



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10



- [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
- [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2 - 7ab + b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

- [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.
- [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

- [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-13; 26)$, $Q(3; 26)$ и $R(16; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$.
- [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

- [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 5 и 2,5.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input checked="" type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№1. Пусть k - степень вхождения простого числа 2 в d ,

1- степень вхождения двойки в b , s - в c . Тогда степень

вхождения 2 в $ab = (k+1)$, в $bc = (l+s)$, в $dc = (k+s)$.

$$ab : 2^{15} \Rightarrow k+1 \geq 15 \quad (1)$$

$$bc : 2^{17} \Rightarrow l+s \geq 17 \quad (2)$$

$$dc : 2^{23} \Rightarrow k+s \geq 23 \quad (3)$$

$$(1) + (2) + (3): 2(k+l+s) \geq 55$$

$$k+l+s \geq 27.5.$$

Но $k \in \mathbb{Z}, l \in \mathbb{Z}, s \in \mathbb{Z}$, так как числа a, b, c - натуральные.

Значит, $k+l+s$ - целое $\Rightarrow k+l+s \geq 28 \Rightarrow abc : 2^{28}$.

Пусть d - степень вхождения простого числа 7 в d , e - в b ,

f - в c . Тогда степени вхождения 7 в $ab = (l+e)$, в $bc =$

$= (e+f)$, в $dc = (d+f)$.

$$\cancel{ab : 7^{11}} \Rightarrow ac : 7^{39} \Rightarrow d+f \geq 39 \Rightarrow \cancel{d+f} \geq 39, \text{ так как}$$

$\forall k \in \mathbb{N}$ или $k=0$ - степень вхождения простого в натуральное

число. Значит, $abc : 7^{39}$.

Числ $abc : 2^{28}$, $abc : 7^{39}$. Числа 2^{28} и 7^{39} взаимно

просты, поэтому $abc : 2^{28} \cdot 7^{39} \Rightarrow abc \geq 2^{28} \cdot 7^{39}$, так как $abc \in \mathbb{N}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№1. Вторая часть.

Найдите правильное значение чисел a, b, c с данным произведением:

$$a = 2^{10+11} \cdot 7^5 ; \quad b = 2^5 ; \quad c = 2^{13} \cdot 7^{28}$$

$$abc = 2^{10+5+11} \cdot 7^{5+28} ; \quad : 2^{15} \cdot 7^{11}$$

$$bc = 2^{5+13} \cdot 7^{28} ; \quad : 2^{17} \cdot 7^{18}$$

$$ac = 2^{10+13} \cdot 7^{11+28} ; \quad : 2^{23} \cdot 7^{39}$$

$$abc = 2^{10+5+13} \cdot 7^{11+28} = 2^{28} \cdot 7^{39}$$

Ответ: наименьшее возможное значение произведения
 abc равно $2^{28} \cdot 7^{39}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№2. Так как числитель и знаменатель дроби можно
сократить на m , то $(a+b) : m$, $(a^2 - 7ab + b^2) : m$.

$$(a+b) : m \Rightarrow \cancel{a^2 + 2ab + b^2} = (a+b)^2 : m$$

$$(a^2 + 2ab + b^2) : m, (a^2 - 7ab + b^2) : m \Rightarrow (a^2 + 2ab + b^2) - (a^2 - 7ab + b^2) = \\ = 9ab : m$$

Предположим, что a и m не взаимно просты, то
есть существует простое число p такое, что

$$a : p, m : p. (a+b) : m, m : p \Rightarrow (a+b) : p.$$

$$(a+b) : p, a : p \Rightarrow b : p.$$

Но это противоречит условию, так как по условию
дробь $\frac{a+b}{a^2 - 7ab + b^2}$ не сократима, а мы получили, что $a : p, b : p$.

Значит $\text{НОД}(a; m) = 1$. Аналогично $\text{НОД}(b; m) = 1$.

$9ab : m$, $\text{НОД}(a; m) = 1$, $\text{НОД}(b; m) = 1 \Rightarrow 9 : m \Rightarrow m \leq 9$.

На $m=9$ есть пример: $a=1 \in N$, $b=8 \in N$.

$$\frac{a+b}{a^2 - 7ab + b^2} = \frac{1+8}{1+64-56} = \frac{9}{9} = \frac{1}{1}. \text{ Больше, чем } \frac{8}{9} \text{ на } 9 \text{ числитель}$$

и знаменатель дроби

сократить нельзя, так как в числите записана 9.

Ответ: наибольшее m , на которое можно сократить числитель и знаменатель дроби, равно 9.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

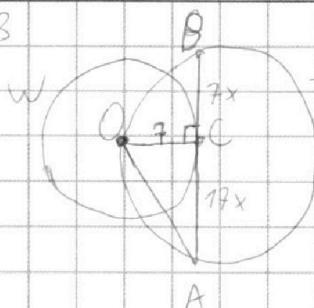
- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№3



Пусть O -центр W .

Пусть $AC = 17x$, тогда $BC = 7x$,
так как $\frac{AC}{BC} = \frac{17}{7}$.

$OC \perp AB$ как радиус, проведённый в
точку касания. $OC = 7$ -радиус W .

$\sin \angle OAC = \frac{OC}{OA}$ из прямоугольного $\triangle OAC$

По теореме Пифагора для прямоугольного $\triangle OAC$

$OA = \sqrt{7^2 + 289x^2}$, для прямоугольного $\triangle OCB$ $OB = \sqrt{49 + 49x^2}$

$$\sin \angle OAC = \frac{7}{\sqrt{7^2 + 289x^2}}$$

По обобщённой теореме синусов для $\triangle OAB$ $\frac{OB}{\sin \angle OAC} = 2R =$

$= 26$, так как радиус \triangle равен R .

$$\text{так как } 26 = \frac{OB}{\sin \angle OAC} = \frac{\sqrt{49 + 49x^2}}{7} = \frac{\sqrt{49 + 289x^2}}{7}$$

$$7 \cdot 2 \cdot 13 = \sqrt{49 + 49x^2} \cdot \sqrt{49 + 289x^2}$$

$$7^2 \cdot 2^2 \cdot 13^2 = 7^2 \cdot 7^2 + 7^2(49 + 289)x^2 + 7^2 \cdot 17^2 x^4 \mid : 7^2 > 0,$$

$$17^2 x^4 + 2 \cdot 13^2 x^2 + 49 - 4 \cdot 13^2 = 0.$$

Пусть $x^2 = t \Rightarrow t \geq 0$.

$$17^2 t^2 + 2 \cdot 13^2 t + 49 - 4 \cdot 13^2 = 0$$

Пойдём, что $t \neq 1$ является корнем:



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

5

6

7

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№3, Вторая часть

$$289 + 338 + 49 - 338 \cdot 2 = 289 + 49 - 338 = 0$$

Также t_2 - вторая корень (возможно, совпадающей с первой).

$$\text{По теореме Виета } t_1, t_2 = \frac{49 - 4 \cdot 13^2}{172} < 0.$$

t_2

Но $t_2 > 0$, так как квадрат числа неотрицателен ($t=x^2$).

Значит, $x^2 = 1 \Rightarrow |x| = 1$. Но $x > 0$, так как 17x-функция
отрезка. Значит, $x = 1$.

$$AB = AC + CB = 24x = 24.$$

$C \in [AB]$, так как по условию задачи окружности M
касаются края AB , а не её продолжение.

Рисунком, приведенным в начале решения, я также
не пользовалась.

$$\text{Ответ: } AB = 24.$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№4. Докажите, что $x = \frac{1}{9}$ является корнем:

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = \sqrt{\frac{3 - 54 + 81}{81}} - \sqrt{\frac{3 + 27 + 81}{81}} = \sqrt{\frac{117}{81}} - \sqrt{\frac{111}{81}} = 0$$

$1 - 9x = 0 \quad 1 - 9 \cdot \frac{1}{9} = 0$. Далее считаем, что $x \neq \frac{1}{9}$.

$$(\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1}) = 1 - 9x \mid \cdot (\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1}).$$

Докажем, что то, на что мы делимся, не равно 0.

~~✓~~ Корень числа неотрицателен, поэтому сумма двух корней равна 0, только если каждая корень равна 0.

То есть в случае, когда $3x^2 - 6x + 2 = 0 = 3x^2 + 3x + 1$

$$1 = 9x \Rightarrow x = \frac{1}{9}, \text{ но}$$

$x = \frac{1}{9}$ мы больше не рассматриваем. Итак, можем делить на сумму корней.

$$(\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1})(\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1}) = (1 - 9x)(\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1})$$

$$3x^2 - 6x + 2 - 3x^2 - 3x - 1 = (1 - 9x)(\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1}) \mid : (1 - 9x) \neq 0,$$

$$\text{т.к. } x \neq \frac{1}{9}$$

$$1 - \sqrt{3x^2 - 6x + 2} = \sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$1 - \sqrt{3x^2 - 6x + 2} = \sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$x + 3x^2 - 6x + 2 - 2\sqrt{3x^2 - 6x + 2} = 3x^2 + 3x + 1$$

$$2 - 9x = 2\sqrt{3x^2 - 6x + 2}$$

$$81x^2 - 36x + 4 = 72x^2 - 24x + 8$$

$$69x^2 - 12x - 4 = 0$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ.



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 4, Вторая часть

$$D = 12^2 + 16 \cdot 69 = 144 + 16 \cdot 60 + 144 = 960 + 288 = 1000 + 248 = \\ = 1248 = 4 \cdot 312 = 4 \cdot 4 \cdot 78$$

$$x_1 = \frac{12 - 4\sqrt{78}}{2 \cdot 69}$$

$$x_2 = \frac{12 + 4\sqrt{78}}{2 \cdot 69}$$

$$x_1 = \frac{6 - 2\sqrt{78}}{69}$$

$$x_2 = \frac{6 + 2\sqrt{78}}{69}$$

~~$3x^2 - 6x + 2 \geq 0 \wedge 3x^2 + 3x + 1 \geq 0$, т.к. решают под знаком радикала.~~

$$3x^2 - 6x + 2 \geq 0$$

$$D = 36 + 4 \cdot 6 = 60$$

$$x \in (-\infty, \frac{6 - \sqrt{60}}{6}] \cup [\frac{6 + \sqrt{60}}{6}, +\infty)$$

Проверив $x_2 > x_1$,

$$\begin{aligned} & 3 \cdot \left(\frac{6 - 2\sqrt{78}}{69} \right)^2 - 6 \left(\frac{6 - 2\sqrt{78}}{69} \right) + 2 + \sqrt{3 \left(\frac{6 - 2\sqrt{78}}{69} \right)^2 + 3 \left(\frac{6 - 2\sqrt{78}}{69} \right) + 1} = \\ & = \frac{1}{23} \left(\frac{36 + 4 \cdot 78 - 24\sqrt{78}}{3} - (6 - 2\sqrt{78}) \cdot 23 + 2 \cdot 23^2 \right) + \sqrt{\frac{36 - 24\sqrt{78} + 4 \cdot 78}{3} + 23(6 - 2\sqrt{78}) \cdot 23} = \\ & = \frac{1}{23} \left(12 + 104 - 8\sqrt{78} + 23(46 - 12) + 92\sqrt{78} \right) + \sqrt{12 + 104 - 8\sqrt{78} + 23 \cdot 23 - 46\sqrt{78}} = \\ & = \end{aligned}$$

Теперь проверим эти корни, ведь в процессе решения мог совершить небольшое промах. x_1 и x_2 корни уравнения

$$(2 - 9x)^2 = (2\sqrt{3x^2 - 6x + 2})^2. Из этого следует равенство$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ.



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№4, первое решение.

$$2-9x = 2\sqrt{3x^2+3x+1} \text{ если } 2-9x \geq 0 \text{ и } 3x^2+3x+1 \geq 0.$$

Заметим, что второе уравнение вспомогательного решения:

$$3x^2+3x+1 = 0,75x^2 + 2,25x^2 + 3x + 1 = 0,75x^2 + (1,5x + 1)^2 \geq 0.$$

$$2-9x_1 = 2 - 9 \cdot \frac{6-2\sqrt{78}}{69} = \frac{138-54+18\sqrt{78}}{69} = \frac{18\sqrt{78}+84}{69} > 0 \text{ верно}$$

$$2-9x_2 = 2 - 9 \cdot \frac{6+2\sqrt{78}}{69} = \frac{138-54-18\sqrt{78}}{69} = \frac{84-18\sqrt{78}}{69} \leq \frac{84-18 \cdot 5}{69} < 0$$

так как $\sqrt{78} > \sqrt{25} = 5$.

Так, для $x = x_1$ из равенства $69x^2 - 12x - 4 = 0$ получим

$9x-2=2\sqrt{3x^2-6x+2}$, а для корней исходного
уравнения верно $2-9x=2\sqrt{3x^2-6x+2}$. При этом $2-9x \neq 9x-2$,

так как $x = \frac{6+2\sqrt{78}}{69} \neq \frac{2}{9}$.

А для $x = x_1$ верно $2-9x = 2\sqrt{3x^2+3x+1} \Rightarrow$

\Rightarrow верно $(1-\sqrt{3x^2-6x+2})^2 = (\sqrt{3x^2+3x+1})^2$. Из этого получим

вспомогательное равенство $1 = \sqrt{3x^2-6x+2} + \sqrt{3x^2+3x+1}$, если

$3x^2-6x+2 \geq 0$ (чтобы ноги корней) и $\sqrt{3x^2-6x+2} \leq 1$.

$$\text{II} \quad 0 \leq 3x^2-6x+2 \leq 1.$$

$$3x^2-6x+1 \leq 0 \leq 3x^2-6x+2$$

$$3x^2-6x+1 \leq 0$$

$$\Delta = 36-12=24$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 4, семестр 1, часть

$x \in \left[\frac{6-2\sqrt{6}}{6}; \frac{6+2\sqrt{6}}{6} \right]$, так как ветви параболы направлены вверх (м.к. $3 > 0$)

$$x \in \left[1 - \frac{\sqrt{6}}{3}; 1 + \frac{\sqrt{6}}{3} \right].$$

Проверим $x = x_1$ на принадлежность этому промежутку

$$\frac{6-2\sqrt{78}}{69} < \frac{6-2\cdot 5}{69} < 0, \text{ м.к. } \sqrt{78} > \sqrt{25} = 5.$$

А для $x \in \left[1 - \frac{\sqrt{6}}{3}; 1 + \frac{\sqrt{6}}{3} \right]$ верно $x \geq 1 - \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{\sqrt{9}-\sqrt{6}}{3} > 0$.

Противоречие. Значит, для $x = x_1$ из равенства

$$(1 - \sqrt{3x^2 - 6x + 2})^2 = (\sqrt{3x^2 + 3x + 1})^2 \text{ следуют}$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - 1 = \sqrt{3x^2 + 3x + 1}, \text{ если } 3x_1^2 - 6x_1 + 2 \geq 0 \text{ (иначе корень не подходит сразу)}$$

но $\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - 1 = -\sqrt{3x^2 + 3x + 1}$ для корней исходного
равенства. Значит, это может быть верно, только
если $\sqrt{3x^2 + 3x + 1} = -\sqrt{3x^2 + 3x + 1}$, т.е. если $3x^2 + 3x + 1 = 0$.

$$\Delta = 9 - 4 \cdot 3 < 0 \Rightarrow$$

у этого уравнения корней нет.

Значит, для $x = x_1$, для $x = x_2$ нет общих корней исходного
уравнения.

Ответ: $x = \frac{1}{3}$ — единственный корень.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№6. Уравнение $x^2 + y^2 - 1 = 0$ задаёт окружность с центром $(0; 0)$ и радиусом 1. Уравнение $x^2 + (y - 12)^2 = 16$ задаёт окружность с центром $(0; 12)$ и радиусом 4. Если точка находится вне обеих окружностей, то для её координат верно $x^2 + y^2 - 1 > 0, (x^2 + (y - 12)^2 - 16) > 0 \Rightarrow$
 \Rightarrow для неё не верно второе условие системы. Если точка лежит на одной из окружностей, то соответствующее уравнение обнуляется, и для неё верно второе условие кра-
веного неравенства $\&$ Так как окружности не пересекаются
(расстояние между центрами $12 > 5 = 4 + 1$ — сумма ради-
усов), то точка, лежащая вне обеих окружностей,
лежит вне другой \Rightarrow одно из уравнений $x^2 + y^2 - 1$
и $x^2 + (y - 12)^2 - 16$ при подстановке её координат
будет определяемым, а другое — нондизаемым.
Значит, второму условию системы
 $(x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0$ удовлетворят точки
внешней окружности и на них.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

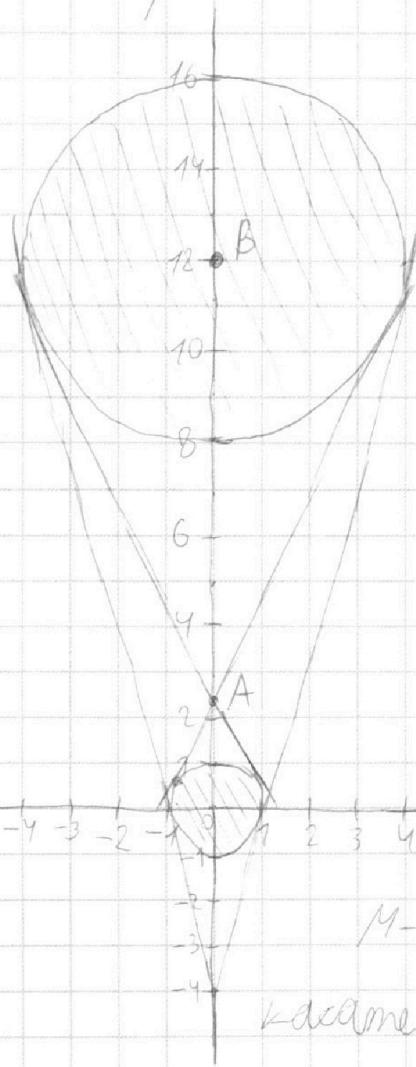
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$ax+by-8b=0$ задаёт прямую. Т.к. уравнение задаёт
эту прямую должна пересекать эти два круга
в двух точках. Если она пересекает один из кругов
в двух точках, то она пересекает его по хорде,
то есть сечения имеют больше двух решений. Значит,
прямая пересекает каждый из кругов ровно в одной
точке \Rightarrow прямая касается & обоих окружностей.



Сначала найдём уравнение прямой касающей обеих внутренних
касательных. Они пересекают
обе окружности в точке $B(0; 2)$,
так как делают отрезок, содержащий центр, в отношении
радиусов $\frac{2}{12} = \frac{1}{6}$.

$$y = -0.1x + 8 \Rightarrow 8B = 24 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b = 0.3$$

x График $A(0; 2)$, $B(0; 12)$,

M- точка касания обеих внутренних

касательных с окружностью

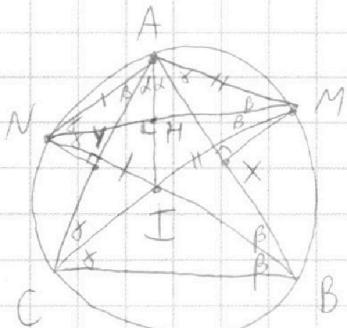


- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

✓7.



М-св. дуги X -середина AB , Y -середина AC .

$MX \perp AB$ (срединной перпендикуляр к отрезку AB), аналоично $NY \perp AC$.

Значит, $r(M; AB) = MX = 5$, $r(N; AC) = NY = 2,5$.

Также $\angle BAC = 2\alpha$, $\angle ABC = 2\beta$, $\angle ACB = 2\gamma$. M -середина дуги $AB \Rightarrow$

$\Rightarrow CM$ -биссектриса $\angle ACB \Rightarrow \angle ACM = \angle BCM = \gamma$.

N -середина дуги $AC \Rightarrow BN$ -биссектриса $\angle ABC \Rightarrow \angle ABN = \angle CBM = \beta$.

Кроме того $I = BN \cap CM$ - центр вписанной в $\triangle ABC$ окружности, $\Rightarrow \angle CAI = \angle BAI = \alpha$.

$\angle NAC = \angle NBC = \beta$, т.к. опираются на одну и ту же дугу.

Аналично, $\angle NMC = \angle NMA = \beta$, $\angle MAB = \angle MNB = \angle ANM = \gamma$.

По лемме о треугольнике $AN = AI$, $AM = MI \Rightarrow NM \perp AI$ (срединной перпендикуляр к отрезку AI). Значит, $H = AI \cap NM$ -середина AI .

Из прямоугольного $\triangle ANH$ $\sin \gamma = \sin \angle ANH = \frac{AH}{AN}$.

Из прямоугольного $\triangle AMX$ $\underline{\sin \gamma} = \sin \angle MAX = \frac{MX}{MA} = \frac{5}{AM}$. (1)

$$\frac{AH}{AN} = \frac{5}{AM} \Rightarrow AH = \frac{5 \cdot AN}{AM}.$$

Из прямоугольного $\triangle ANY$ $\underline{\sin \beta} = \sin \angle NAY = \frac{NY}{AN} = \frac{2,5}{AN}$. (2)

По теореме синусов в $\triangle ANM$ $\frac{AM}{\sin \gamma} = \frac{AN}{\sin \beta} \Rightarrow \frac{\sin \gamma}{\sin \beta} = \frac{AM}{AN}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№7, бывшее задание

$$(1):(2) \quad \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{5 \cdot AN}{AM \cdot 2,5} = \frac{2AN}{AM}$$

$$\frac{AM}{AN} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{2AN}{AM}$$

$$AM^2 = 2AN^2$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{AN}{AM}$$

$$\text{Значим, } AH = 5 \frac{AN}{AM} = \frac{5}{\sqrt{2}}; AI = 2AN = \frac{5 \cdot 2}{\sqrt{2}} = 5\sqrt{2}.$$

$$\text{Объем: } AI = 5\sqrt{2}.$$



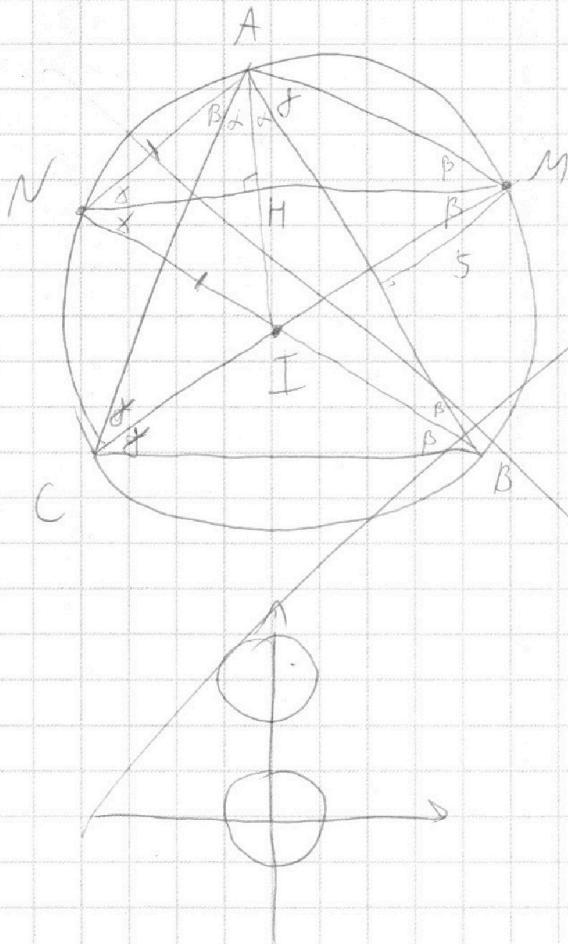
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{AH}{AN} = \sin \alpha = \frac{5}{AM}$$

$$\sin \beta = \frac{25}{AN}$$

$$\frac{AM}{AN} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{25 \cdot AM}{AM \cdot 25}$$

$$AM^2 = 2AN^2 \quad \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{AN}{AM}$$

$$AH = 5 \frac{AN}{AM} = \frac{5}{\sqrt{2}}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{array}{r} 8 \\ \times 169 \\ \hline 1521 \\ 169 \\ \hline 1014 \\ 169 \\ \hline 28561 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 88 \\ \times 29 \\ \hline 2611 \\ 578 \\ \hline 8391 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 17 \\ + 1156 \\ \hline 169 \\ \hline 1325 \end{array}$$

$$5 \cdot 265 = 25 \cdot 1153$$

$$\begin{array}{r} \cancel{\times} \\ \cancel{+} \\ \cancel{1} \\ \cancel{+} \\ \cancel{3} \\ \cancel{x} \\ \cancel{+} \\ \cancel{1} \\ \cancel{1} \\ \cancel{4} \\ \cancel{2} \\ \cancel{4} \\ \cancel{4} \\ \hline 053344 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \cancel{\times} \\ \cancel{+} \\ \cancel{9} \\ \cancel{9} \\ \cancel{8} \\ \hline 998 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ \times 956 \\ \hline 7744 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 5808 \\ 8712 \\ \hline 937024 \end{array}$$

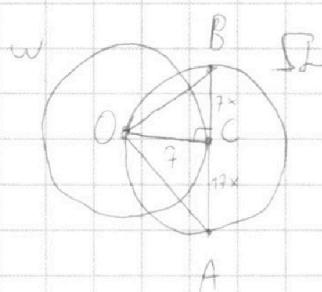
$$\begin{array}{r} 9x^2 - 2\sqrt{3x^2 + 7} = 3x^2 - 6x + 2 \\ 9x^2 = 12x^2 + 12 \\ 0 \\ \hline 956484 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4 \\ \times 976 \\ \hline 5856 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 5400 + 420 + 36 \\ 6300 + 420 + 42 \\ 8100 + 630 + 54 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} +289 \\ 49 \\ \hline 338 \end{array}$$

8-2647



$$OB = \sqrt{49 + 49x^2}$$

$$\sin \alpha = \frac{7}{\sqrt{49 + 289x^2}}$$

$$\begin{array}{r} +34 \\ 34 \\ \hline 702 \\ 7756 \\ \hline 779 \end{array}$$

$$= 26$$

$$7^2 + 2^2(7^2 + 13^2)x^2 = 2^2 \cdot 2^2 \cdot 13^2$$

$$17^2x^4 + 2 \cdot 13^2x^2 + 7^2 - 4 \cdot 13^2 = 0$$

$$13^4 - 4 \cdot 17^2 \cdot 7^2 + 17^2 \cdot 4 \cdot 13^2 =$$

$$= 13^2(169 + 1156) - 119^2 = 65^2 \cdot 53 - 119^2$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



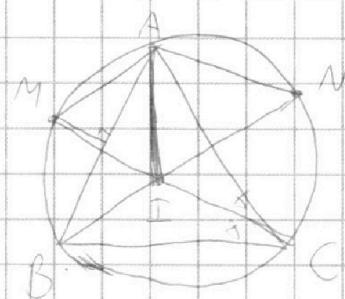
- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$3(x^2 - 2x + 1) - 4$$

$$36 + 4 \cdot 2 \cdot 3 = 36 + 24 = 60$$



$$y = 86 - 4x$$

$$AB = \frac{10}{\cos x}$$

$$\beta = \alpha - 86^\circ$$

$$AB = \frac{10 \times 2}{2 \sin \alpha \cos \beta} = \frac{20 \times 2}{2 \sin \alpha \cos \beta} = \frac{20}{\sin \alpha \cos \beta} = \frac{20}{\sin \beta \cos^2 \beta}$$

$$2,9 \frac{\sqrt{9,76}}{2,4} + \frac{1}{2,4} - 2,4 = 0$$

$$-\sqrt{9,76} + 1 - 5,76 = 0$$

$$d =$$



$$2,4 -$$

$$3($$

$$(x-1)^2 - \frac{1}{3}$$

$$3(x-1)^2 - 1$$

$$8 = 0,3$$

$$(0 \times 2,4)^2 + x^2 - 1 = 0$$

$$(0^2 + 1)x^2 - 4,8ax + 4,76 = 0.$$

$$0x + y - 2,4 =$$

$$\begin{array}{r} \times 2,4 \\ \hline 3,84 \\ \times 2,4 \\ \hline 9,12 \\ \hline 23,04 \end{array}$$

$$\frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$23,04 - 19,04(a^2 + 1) = 0$$

$$5 - 19,04a^2 = 0$$

$$\begin{array}{r} \times 4,76 \\ \hline 19,04 \end{array}$$

$$a^2 = \frac{5}{4,76}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

5

6

7

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

5

6

7

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

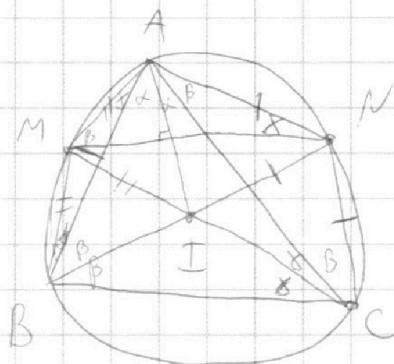
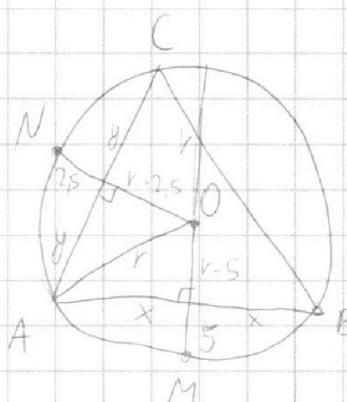
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{aligned} & \text{Diagram shows } (r-5) \cdot 5 = x^2 \\ & x^2 = 10(r-5) \\ & y^2 = 2,5(r-2,5) \end{aligned}$$

$$\frac{s}{MB} = \sin x$$

$$\begin{array}{r} 15 \\ + 12 \\ \hline 32 \\ + 23 \\ \hline 55 \end{array}$$

$$\begin{aligned} & \text{Diagram shows } 6^2 - 2\sqrt{78} \\ & 36 - 12\sqrt{78} \\ & 6^2 - 2\sqrt{60} \\ & 36 - 2\sqrt{60} \\ & 36 - 6\sqrt{10} \end{aligned}$$

$$\frac{MA}{MB} = \frac{AN}{IC} = \frac{MN}{BC}$$

$$\begin{array}{r} 0 \\ 11 \\ 28 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} d : 7 & d+e \geq 11 & \\ e : 7 & d+e \geq 17 & \\ f : 7 & d+f \geq 39 & \\ g : 7 & d+e+f \geq 34 & \end{array}$$

$$k+l+s = 28$$

$$a : 2^k$$

$$B : 2^l$$

$$k+l \geq 15$$

$$k+l+s \geq 28$$

$$l+s \geq 17$$

$$C : 2^s$$

$$k+s \geq 23$$

$$\begin{array}{c} S=13 \\ K=10 \\ T=5 \end{array}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$(a+b) = 1.$$

$$\frac{a+b}{a^2 - 7ab + b^2} = \frac{(a+b)}{(a+b)^2 - 9ab}$$

$$4 \cdot 13^2 = 289x^4 + 338x^2 + 79$$

$$289x^4 + 2 \cdot 169x^2 - 725.$$

$a+b \neq m \cdot p$

$$(a+b)^2 \neq m$$

$$9ab \neq m$$

$m \cdot p$

$a \cdot p$

$b \cdot p$

$$4 \cdot 13^4 + 4 \cdot 17^2 \cdot 5 \cdot 29$$

$$725 =$$

$$4 \cdot 169$$

$$= 5 \cdot 145 =$$

$$9 \cdot 13$$

$$+ 289$$

$$\underline{538}$$

$$\underline{627}$$

$$\times 338$$

$$\underline{2150}$$

$$\underline{749}$$

$$\underline{225}$$

$$= 5 \cdot 5 \cdot 29.$$

$$\frac{9}{16+25-835 \cdot 4} = \frac{9}{41-140} = -\frac{9}{99} = -\frac{1}{11}$$

$$\times 17$$

$$(10+7)(10+7) =$$

$$= 100 + 140 + 49$$

$$138 = 3 \cdot 46$$

$$\frac{9}{1+64-56} = \frac{9}{9}$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ 1 \\ 289 \\ + 49 \\ \hline 338 \end{array}$$

$$BO^2 = 49 + 49x^2$$

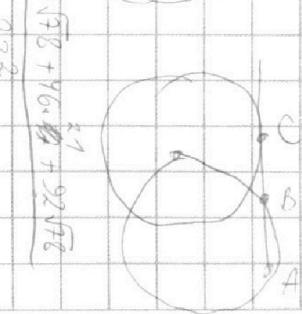
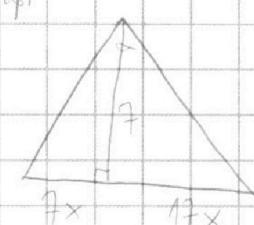
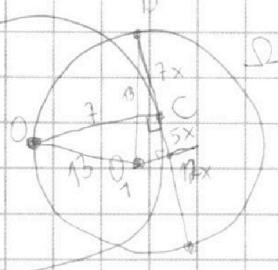
$$AO^2 = 49 + 289x^2$$

$$\frac{24x}{\sin x} = 126$$

$$\sin x = \frac{12}{13} x$$

$$7 \cdot \frac{24x}{13} = \frac{12x}{13} \cdot \sqrt{49+49x^2} \cdot \sqrt{49+289x^2}$$

$$14 \cdot 13^2 = 49 - 289x^4 + 49(49+289)x^2 + 49 \cdot 49$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{array}{r} \times 4225 \\ \hline 53 \\ \hline 12675 \\ 21125 \\ \hline 223925 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 119 \\ \hline 119 \\ 1071 \\ 119 \\ \hline 14161 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} + 10 \cdot 10 \\ - 223925 \\ \hline 14161 \\ \hline 209764 \end{array}$$

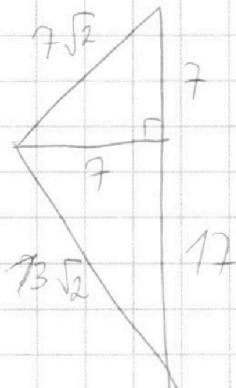
$$\begin{array}{r} \times 172 \\ \hline 172 \\ \hline 344 \\ 1204 \\ 172 \\ \hline 29584 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 462 \\ \hline 462 \\ 924 \\ \hline 2772 \\ 1848 \\ \hline 213444 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 2290 \\ \hline 1832 \\ \hline 209764 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} + 10 \cdot 10 \\ - 458 \\ \hline 169 \\ \hline 289 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} - 169 + 458 \\ \hline 289 \end{array}$$



$$\begin{array}{r} + 289 \\ 49 \\ \hline 7\sqrt{2} \\ \hline 7 \\ \hline 13\sqrt{2} \end{array} = \cancel{7\sqrt{2} \cdot 13\sqrt{2}}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Graph of a function $y = f(x)$ on a coordinate plane. The x-axis is labeled from -13 to 16. The y-axis is labeled from 0 to 26. The graph has a local minimum at $(0, 6)$ and a local maximum at $(13, 26)$.

$$\frac{3+27+81}{81} = \sqrt{\frac{111}{81}} = \frac{111}{81}$$

$$4448 + 16 \cdot 69$$

$$+ 1104$$

$$1144$$

$$7248$$

$$4 \cdot 312 =$$

$$= 4 \cdot 4 \cdot 78$$

$$- 965$$

$$- 54$$

$$111$$

$$6^2 + 4 \cdot 69$$

$$312 = 4 \cdot 78$$

$$9$$

$$- 200$$

$$Q$$

$$\frac{3}{81} - \frac{6}{9} + 2 =$$

$$\frac{3-54+162}{81} = \sqrt{\frac{111}{81}} = \sqrt{\frac{78}{16}}$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + 9x = \sqrt{3x^2 + 3x + 1} + 1$$

$$81x^2 + 3x^2 - 6x + 2 + 18x\sqrt{3x^2 - 6x + 2} = 3x^2 + 3x + 1 + 2\sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$81x^2 - 9x$$

$$x = \frac{1}{9}$$

$$(\sqrt{3x^2 + 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1})(1 - 9x) = 3x^2 - 6x + 2 - 3x^2 - 3x - 1$$

$$\sqrt{3x^2 + 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1$$

$$3x^2 + 3x + 2 = x + 3x^2 + 3x + 1 - 2\sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$9x^2 = 4(3x^2 + 3x + 1)$$

$$3x^2 + 12x + 4 = 0$$

$$744 - 48 = 96$$