



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9



1. [4 балла] Натуральные числа  $a$ ,  $b$ ,  $c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^{14}7^{10}$ ,  $bc$  делится на  $2^{17}7^{17}$ ,  $ac$  делится на  $2^{20}7^{37}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .

2. [4 балла] Известно, что дробь  $\frac{a}{b}$  несократима ( $a \in \mathbb{N}$ ,  $b \in \mathbb{N}$ ). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}$$

При каком наибольшем  $m$  могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на  $m$ ?

3. [4 балла] Центр окружности  $\omega$  лежит на окружности  $\Omega$ , хорда  $AB$  окружности  $\Omega$  касается  $\omega$  в точке  $C$  так, что  $AC : CB = 7$ . Найдите длину  $AB$ , если известно, что радиусы  $\omega$  и  $\Omega$  равны 1 и 5 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0;0)$ ,  $P(-12;24)$ ,  $Q(3;24)$  и  $R(15;0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$ .

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник  $ABC$  вписан в окружность. Пусть  $M$  – середина той дуги  $AB$  описанной окружности, которая не содержит точку  $C$ ;  $N$  – середина той дуги  $AC$  описанной окружности, которая не содержит точку  $B$ . Найдите расстояние от вершины  $A$  до центра окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ , если расстояния от точек  $M$  и  $N$  до сторон  $AB$  и  $AC$  соответственно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача 1

Пусть  $a = 2^{k_1} \cdot 7^{t_1} \cdot a'$ ,  $b = 2^{k_2} \cdot 7^{t_2} \cdot b'$ ,  $c = 2^{k_3} \cdot 7^{t_3} \cdot c'$   
 $abc = 2^{k_1+k_2+k_3} \cdot 7^{t_1+t_2+t_3} \cdot a' \cdot b' \cdot c' = 2^{14} \cdot 7^{10}$   
 Тогда  $ab = 2^{k_1+k_2} \cdot 7^{t_1+t_2} \cdot a' \cdot b' : 2 \cdot 7$ , то есть  
 $k_1+k_2 \geq 14$ ,  $t_1+t_2 \geq 10$

Аналогично

$k_2+k_3 \geq 17$ ,  $t_2+t_3 \geq 17$   
 $k_1+k_3 \geq 20$ ,  $t_1+t_3 \geq 37$

Сложив неравенства:

$2(k_1+k_2+k_3) \geq 14+17+20$  |  $2(t_1+t_2+t_3) \geq 10+17+37$   
 $k_1+k_2+k_3 \geq 25,5$  |  $t_1+t_2+t_3 \geq 32$

$k_1+k_2+k_3 \geq 26$ ,  $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{N}_0$ ,  $t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{N}_0$   
 Это достигается при  $t_1+t_2+t_3 \geq 37$ , что

Это достигается при  $k_1=8, k_2=6, k_3=12$   
 $t_1+t_2+t_3 \geq 37$

достигается при  $t_2=27, t_3=0, t_1=10$   
 $k_1+k_2+k_3 \geq 26$ ,  $t_1+t_2+t_3 \geq 37$

Заметим, что  $abc \geq 2^{26} \cdot 7^{37}$

Равенство достигается при  $a = 2^{10} \cdot 7^6 \cdot a'$ ,  $b = 2^{12} \cdot 7^0 \cdot b'$ ,  $c = 2^{4} \cdot 7^{27} \cdot c'$   
 $abc$  при этом равно  $2^{26} \cdot 7^{37}$

Ответ:  $abc = 2^{26} \cdot 7^{37}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

## Задача 2

Так как  $m$ -наибольшее такое, что

$a+b$ ;  $m$  и  $a^2 - cab + b^2$  :  $m$ , то

$$m = \text{НОД}(a+b, a^2 - cab + b^2) =$$

$$= \text{НОД}(a+b, (a+b)^2 - cab) = \text{НОД}(a+b, cab),$$

так как  $\frac{a}{b}$  - несократима, то  $\text{НОД}(a, b) = 1$

$\text{НОД}(a+b, a) = \text{НОД}(a+b, b) = 1$ . Значит

$\text{НОД}(a+b, cab) = 1$ , а значит  $\text{НОД}(a+b,$

$cab) = \text{НОД}(a+b, c) \leq c$ .

Пример на  $c=8$ :  $a=1$ ,  $b=7$ , где  $\frac{a}{b}$

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{7} \text{ - несократима, } \frac{a+b}{a^2 - cab + b^2} = \frac{8}{1 - 6 \cdot 7 + 7 \cdot 7} = \frac{8}{8}$$

$8:8$  и  $8:8$ .

Ответ:  $m=8$ .

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

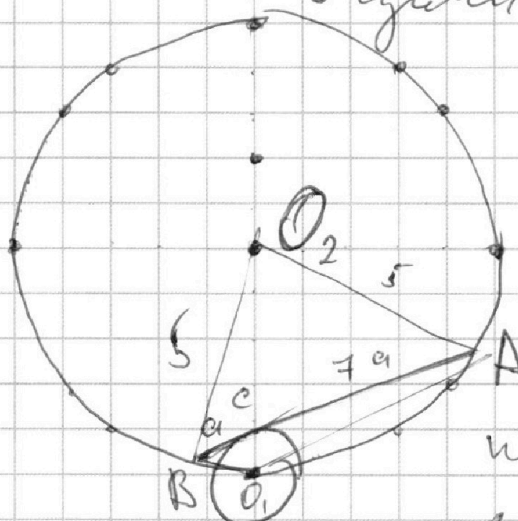
1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача 3



Пусть  $BC = a$ , тогда  
 $AC = BC \cdot 7 = 7a$   
 $O_1C \perp AB$ , так как  
 $O_1C$  - радиус, а  $AB$  - касательная  
 под прямым углом, значит  $O_1C = 1$

Из т. Пифагора в  $\triangle BCO_1$ ,  $BO_1 = \sqrt{1+a^2}$ ,  
 аналогично  $AO_1 = \sqrt{1+49a^2}$

Из т. синусов в  $\triangle BO_1A$   $\frac{AB}{\sin \angle BO_1A} = 2R = 10$

$$8a = 10 \cdot \sin \angle BO_1A, \quad \sin \angle BO_1A = 0,8a$$

$$S_{\triangle AO_1B} = \frac{O_1C \cdot AB}{2} = \frac{O_1B \cdot O_1A \cdot \sin \angle BO_1A}{2}$$

$$1 \cdot 8a = \sqrt{1+a^2} \cdot \sqrt{1+49a^2} \cdot 0,8a$$

$$\sqrt{1+a^2} \cdot \sqrt{1+49a^2} = 10$$

$$(1+a^2)(1+49a^2) = 100$$

$$49a^4 + 50a^2 - 99 = 0$$

$$49 \cdot (a^2 - 1) \left( a^2 + \frac{99}{49} \right) = 0$$

$$a^2 = 1$$

$$a = \pm 1$$

$$\text{или } a^2 = -\frac{99}{49}$$

нет решения, так как  $a^2 \geq 0$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$q = -1$  - невозможно, т.к.  $q > 0$

$q = 1$

$BC = 1, AC = 7$

$AB = \emptyset$

Ответ:  $AB = \emptyset$ .

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача 4

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x$$

Решим уравнение с помощью неравенств 0,  
и.к. корни не отрицательны

$$(2x^2 - 5x + 3) - (2x^2 + 2x + 1) = (2 - 7x)(\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1})$$
$$-7x + 2 = (2 - 7x)(\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1})$$

Если  $2 - 7x = 0$ , то

$$x = \frac{2}{7} = \text{корень}$$

$$\text{и.к. } 2\left(\frac{2}{7}\right)^2 - 5 \cdot \frac{2}{7} + 3 > 0 \text{ и } 2 \cdot \left(\frac{2}{7}\right)^2 + 2 \cdot \frac{2}{7} + 1 > 0$$

Итак

$$1 = \sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1}$$

Сопремиме неравенство 0, и.к. первый корень  
не отрицательны

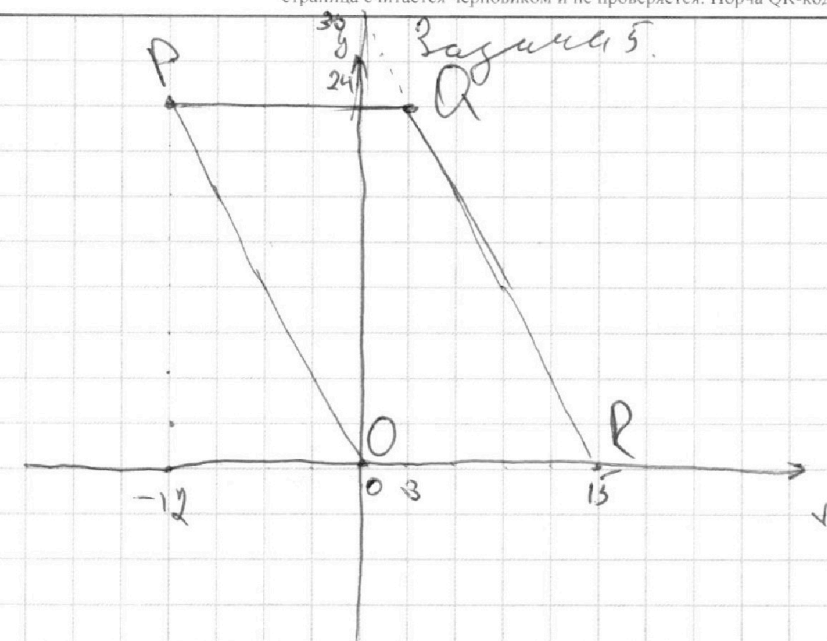
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$$

$$2x_2 + y_2 = 12 + 2x_1 + y_1$$

Найдем все такие  $X(x_0, y_0)$ , что

$2x_0 + y_0 = \text{const}$  - они лежат на ~~горизонтальной~~  
параллельной  $PO$ .

Но есть, для любой точки  $A$  находим  
все такие  $B$ , лежащие на параллельной  
параллельной  $PO$  (т.к.  $12 + 2x_1 + y_1 = \text{const}$ )

Следовательно, находим все такие  
пары  $(A, B)$ , что они лежат на параллельной  
параллельной  $PO$ , и расстояние между  
которым 12 (расстояние между

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

разность координат ~~там~~ этих точек)  
две клетки такой же длины существуют  
ровно одна на рисунке 12 (с ~~тем~~ -  
разностью направлений)

Заметим, что если линия не проходит  
через точку  $(0, x)$ ,  $x \in \mathbb{Z}$ , то эта линия  
не проходит и через одну из этих точек.  
(т.е. если  $2 \cdot 0 + x = c$  не имеет решений, то  $c \notin \mathbb{Z}$ ,  
а значит  $c \neq 2x_0 + y_0 \in \mathbb{Z}$ )

Но есть такие линии содержащие хотя  
бы одну точку в этой параллелограмме  
30 (т.е. разность координат сторон  $\geq 0$ )

Star Star, заметим, что расстояние между линиями  
12 и обе имеют целые координаты в параллелограмме  
24 (две клетки координат  $y$  на линии  $Oy$   
от  $0$  до  $24$ )

Заметим, что координаты точек равны  
координатам  $y$  пересечения с  $Oy$ .



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

На прямой с меньшей константой ровно  
13 точек точек в параллелограмме

(  $2x_0 + y_0 = 2k$ , тк точки принадлежат параллелограмму,  
то  $y_0 > 0$  и  $y_0 \leq 24$ , отсюда  $2x_0 = 2k - y_0$  имеет  
ровно 13 решений )

С меньшей, симметрично, 12 точек.

В паре обе прямые одинаковой константой.

Чемпи пар (с константой  $y$  первой  $y$  и

$0, 2, \dots, 24$ ) - 13, значит пар точек

$$(13 \cdot 13) \cdot 13 = 13^3$$

Нечетных пар (1, 3, ..., 23) - 12, значит

$$\text{пар точек } 12 \cdot (12 \cdot 12) = 12^3$$

Суммарно всего пар точек

$$13^3 + 12^3$$

$$\text{Ответ: } 13^3 + 12^3$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



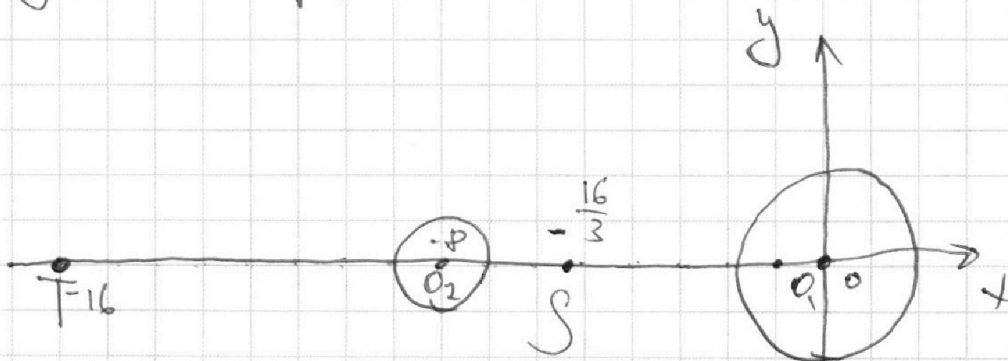
Задача 6

$$\begin{cases} x - y + 10 = 0 & (1) \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1) / (x^2 + y^2 - 4) \leq 0 & (2) \end{cases}$$

(1) - уравнение

(2)  $(x+8)^2 + y^2 - 1$  - уравнение окружности  
 $x^2 + y^2 - 4$  - уравнение окружности

границе пер-во отрицательна или  
точка  $A(x, y)$  находится ровно внутри  
одной окружности или на границе.



Так как окр. не пересекаются, то  
точка может находиться внутри или на  
границе одной из окружностей.

Уточнить решение или два решения

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Две окружности пересекаются <sup>круги</sup> ~~в~~ в единственной точке. Так как  
одна окружность <sup>круг</sup> ~~касается~~ касается  $x$ -оси, а другая  
касается  $y$ -оси, то окружности касаются ~~в~~ в  
единственной точке. Всего таких  
пар окружностей 4.

Радиусы окружностей касаются  $x$ -  
и  $y$ -осей в центре окружности  
и радиуса. Центр окружности  
касается  $T(-16, 0)$ , коэффициент равен  
 $\frac{R_2}{R_1} = 2$ , то есть  $\frac{TO_1}{TO_2} = \frac{x}{y} = 2 \Rightarrow x = 2y$ , а  
координата  $-16$ .

Уравнение касательной  $y = kx + n$

$$0 = -16k + n, \quad n = 16k$$

$$\begin{cases} y = kx + n \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases} \text{ - имеет одно решение}$$

$$y = kx + 16k$$

$$x^2 + (kx + 16k)^2 = 4$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$(x^2 + k^2 x^2) + 32k^2 x + (256k^2 - 4) = 0$$

$$D = 0$$

$$D = 2^{10} \cdot k^4 - 4 \cdot (k^2 + 1) \cdot (2^8 k^2 - 4) = 0 \quad | : 2^4$$

$$2^6 \cdot k^4 - (k^2 + 1)(2^6 k^2 - 1) = 0$$

$$2^6 \cdot k^4 - 2^6 \cdot k^4 + k^2 + 2^6 k^2 + 1 = 0$$

$$k^2 \cdot (1 + 2^6) = -1$$

$$k^2 = \frac{-1}{63}$$

$$k = \pm \frac{1}{\sqrt{63}} = \pm \frac{1}{3\sqrt{7}}$$

Итак есть две касательных  $y = \pm \frac{16}{3\sqrt{7}} + \frac{x}{3\sqrt{7}}$

$$1) \frac{x}{3\sqrt{7}} - y + \frac{16}{3\sqrt{7}} = 0$$

$$a + -y + 10b = 0$$

$$a = \frac{16}{3\sqrt{7}}, b = \frac{1}{15\sqrt{7}}$$

$$2) -\frac{x}{3\sqrt{7}} - y + \frac{16}{3\sqrt{7}} = 0$$

$$a = -\frac{16}{3\sqrt{7}}, b = \frac{1}{15\sqrt{7}}$$

Расширим центр окружности  
решения, через него проведем взаимно  
перпендикулярные касательные. Радиусы  $\frac{R_2}{R_1} = 2, 4$   
центр лежит на  $O_1 O_2$ ,  $\frac{SO_2}{SO_1} = 2$ , значит  $SO_2 = \frac{2R}{3} = \frac{16}{3}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи.

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$S_0 = \frac{8}{3}, \quad S(-\frac{16}{3}, 0)$$

Ищем угр-касательную  $y = kx + n$ .

$$0 = \frac{-16k}{3} + n, \quad n = \frac{16k}{3}$$

$$\begin{cases} y = kx + n \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases} \text{ - имеем одно решение}$$

$$y = kx + \frac{16k}{3}$$

$$x^2 + (kx + \frac{16k}{3})^2 = 4$$
$$x^2(1+k^2) + \frac{32k}{3}x + (\frac{256k^2}{9} - 4) = 0$$

$$D = 0$$

$$D = \frac{2^{10} \cdot k^2}{9} - 4 \cdot (1+k^2) \cdot (\frac{2^8 \cdot k^2}{9} - 4) = 0 \quad | \cdot 9^2$$

$$\frac{2^6 \cdot k^2}{9} - (1+k^2) \cdot (\frac{2^8 \cdot k^2}{9} - 4) = 0$$

$$\frac{2^6 \cdot k^2}{9} - \frac{2^6 \cdot k^4}{9} + k^2 - \frac{2^6 \cdot k^2}{9} + 4 = 0$$

$$k^2 \left( \frac{2^6}{9} - 1 \right) = 4$$

$$k^2 \left( \frac{55}{9} \right) = 4$$

$$k^2 = \frac{36}{55}$$

$$k = \pm \frac{6}{\sqrt{55}}$$

$$\text{угр-ная } y = \pm \frac{3x}{\sqrt{55}} + \frac{16}{\sqrt{55}}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$1) \frac{3x}{\sqrt{55}} - y + \frac{16}{\sqrt{55}} = 0$$

$$a + -y + 10b = 0$$

$$a = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{55}}, \quad b = \frac{16}{10\sqrt{55}}$$

$$2) -\frac{3x}{\sqrt{55}} - y + \frac{16}{\sqrt{55}} = 0$$

$$a = -\frac{3}{\sqrt{55}}, \quad b = \frac{16}{10\sqrt{55}}$$

Ответы:  $a_{1,2} = \pm \frac{3}{\sqrt{55}}, \quad \text{где } \text{max } b = \frac{16}{10\sqrt{55}}$   
 $a_{3,4} = \pm \frac{1}{3\sqrt{7}}, \quad \text{где } \text{max } b = \frac{8}{15\sqrt{7}}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

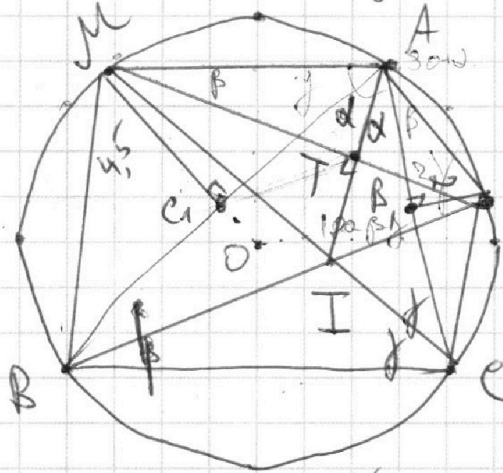
1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



~~#~~ Задача 7



Так как  $M$  и  $N$  —  
середины  $AB$  и  $AC$ , то  
 $CM$  и  $BN$  — медианы.

$T = MN \cap AI$

То  $M$  и  $O$  — середины  $AN = NC = NI$  и  
 ~~$AM = MC = MI$~~ .

Пусть  $MC_1 \perp AB$  и  $NB_1 \perp AC$ , и, так  
 $\triangle BMC_1$  и  $\triangle ANB_1$  — равнобедренные, и  
 $C_1$  и  $B_1$  — середины  $AB$  и  $AC$ .

Сторона  $MC_1 = \frac{AB}{2} \cdot \frac{AB}{2} = 4,5 \cdot (2R - 4,5)$ ,  
то есть  $AB^2 = 18 \cdot (2R - 4,5)$ ,  $R = \frac{AB^2}{36} + \frac{4,5}{2}$ .

Аналогично  $AC^2 = 2 \cdot (2R - 2)$ ,  $R = \frac{AC^2}{16} + 1$ .

$$\frac{AB^2}{36} + \frac{4,5}{2} = \frac{AC^2}{16} + 1 \quad | \cdot 4$$

$$\frac{AB^2}{9} + 9 = \frac{AC^2}{4} + 4 \quad | \cdot 36$$

$$4AB^2 + 9 \cdot 36 = 9AC^2 + 4 \cdot 36$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$3AC^2 = 4AB^2 + 190$$

$$AC^2 = \frac{4AB^2}{3} + 20$$

Пусть  $AC = 2x$ ,  $AB = 2y$

По т. Пифагора  $AN = \sqrt{4+y^2}$ ,  $AM = \sqrt{4,5^2+y^2}$

$$S_{ANM} = 2x = \frac{(4+y^2) \cdot \sin \angle ANM}{2}$$

$$\sin \angle ANM = \frac{4x}{4+y^2}$$

$$\sin \angle BMA = \frac{3y}{4,5^2+y^2}, \quad R = \frac{1}{4+y^2} = \frac{1}{4,5^2+y^2} \Rightarrow \frac{4+y^2}{4,5^2+y^2} = 1$$

Так как  $AN = NI$  и  $MA = MI$ , то  $MANI$ -  
гребенчатый, а значит  $AI \perp MN$

$$\angle AMN = \angle ABN, \quad \sin \angle ABN = 2R$$

$$\sin \angle ABN = \frac{\sqrt{4+y^2}}{4+y^2} = \frac{AN}{AB}$$

В  $\triangle MAT$   $\angle ATM = 90^\circ$ , значит

$$AT = \sin \angle AMT \cdot AM = \frac{\sqrt{4+y^2}}{\sqrt{4+y^2}} = 1$$

А так как  $MANI$ -гребенчатый, то  $AT = IT$ ,

то есть  $AI = 2 \cdot AT = 2$ .

Ответ:  $AI = 2$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



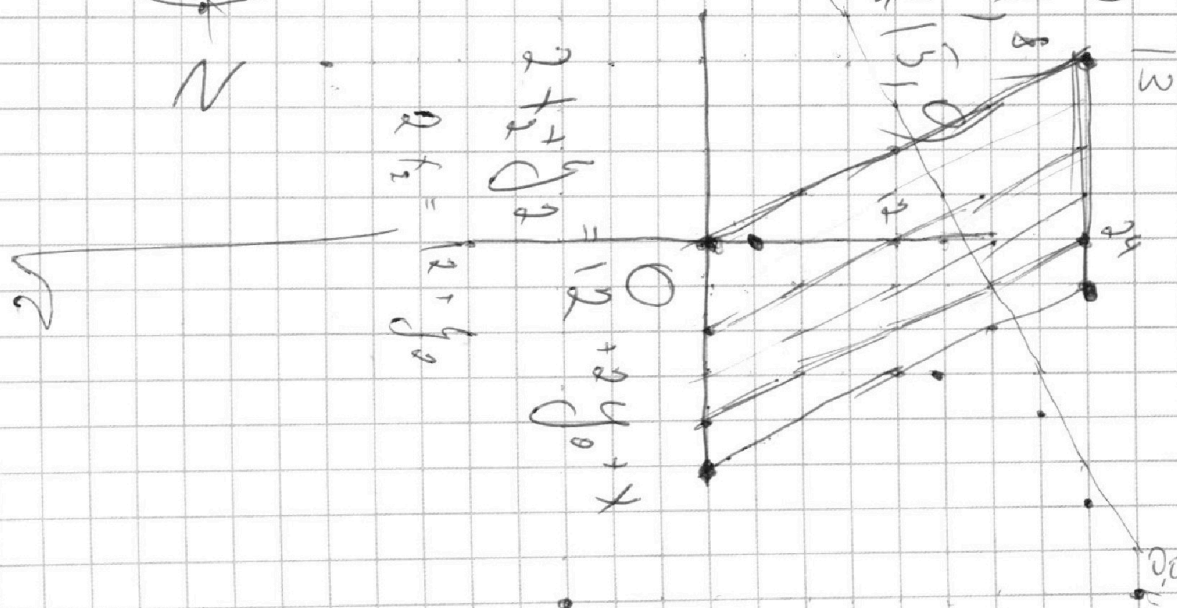
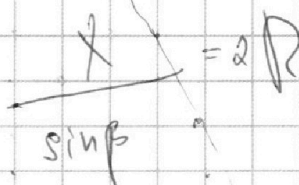
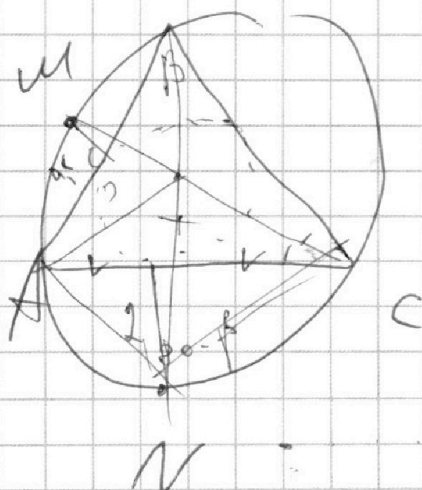
*Чернышев*

$$\sqrt{(x-1)(2x-3)} + \sqrt{2(x-\frac{1}{2})^2 + 1} = 2 - 7x$$

$$D = 4 - 2 \cdot 4 \cdot x$$

*3 умножить на 2*  
 $2x - 11 =$   
 $2x + 1 =$   
 $2x - 11 =$

$$(2x^2 + 2x - \frac{1}{2}) \cdot x = 5$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1     2     3     4     5     6     7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



*Черновик*

$$D = 25 - 24 = 1$$

$$x = \frac{5 \pm 1}{4}$$

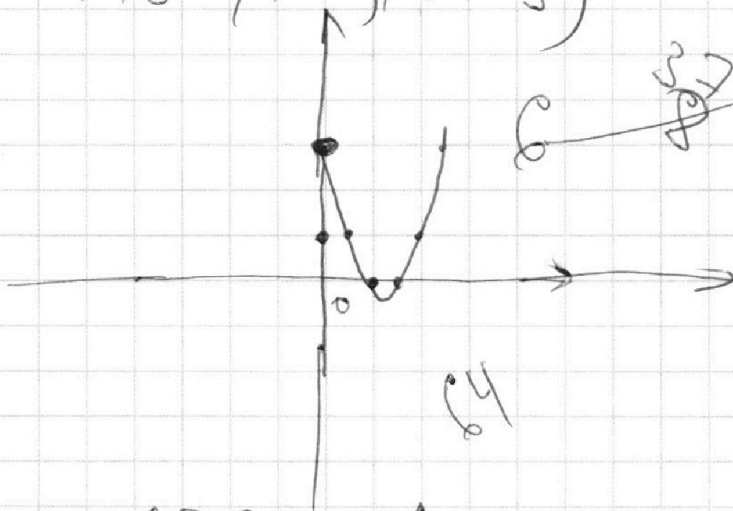
$$8 - 10x^2 = 1 \quad x^2 = \frac{1}{2}$$

$$x \in \left[ \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right]$$

$$\sqrt{4 - 16}$$

$$2x^2 - 5x + 3 = (x - 1)(2x - 3)$$

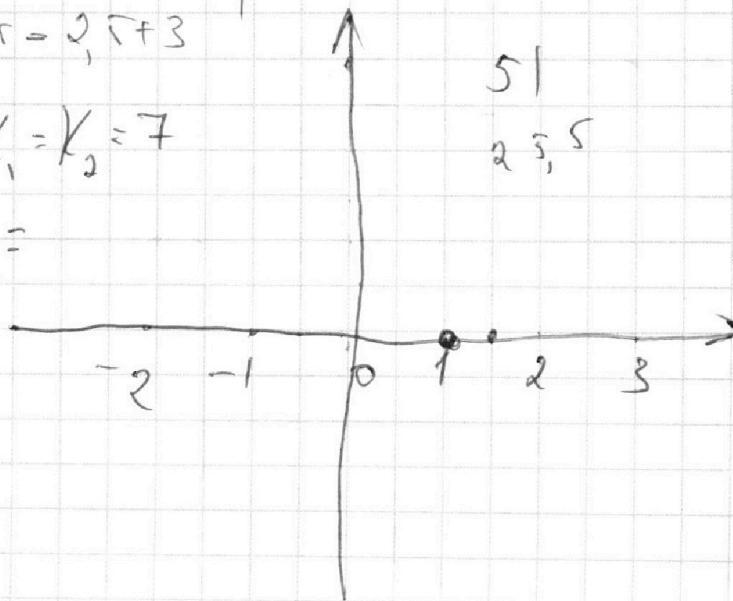
4



$$2 \cdot 0,25 = 0,5 = 0,5 + 3$$

$$-1 \quad K_1 = K_2 = 7$$

$$K_3 =$$



$$51$$

$$23,5$$

$a = 2$   
 $b = -5$   
 $c = 3$   
 $D = 25 - 24 = 1$   
 $x = \frac{5 \pm 1}{4}$   
 $x_1 = 1$   
 $x_2 = 1.5$   
 $y = 2x^2 - 5x + 3$   
 $y(1) = 2 - 5 + 3 = 0$   
 $y(1.5) = 4.5 - 7.5 + 3 = 0$   
 $y(1.25) = 3.125 - 6.25 + 3 = -0.125$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$2x_0 + y_0 = 2k$   
 $2x_0 > 0$   
 $y_0 > 0$

Черновик

$$ab = k \cdot 2^{14} \cdot 7^{10}$$

$$bc = t \cdot 2^{17} \cdot 7^{17}$$

$$ac = s \cdot 2^{20} \cdot 7^{37}$$

$$k \cdot t \cdot s = \dots$$

$$\frac{ab \cdot ac}{bc} = \frac{k \cdot s \cdot 2^{34} \cdot 7^{47}}{t \cdot 2^{17} \cdot 7^{17}} =$$

$$= \frac{k \cdot s \cdot 2}{t}$$

$$a=1$$

$$b=7$$

$$b^2 = \frac{ab \cdot bc}{ac} = \frac{k \cdot t}{s} = \frac{1+7}{1^2 - 6 \cdot 7 + 7^2} =$$

$$\text{НОД}(a+b, a^2 - cab + b^2) = \frac{\varphi}{50-42} = 1$$

$$= \text{НОД}(a+b, (a+b)^2 - cab) =$$

$$= \text{НОД}(a+b, -cab) = \text{НОД}(a+b, \varphi)$$

$\begin{matrix} -1 & a \\ a & a \end{matrix}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Черновик

$$4a = \frac{\sqrt{1+a^2} \cdot \sqrt{1+49a^2} \cdot \sin \alpha}{2}$$

$$64a^2 = (1+a^2)(1+49a^2)$$

$$\sin \alpha = \frac{4a}{5}$$

$$5 \cdot 16 \cdot a = (1+a^2)(1+49a^2)$$

$$AB \cdot AC = 4a^2 + 50a^2 + 49a^4$$

$$AO^2 - R^2 = (AO - R)(AO + R)$$

$$a \cdot 7a = 25 - O_2C^2$$

$$O_2C = \sqrt{25 - 7a^2}$$

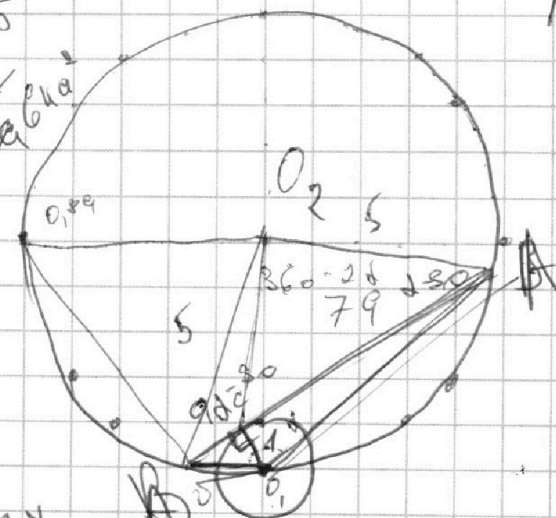
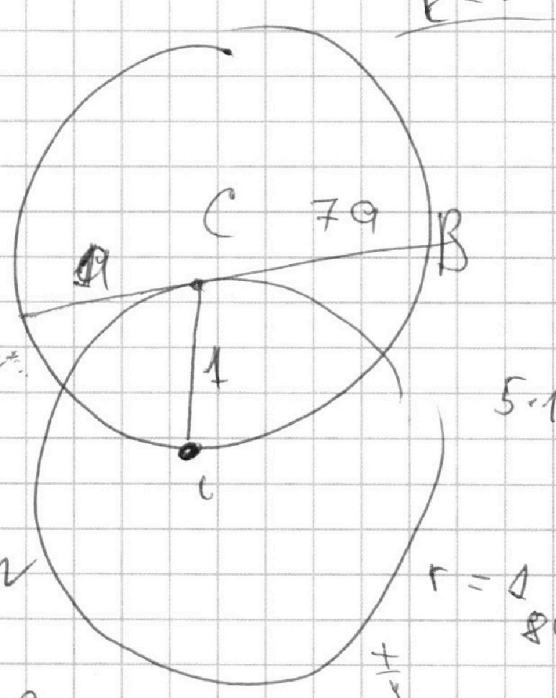
$$AO_1 = \sqrt{1+a^2}$$

$$BO_1 = \sqrt{1+49a^2}$$

$$AO_1^2 - 1 = a^2$$

$$64a^2 = 1+a^2 + 1+49a^2 - 2\sqrt{1+a^2} \cdot \sqrt{1+49a^2} \cdot \cos \alpha$$

$a = \frac{\sqrt{2}}{2}$   
 $4a = 2\sqrt{2}$   
 $R = 5$   
 $8a = \sqrt{100 - 64a^2}$   
 $2 \cdot 64a^2 = 100$   
 $2 = \frac{25}{32}$   
 $a = \frac{5\sqrt{2}}{4}$   
 $\sin \alpha = \frac{4a}{5}$   
 $\alpha = \arcsin \frac{4a}{5}$   
 $10 = \frac{8a}{\sin \alpha}$   
 $a = \frac{5}{4} \sin \alpha$   
 $\sin \alpha = \frac{4a}{5}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

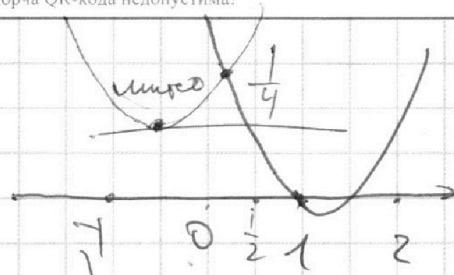
- 1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



*Черновик*



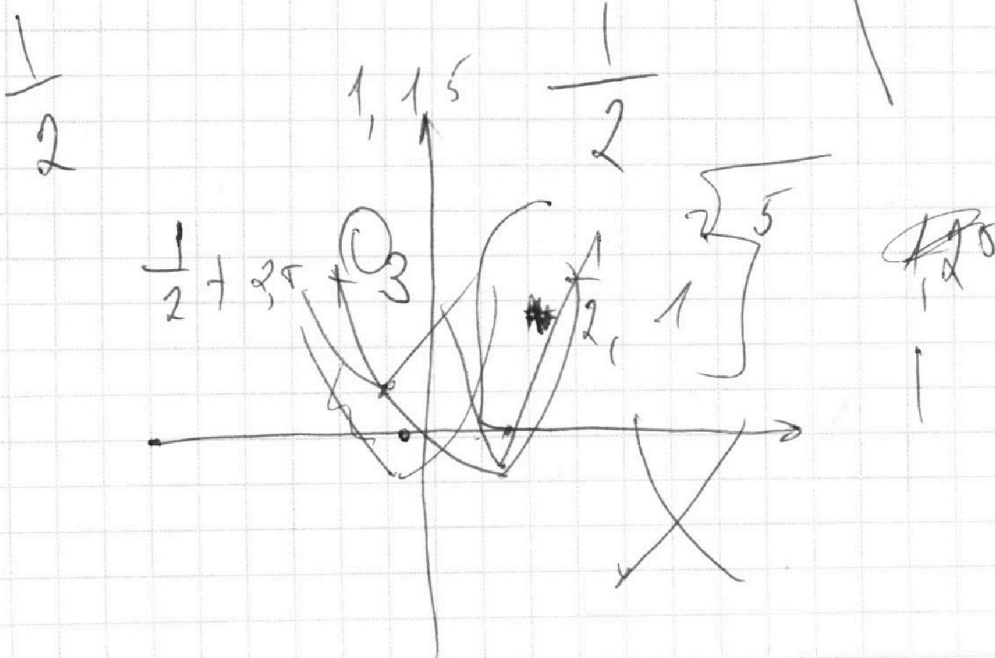
$$(2x^2 - 5x + 3) - (2x^2 + 2x + 1)$$

4

$$2(x^2 + x + \frac{1}{2}) =$$

$$= 2((x + \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4}) =$$

$$2x^2 + 2x + 1 < 1$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\frac{\sin \beta}{\sqrt{4+x^2}} = \frac{1}{1}$

$\sin \beta = \frac{1}{\sqrt{4+x^2}}$

$F = \frac{\sqrt{4+x^2}}{2}$

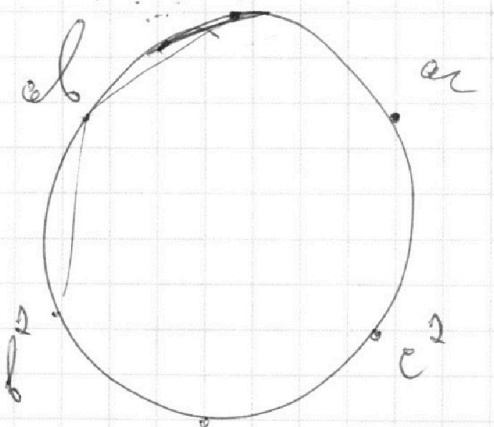
$2(R-x) = x^2$

$\frac{x^2}{2} + 2 = 2R$

$R = \frac{x^2}{4} + 2$

$\sin \alpha = \frac{4}{\sqrt{4+x^2}}$

$\sin 2\alpha = 2 \cdot 2 \cdot \frac{4}{\sqrt{4+x^2}}$



$\frac{\sin \alpha}{\sqrt{4+x^2}} = \frac{\sin 2\alpha}{2x}$

$\frac{\sin \alpha}{1} = 2$

$\frac{\sin \alpha}{2} = \frac{2 \cdot \sqrt{4+x^2}}{2x}$

$R = \frac{4}{2} + 2 = 4$

$R = \frac{4}{2} + 2 = 4$



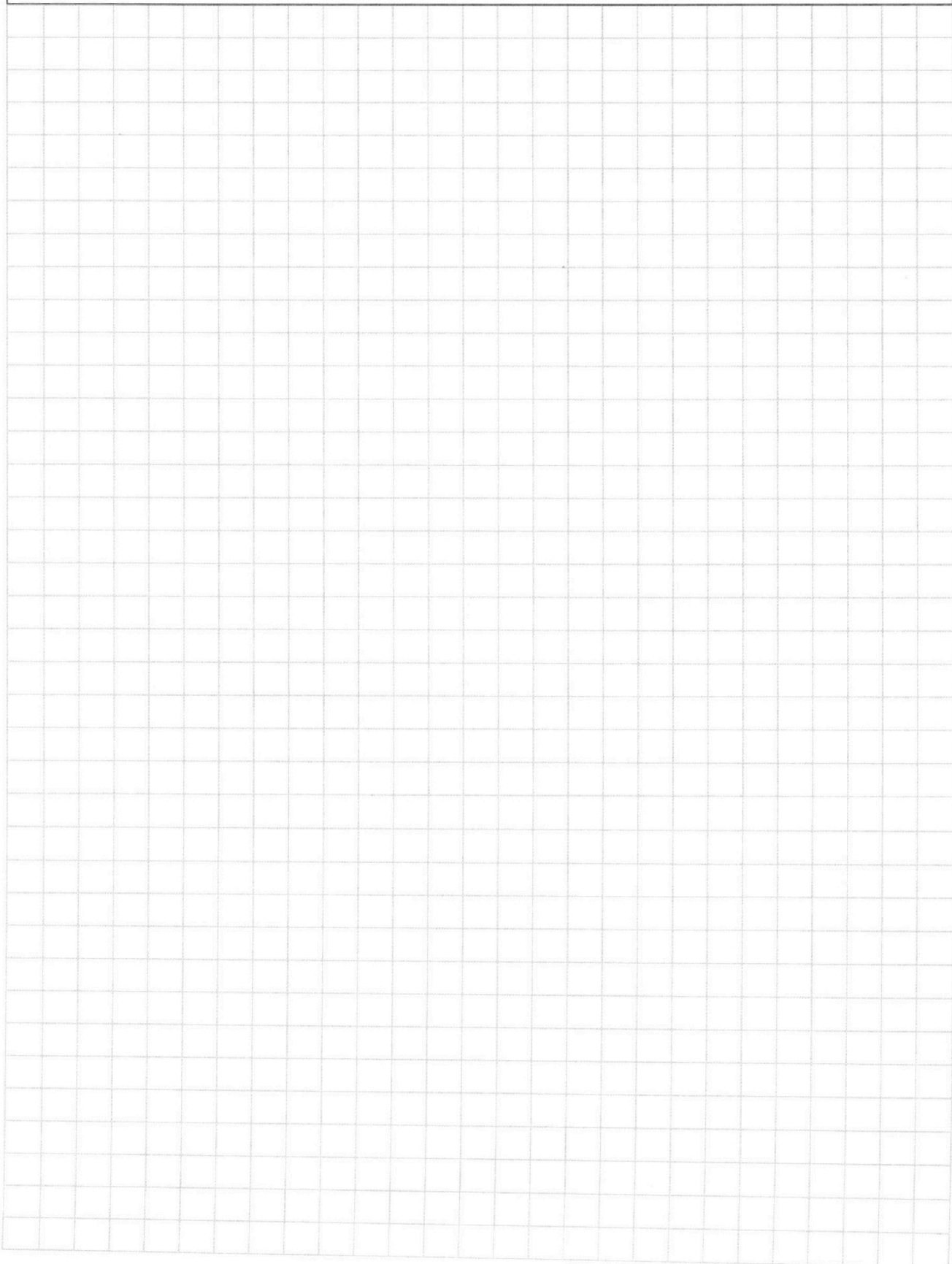
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

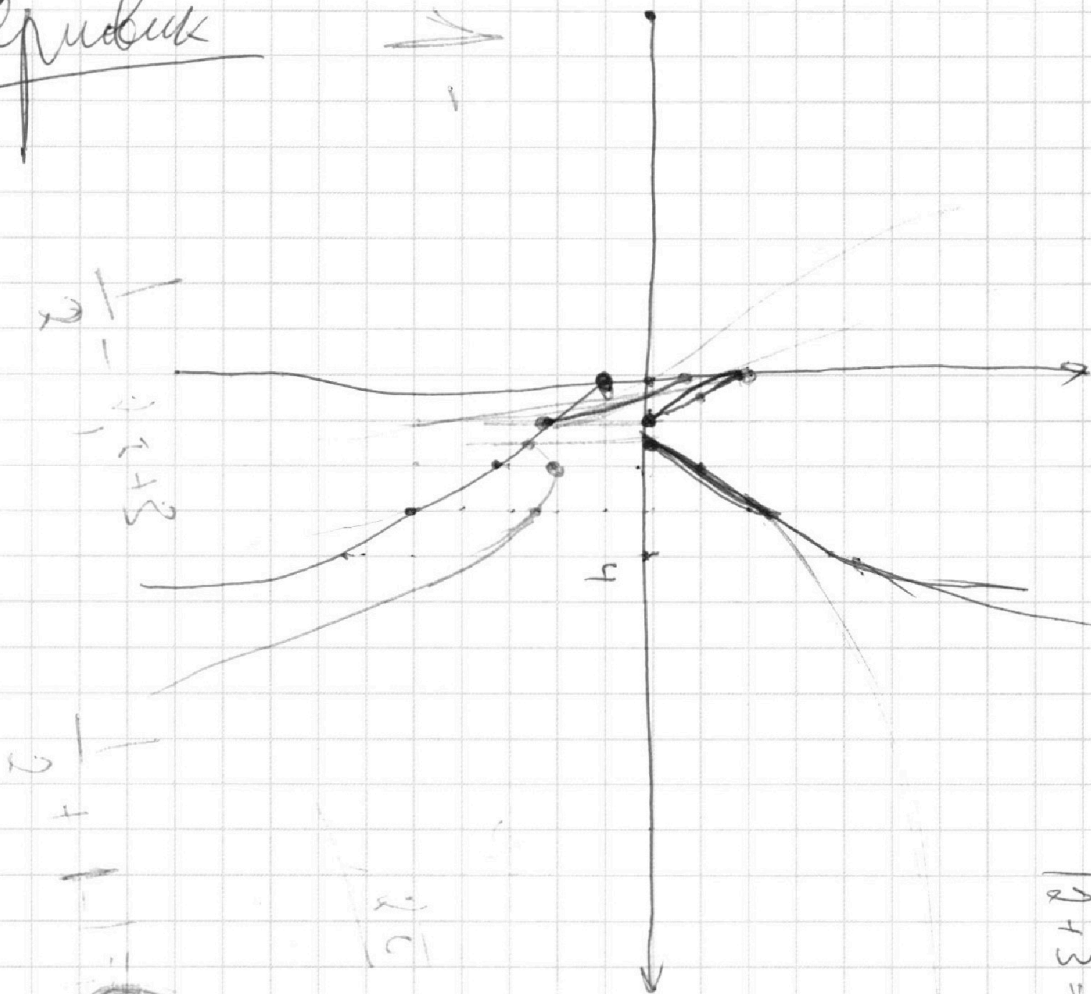
Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Черновик



$$32 - 20 + 3$$
$$12 + 3 = 14$$

$$8 - 10 + 3$$

$$2 \cdot 8 - 15 + 3$$

$$18 - 15$$

2.

$$8 + 4 + 1 = 13$$

$$130 \div$$

$$18 + 6 + 1$$

$$25$$

$$32 + 8 + 1$$

$$4/$$

Handwritten notes and a circled number 13.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

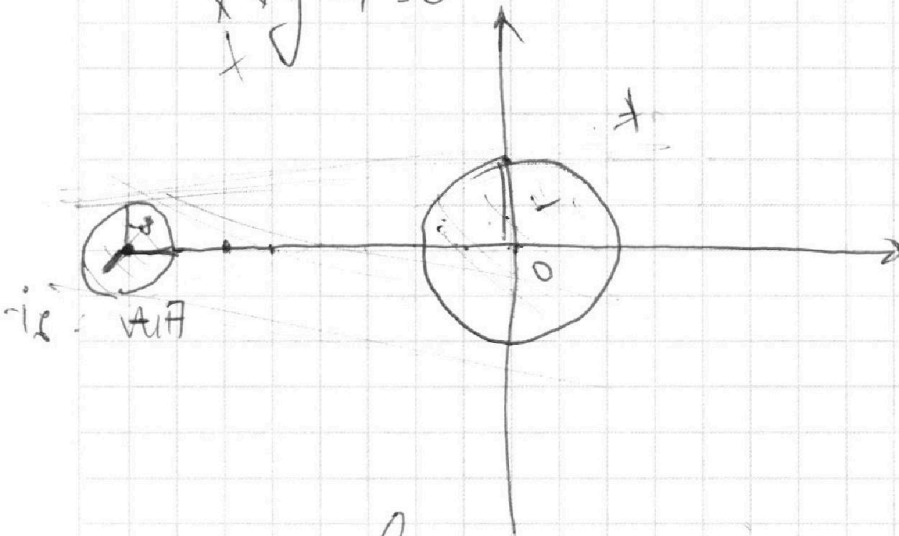
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Черновик

$$ax + by + c = 0$$

$$x^2 + y^2 - 4 = 0$$



$$y = ax + b$$

$$O(-16, 0)$$

$$0 = -16a + b, \quad b = 16a$$

$$\begin{cases} y = ax + b \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$

$$D = 32^2 \cdot a^4 - 4 \cdot (1 + a^2)$$

$$y = ax + 16a$$
$$x^2 + y^2 = 4$$

$$x^2 + a^2 x^2 + 32a^2 x + 16^2 a^2 + (ax + 16a)^2 = 4$$