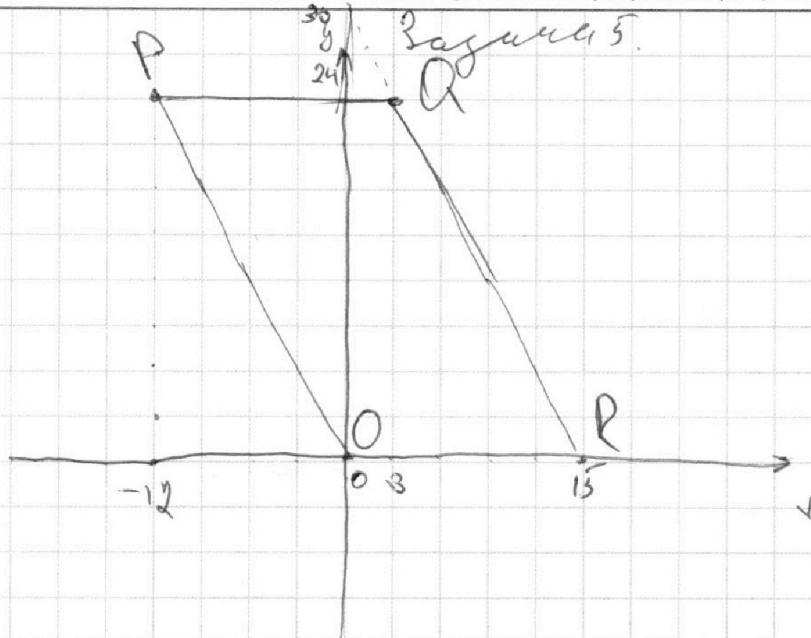
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$2x_2 - 2y_2 + y_1 - y_1 = 12$$

$$2x_2 + y_2 = 12 + 2x_1 + y_1$$

Найдем все такие (x_0, y_0) , что

$2x_0 + y_0 = \text{const}$ — они лежат на некоторой
параллельной прямой PO .

То есть, для любой точки A подберем
все такие B , лежащие на прямой
параллельной PO ($\text{т.к. } 12 + 2x_1 + y_1 = \text{const}$)

Следовательно, подберем все такие
пары (A, B) , что они лежат на одной
параллельной прямой PO , и расстояние между
которыми 12 (расстояние между

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

различие координат, ~~но~~ для этого нужно
две любые точки, кроме которой существует
ровно одна такая прямая. (согласно
расстояние определено)

Заметим, что если прямая не проходит
через точку $(0, x), x \in \mathbb{Z}$, то эта прямая
не проходит ни через одну чётную точку.

(и.з если $2 \cdot 0 + x = c$ не имеет реш., то $c \in \mathbb{Z}$),
а значит $c \neq 2x, x \in \mathbb{Z}$)

Но есть такие прямые содержащие только
одну точку в этом параллелограмме
30 (и разность координат сторон ≥ 0)

Например, что расстояние между точками
12 и однозначным делителем координат параллелограмма
24 (две любые координаты на прямой Oy
от 0 до 24)

Заметим, что координата прямой равна
координате пересечения с Oy .



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

На чётной с чётной коммандой ровно

13 чётных чёток в параллелограмме

($2x_0 + y_0 = 2k$, т.к. чётки чётномеры и чётные
но $y_0 > 0$ и $y_0 \leq 24$, ур-ие $2x_0 = 2k - y_0$ имеет
ровно 13 реш.)

С чётной, с чётной, 12 чёток.

Второе обе чётные суммой чётной.

Чётных пар 10 комманд у первой суммы

$0, 2, \dots, 24$) - 13, значит чётных чёток

$$(13 \cdot 13) \cdot 13 = 13^3$$

Нечётных пар $(1, 3, \dots, 23)$ - 12, значит

$$\text{чётных чёток } 12 \cdot (12 \cdot 12) = 12^2$$

Суммой первых чётных чёток

$$13^3 + 12^3$$

$$\text{Ответ: } 13^3 + 12^3$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ.

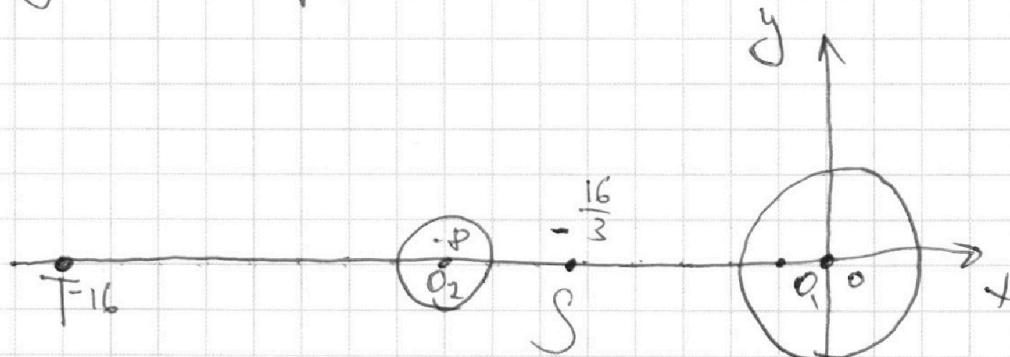
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 6

$$\begin{cases} 9x - y + 10.6 = 0 & (1) \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1) / (x^2 + y^2 - 4) \leq 0 & (2) \end{cases}$$

(1) - прямая
(2) $(x+8)^2 + y^2 - 1$ - пр окружность
 $x^2 + y^2 - 4$

значит первое ограничение если
точка $A(x, y)$ находится ровно внутри
одной окружности или не граничит.



Так как окр. не пересекаются, то
точка должна находиться внутри или на
границе одной из окружностей.
Число симметрии является ответом

На одной странице можно оформлять **ТОЛЬКО ОДИНУ** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Прямая $y = kx + n$ пересекает эти окружности в сумме двух раз. Так как прямая пересекает ~~круг~~ $x^2 + y^2 = 10$, то $x^2 + y^2 = 10$ можно, что прямая $y = kx + n$ касается окружности. Тогда $x^2 + y^2 = 10$ и $y = kx + n$.

Рассмотрим касание Касание происходит в точке пересечения в четырех исключительных положениях. Четыре исключительные положения $T(-16, 0)$, координаты равны $\frac{R_2}{R_1} = 2$, что есть $\frac{TO_1}{TO_2} = \frac{x}{y-8} \Rightarrow x = 16, y = 8, 0$, координаты -16 .

Нужно упр-е касания $y = kx + n$

$$0 = -16k + n, n = 16k$$

$$\begin{cases} y = kx + n \\ y^2 + x^2 = 10 \end{cases}$$

- члены одно решен

$$y = kx + 16k$$

$$\sqrt{x^2 + (kx + 16k)^2} = 10$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$(x^2 + k^2 + 1) + 32k^3 x + (256k^2 - 4) = 0$$

$$\Downarrow = 0$$

$$① = \frac{1}{2} \cdot k^4 - 4 \cdot (k^2 + 1)(2^2 k^2 - 1) = 0 \quad | : 2^4$$

$$2 \cdot k^4 - (k^2 + 1)(2^2 k^2 - 1) = 0$$

$$2 \cdot k^4 - 2^6 \cdot k^4 + k^2 - 2^6 k^2 + 1 = 0$$

$$k^2 \cdot (1 - 2^6) = -1$$

$$k^2 = \frac{1}{63}$$

$$k = \pm \frac{1}{\sqrt[3]{63}} = \pm \frac{1}{3\sqrt[3]{7}}$$

Такие есть ур-ия касательных $y = \pm \frac{\sqrt[3]{7}}{3\sqrt[3]{7}} + \frac{16}{3\sqrt[3]{7}}$

$$1) \frac{x}{3\sqrt[3]{7}} - y + \frac{16}{3\sqrt[3]{7}} = 0$$

$$a + -y + 16/3\sqrt[3]{7} = 0$$

$$a = \frac{16}{3\sqrt[3]{7}}, b = \frac{8}{15\sqrt[3]{7}}$$

$$2) -\frac{x}{3\sqrt[3]{7}} - y + \frac{16}{3\sqrt[3]{7}} = 0$$

$$a = -\frac{16}{3\sqrt[3]{7}}, b = -\frac{8}{15\sqrt[3]{7}}$$

Рассмотрим центр описанной окружности, через него проходит касательные касательные. Кото $\frac{P_2}{P_1} = 2$,

центр окружности на $O_1 O_2$, $\frac{SO_2}{SO_1} = 2$, значит $PO_2 = \frac{28}{3} = \frac{16}{3}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$S_1 = \left(-\frac{8}{3}, 0 \right), S_2 = \left(-\frac{16}{5}, 0 \right)$$

Пусть ур-е касательной $y = kx + n$.
 $0 = -\frac{16}{3}k + n, n = \frac{16}{3}k$

$$\begin{cases} y = kx + n \\ y^2 = 4 \end{cases}$$

$y^2 = 4$ имеет одно решение

$$y = kx + \frac{16}{3}k$$

$$y^2 = \left(kx + \frac{16}{3}k \right)^2$$

$$4^2 + \left(kx + \frac{16}{3}k \right)^2 = 4$$
$$4^2 \left(1 + k^2 \right) + \frac{32k}{3}x + \left(\frac{2 \cdot 8}{9}k^2 - 4 \right) = 0$$

$$D = 0$$

$$D = \frac{2^{10} \cdot k^4}{9} - 4 \cdot \left(1 + k^2 \right) \cdot \left(\frac{2 \cdot 8}{9}k^2 - 4 \right) = 0 \quad | : 2^4$$

$$\frac{2^6 \cdot k^4}{9} - \left(1 + k^2 \right) \cdot \left(\frac{2 \cdot 8}{9}k^2 - 4 \right) = 0$$

$$\frac{2^6 \cdot k^2}{9} - \frac{2^6 \cdot k^4}{9} + k^2 - \frac{2^6 \cdot k^2}{9} + 1 = 0$$

$$k^2 \left(\frac{2^6}{9} - 1 \right) = 1$$

$$k^2 \left(\frac{55}{9} \right) = 1$$

$$k^2 = \frac{9}{55}$$

$$k = \pm \frac{3}{\sqrt{55}}$$

$$\text{ур-е } y = \pm \frac{3x}{\sqrt{55}} + \frac{16}{3\sqrt{55}}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$1) \frac{3x}{255} - y + \frac{16}{255} = 0$$

$$q + -y + 10f = 0$$

$$q = \frac{3}{255}, f = \frac{16}{10255}$$

$$2) -\frac{3x}{255} - y + \frac{16}{255} = 0$$

$$q = -\frac{3}{255}, f = \frac{16}{10255}$$

Ответы: $q_{1,2} = \pm \frac{3}{255}$, для которых $f = \frac{16}{10255}$
 $q_{3,4} = \pm \frac{1}{327}$, для них $f = \frac{8}{1527}$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

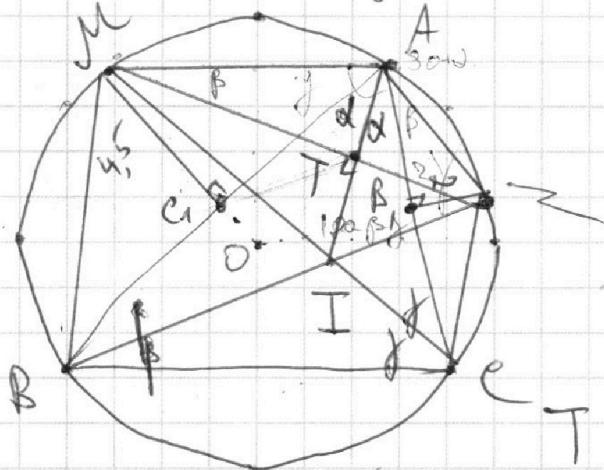
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input checked="" type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 7



План как $M \cup N$ -

середина др, что
 $C M \cup B N$ -диаметр
присо

$$T = M \cup N \cap A \cup I$$

То и. о чрездоже $AN = NC = NJ$ и
~~AM = MC = MJ~~.

Также $MC_1 + AB = NB_1 + AC$, и, к
 $\Delta BMC_1 \sim ANC$ -равнодострече, что
 $C_1 \cup B_1$ -середина $AB \cup AE$

Следит чо $C_1 = -\frac{AB}{2} \cdot \frac{AB}{2} = -45 \cdot (2R-45)$,
что есть $AB^2 = 18 \cdot (2R-45)$, $R = \frac{AB^2}{36} + \frac{45}{2}$

Аналогично $\frac{AC^2}{4} = 2 \cdot (2R-2)$, $R = \frac{AC^2}{16} + 1$

$$\frac{AB^2}{36} + \frac{45}{2} = \frac{AC^2}{16} + 1 \quad | \cdot 4$$

$$\frac{AB^2}{36} + 9 = \frac{AC^2}{16} + 4 \quad | \cdot 36$$

$$4AB^2 + 9 \cdot 36 = 9AC^2 + 4 \cdot 36$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$3AC^2 = 4AB^2 + 180$$

$$AC^2 = \frac{4AB^2}{3} + 20$$

Тогда $AC=2x$, $AB=2y$

По теореме Фицалера $AN = \sqrt{4+x^2}$, $AM = \sqrt{4,5+y^2}$

$$S_{\triangle ANC} = 2x = \frac{(4+x^2) \cdot \sin \angle ANC}{2}$$

$$\sin \angle ANC = \frac{4x}{4+x^2}$$
 по определению

$$\sin \angle BMA = \frac{xy}{4,5+y^2}$$
 по определению, $R = \frac{1}{4+x^2} = \frac{1}{4,5+y^2} \Rightarrow \frac{4+x^2}{4,5+y^2} = 1$

Так как $AN = NI$ и $MA = MI$, то $MANI$ -

глебишник, значит $\angle AIT + \angle MIN = 180^\circ$

$$\angle AMN = \angle ABN, \sin \angle ABN = 2R$$

$$\sin \angle ABN = \frac{\sqrt{4+x^2}}{4+x^2} \cdot \frac{AN}{\sqrt{4+x^2}}$$

В $\triangle MAT$ $\angle ATM = 50^\circ$, значит

$$AT = \sin \angle ATM \cdot AM = \frac{\sqrt{4,5+y^2}}{\sqrt{4+x^2}} = 1$$

А так $MANI$ -глебишник, то $AT = IT$,

то есть $AT = 2 \cdot AT = 2$.

Ответ: $AT = 2$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:


МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

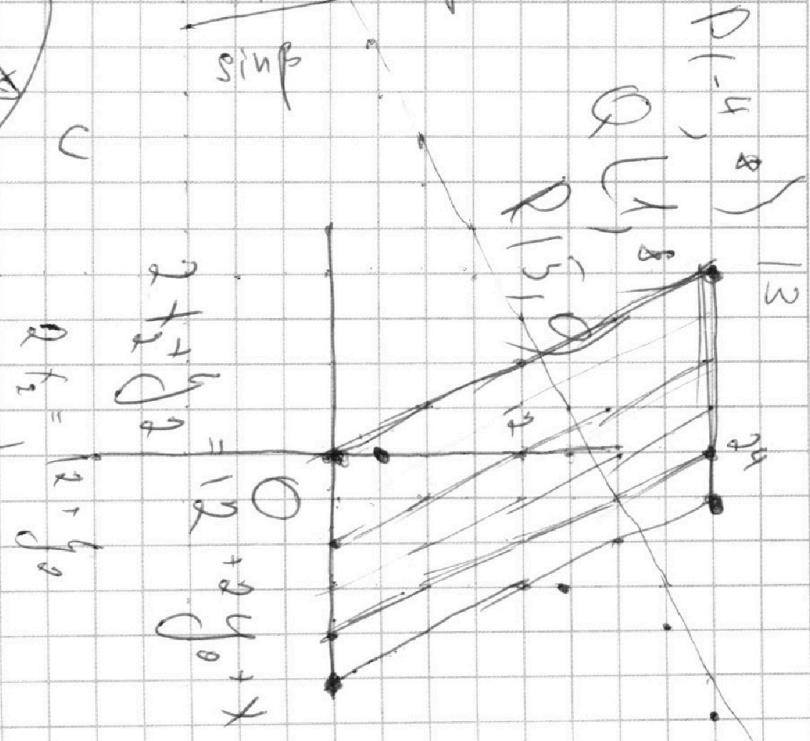
$$\text{Упростите} \\ \rightarrow (x+1)(2x-3) + 2\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + 1 = 2x^2 - 7x$$

$$d = 4 - 2 \cdot 4 \cdot X$$

$$\left(2 + \frac{1}{2} + 2 + -\frac{1}{2} \right) + 15$$

$$\sin \theta = \frac{1}{2}$$

Bunzl.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

5

6

7

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Черновик

$$P = 2 \pi - 24 = 4$$

$$x = \frac{5+1}{4}$$

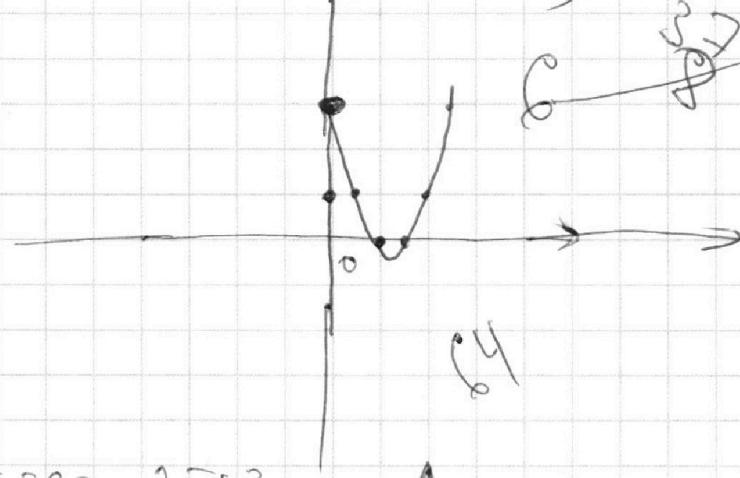
$$8 \cdot 10^3 = 1 \quad 2$$

$$x \in [1, 15]$$

$$\boxed{4-16}$$

$$2x^2 - 5x + 3 = (+-)(+2x-3)$$

4

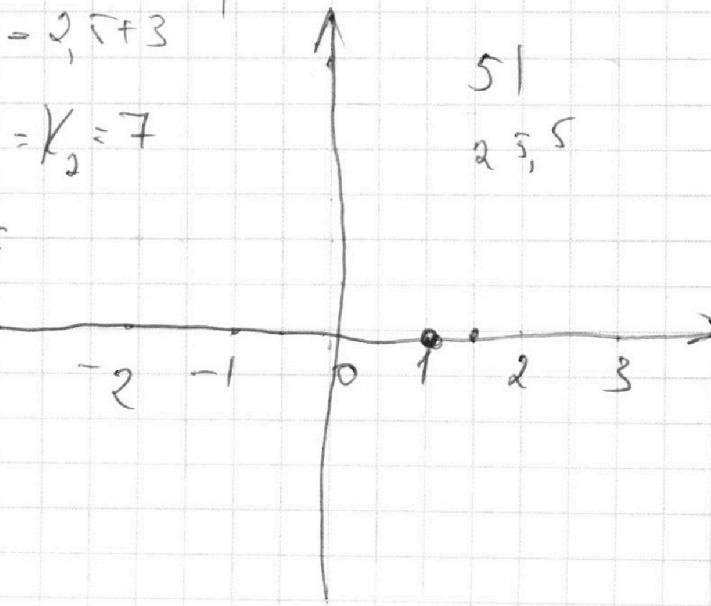


64

$$2 \cdot 0,25 = 0,5 = 2,5 + 3$$

$$-1 \quad K_1 = K_2 = 7$$

$$K_3 =$$



$$51 \\ 2 \tilde{5} 5$$

$$12 \\ 5 \\ 5 \\ 6$$

$$12 \\ 5 \\ 5 \\ 6$$

$$1 \cdot 8a = 5 \\ 2$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Черновик

(2)

$$\begin{aligned}ab &= k \cdot 2 \cdot 7^{10} \\bc &= l \cdot 2^{17} \cdot 7^{17} \\ac &= s \cdot 2^{20} \cdot 7^{37}\end{aligned}$$

$$k \cdot l \cdot s = ?$$

2

$$\frac{ab \cdot ac}{bc} = \frac{k \cdot s \cdot 2^{34} \cdot 7^{47}}{l \cdot 2^{17} \cdot 7^{17}}$$

$$= \frac{k \cdot s \cdot 2}{l} \quad \begin{aligned}g &= 1 \\l &= 7\end{aligned}$$

$$b^2 = \frac{ab \cdot bc}{ac} = \frac{k \cdot l}{s} \quad \begin{aligned}1+7 \\1^2 - 6 \cdot 7 + 7^2\end{aligned} =$$

$$HOD((a+b)^2, a^2 - cab + b^2) = \frac{s}{50 - 42} = 1$$

$$= HOD(a+b, (a+b)^2 - sab) =$$

$$= HOD(a+b, -sab) = HOD(a+b, s)$$

$\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Черновик

$$4q = \sqrt{1+q^2} \cdot \sqrt{1+4q^2} = \sqrt{1+5q^2}$$

2

$$R = 5$$

A

$$16q^2 = (1+q^2)(1+4q^2)$$

$$\sin \alpha = \frac{4q}{5}$$



$$5 \cdot 16 \cdot q = (1+q^2)(1+4q^2)$$

$$AB \cdot AC$$

$$80q = 1 + 50q^2 + 4q^4$$

$$AO - R =$$

$$= (AO - R)(AO + R)$$

$$AO^2 - R^2 =$$

$$q \cdot 7q = 25 - O_2 C^2$$

$$O_2 C^2 = 25 - 7q^2$$

$$AO = \sqrt{1+q^2}$$

$$BO = \sqrt{1+4q^2}$$

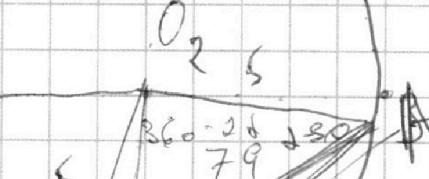
$$64q^2 = 1+q^2 + 1+4q^2 - 20 \cdot \sqrt{1+4q^2}$$

$$AO_1 = q$$

$$\frac{q}{\sin \alpha} = 10$$

$$q = 4 \sin \alpha$$

$$\sin \alpha = 0.8q$$



$$AO_1 = q$$

$$q^2$$

$$64q^2 = 1+q^2 + 1+4q^2 - 20 \cdot \sqrt{1+4q^2}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

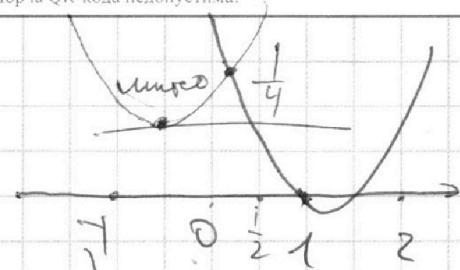


- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Черновик



$$\left(2x^2 - 5x + 3\right) - \left(2x^2 + 2x + 1\right)$$

(4)

$$4 - \cancel{35} +$$

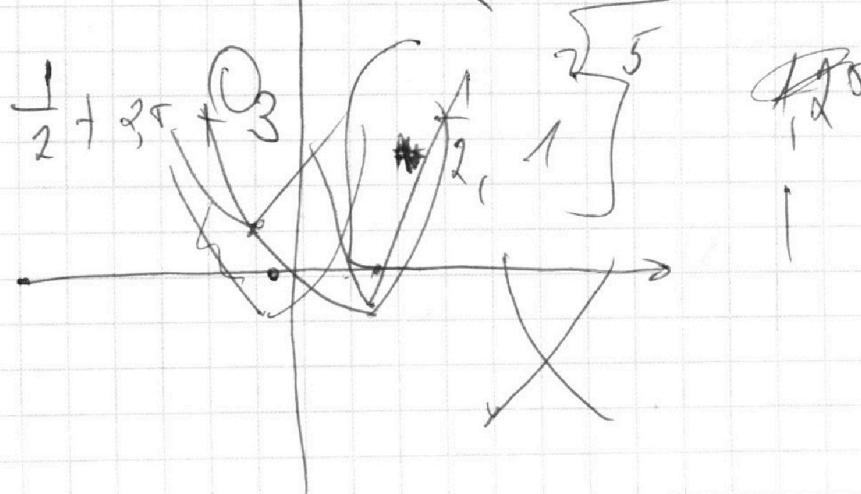
$$\frac{8}{43} - 2\left(x^2 + x + \frac{1}{2}\right) = \\ = 2\left(\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\right) =$$

$$-\frac{1}{2}$$

$$2x^2 + 2x + 1 < 1$$

$$\frac{1}{2}$$

$$1,15 \quad \frac{1}{2}$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\frac{\sin \beta}{\sqrt{4x+2}} = \frac{1}{\sqrt{4x+4}}$ *Линейка*

$\sin \beta = \frac{1}{\sqrt{4x+4}}$

$F = \frac{\sqrt{4x+4}}{\sqrt{4x+2}}$

$2R = AM$

$\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{4x+2}}$

$2(\sqrt{R^2}) = x^2$

$x^2 + 2 + \frac{x^2}{2} + 2 = 2R$

$R = \frac{x^2}{4} + 1$

$4,5(2R - 4) = 4y^2$

$4,5(2\sqrt{\frac{x^2}{4} + 1} - 4) = 4y^2$

$4,5 \cdot \frac{4\sqrt{\frac{x^2}{4} + 1} - 16}{4} = 4y^2$

$\sin \alpha = \frac{4\sqrt{\frac{x^2}{4} + 1} - 16}{4}$

$\sin \alpha = \frac{4\sqrt{\frac{x^2}{4} + 1} - 16}{4}$

$\frac{\sin \alpha}{\sqrt{x^2+4}} = \frac{\sin \alpha}{2x}$

$\frac{\sin \alpha}{\sqrt{x^2+4}} = 2$

$\frac{\sin \alpha}{\sqrt{x^2+4}} = \frac{2\sqrt{\frac{x^2}{4} + 1} - 4}{2x}$

$\frac{\sin \alpha}{\sqrt{x^2+4}} = \frac{2\sqrt{\frac{x^2}{4} + 1} - 4}{2x}$

$R = \sqrt{\frac{y^2}{4} + 4,5}$

$R = \sqrt{\frac{y^2}{4} + 4,5} = \sqrt{\frac{y^2}{4} + 4,5}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

5

6

7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



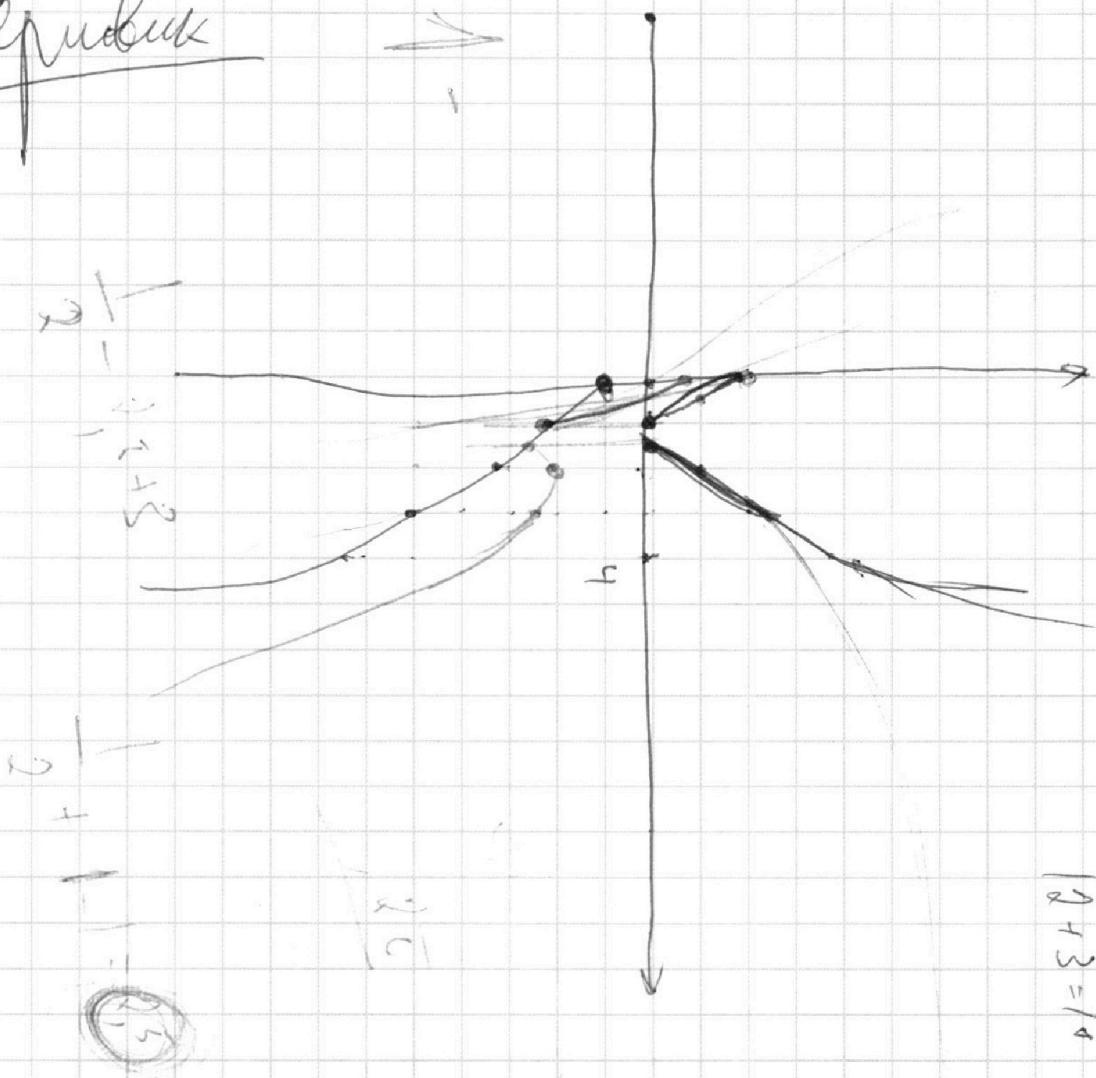
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Чернобыль



$$3 + 3 = 6$$

$$x = 10 + \frac{1}{15 - g}$$

$$f = 1 + 17 + 8$$

130 to

$$1 + 9 + 8 =$$

21

$$1 \times f + e \}$$

111

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

5

6

МФТИ

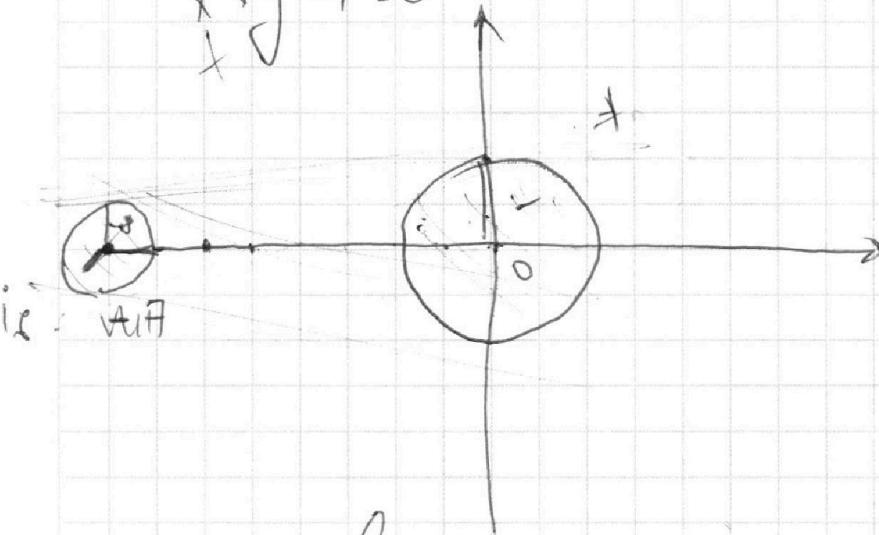
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Черновик

$$ax^2 + by^2 + c = 0$$

$$x^2 + y^2 - 4 = 0$$



$$y = ax + b$$

$$O(-16, 0)$$

$$0 = -16a + b, b = 16a$$

$$\begin{cases} y = ax + b \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$

$$0 = 32a^2 - 4(1 + a^2)$$

$$y = ax + 16a$$

$$x^2 + y^2 = 4$$

$$x^2 + a^2 + 32a^2 x + 16a^2 - 4x^2 = (ax + 16a)^2 = 4$$