



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10



1. [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^{15}7^{11}$ ,  $bc$  делится на  $2^{17}7^{18}$ ,  $ac$  делится на  $2^{23}7^{39}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
2. [4 балла] Известно, что дробь  $\frac{a}{b}$  несократима ( $a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$ ). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}.$$

При каком наибольшем  $m$  могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на  $m$ ?

3. [4 балла] Центр окружности  $\omega$  лежит на окружности  $\Omega$ , хорда  $AB$  окружности  $\Omega$  касается  $\omega$  в точке  $C$  так, что  $AC : CB = 17 : 7$ . Найдите длину  $AB$ , если известно, что радиусы  $\omega$  и  $\Omega$  равны 7 и 13 соответственно.
4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0;0)$ ,  $P(-13;26)$ ,  $Q(3;26)$  и  $R(16;0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$ .
6. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник  $ABC$  вписан в окружность. Пусть  $M$  – середина той дуги  $AB$  описанной окружности, которая не содержит точку  $C$ ;  $N$  – середина той дуги  $AC$  описанной окружности, которая не содержит точку  $B$ . Найдите расстояние от вершины  $A$  до центра окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ , если расстояния от точек  $M$  и  $N$  до сторон  $AB$  и  $AC$  соответственно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№1. Пусть  $k$  - степень вхождения простого числа 2 в  $a$ ,  
 $l$  - степень вхождения двойки в  $b$ ,  $s$  - в  $c$ . То есть  $a : 2^k$ ,  
но  $a : 2^{k+1}$ ,  $b : 2^l$ ,  $b : 2^{l+1}$ ,  $c : 2^s$ ,  $c : 2^{s+1}$ . Тогда степени  
вхождения 2 в  $ab - (k+l)$ , в  $bc - (l+s)$ , в  $ac - (k+s)$

$$ab : 2^{15} \Rightarrow k+l \geq 15 \quad (1)$$

$$bc : 2^{17} \Rightarrow l+s \geq 17 \quad (2)$$

$$ac : 2^{23} \Rightarrow k+s \geq 23 \quad (3)$$

$$(1) + (2) + (3): 2(k+l+s) \geq 55$$

$$k+l+s \geq 27,5.$$

По  $k \in \mathbb{Z}, l \in \mathbb{Z}, s \in \mathbb{Z}$ , так как числа  $a, b, c$  - натуральные.

Значит,  $k+l+s$  - целое  $\Rightarrow k+l+s \geq 28 \Rightarrow abc : 2^{28}$ .

Пусть  $d$  - степень вхождения простого числа 7 в  $a$ ,  $e$  - в  $b$ ,  
 $f$  - в  $c$ . Тогда степень вхождения 7 в  $ab - (d+e)$ , в  $bc -$   
 $(e+f)$ , в  $ac - (d+f)$ .

$$ab : 7^{21} \Rightarrow ac : 7^{39} \Rightarrow d+f \geq 39 \Rightarrow d+e+f \geq 39, \text{ так как}$$

$e \in \mathbb{N}$  или  $e = 0$  - степень вхождения простого в натуральные  
числа. Значит,  $abc : 7^{39}$ .

Итак,  $abc : 2^{28}$ ,  $abc : 7^{39}$ . Числа  $2^{28}$  и  $7^{39}$  взаимно  
просты, поэтому  $abc : 2^{28} \cdot 7^{39} \Rightarrow abc \geq 2^{28} \cdot 7^{39}$ , так как  $abc \in \mathbb{N}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№1, Вторая часть.

Теперь приведем примеры чисел  $a, b, c$  с данными разложе-

нием:

$$a = 2^{10} \cdot 7^{11} \quad b = 2^5 \quad c = 2^{13} \cdot 7^{28}$$

$$ab = 2^{10+5} \cdot 7^{11} = 2^{15} \cdot 7^{11}$$

$$bc = 2^{5+13} \cdot 7^{28} = 2^{18} \cdot 7^{28}$$

$$ac = 2^{10+13} \cdot 7^{11+28} = 2^{23} \cdot 7^{39}$$

$$abc = 2^{10+5+13} \cdot 7^{11+28} = 2^{28} \cdot 7^{39}$$

Ответ: наименьшее возможное значение произведения  
 $abc$  равно  $2^{28} \cdot 7^{39}$ .

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№2. Так как числитель и знаменатель дроби можно  
сократить на  $m$ , то  $(a+b) \div m$ ,  $(a^2 - 7ab + b^2) \div m$ .

$$(a+b) \div m \Rightarrow a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2 \div m$$

$$(a^2 + 2ab + b^2) \div m, (a^2 - 7ab + b^2) \div m \Rightarrow (a^2 + 2ab + b^2) - (a^2 - 7ab + b^2) =$$
$$= 9ab \div m$$

Предположим, что  $a$  и  $m$  не взаимно просты, то  
есть существует простое число  $p$  такое, что  
 $a \div p$ ,  $m \div p$ .  $(a+b) \div m$ ,  $m \div p \Rightarrow (a+b) \div p$ .

$$(a+b) \div p, a \div p \Rightarrow b \div p.$$

Но это противоречит условию, так как по условию  
дробь  $\frac{a}{b}$  несократима, а мы получили, что  $a \div p$ ,  $b \div p$ .

Значит  $\text{НОД}(a; m) = 1$ . Аналогично  $\text{НОД}(b; m) = 1$ .

$$9ab \div m, \text{НОД}(a; m) = 1, \text{НОД}(b; m) = 1 \Rightarrow 9 \div m \Rightarrow m \leq 9.$$

На  $m=9$  есть пример:  $a=1 \in \mathbb{N}$ ,  $b=8 \in \mathbb{N}$ .

$$\frac{a+b}{a^2 - 7ab + b^2} = \frac{1+8}{1+64-56} = \frac{9}{9} = 1. \text{ Больше, чем } \& \text{ на } 9 \text{ числитель}$$

и знаменатель дроби

сократить нельзя, так как в числителе записана 9.

Ответ: наибольшее  $m$ , на которое можно сократить числитель и знаменатель дроби, равно 9.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

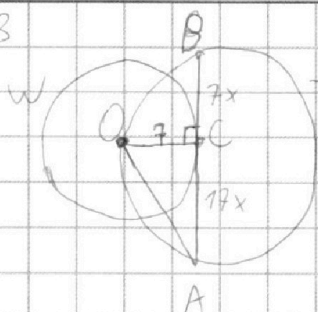
Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№3



Пусть  $O$  - центр  $\omega$ .

Пусть  $AC = 17x$ , тогда  $BC = 7x$ ,  
так как  $\frac{AC}{BC} = \frac{17}{7}$ .

$OC \perp AB$  как радиус, проведенный в

точку касания.  $OC = 7$  - радиус  $\omega$ .

$\sin \angle OAC = \frac{OC}{OA}$  из прямоугольного  $\triangle OAC$ .

По теореме Пифагора для прямоугольного  $\triangle OAC$

$OA = \sqrt{7^2 + 289x^2}$ , для прямоугольного  $\triangle OCB$   $OB = \sqrt{49 + 49x^2}$

$$\sin \angle OAC = \frac{7}{\sqrt{7^2 + 289x^2}}$$

По обобщенной теореме синусов для  $\triangle OAB$   $\frac{OB}{\sin \angle OAC} = R =$

$= 26$ , так как радиус  $\Omega$  равен 13.

$$\text{Итак, } 26 = \frac{OB}{\sin \angle OAC} = \frac{\sqrt{49 + 49x^2} \cdot \sqrt{7^2 + 289x^2}}{7}$$

$$7 \cdot 2 \cdot 13 = \sqrt{49 + 49x^2} \cdot \sqrt{49 + 289x^2}$$

$$7^2 \cdot 2^2 \cdot 13^2 = 7^2 \cdot 7^2 + 7^2(49 + 289)x^2 + 7^2 \cdot 17^2 x^4 \quad | : 7^2 > 0;$$

$$17^2 x^4 + 2 \cdot 13^2 x^2 + 49 - 4 \cdot 13^2 = 0.$$

Пусть  $x^2 = t \Rightarrow t \geq 0$ .

$$17^2 t^2 + 2 \cdot 13^2 t + 49 - 4 \cdot 13^2 = 0$$

Пойдем, что  $t = 1$  является корнем:

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№3, вторая часть

$$289 + 338 + 49 - 338 \cdot 2 = 289 + 49 - 338 = 0$$

Пусть  $t_2$  - второй корень (возможно, совпадающий с первым).

$$\text{По теореме Виета } t_1 t_2 = \frac{49 - 4 \cdot 13^2}{17^2} < 0.$$

По  $t_2 \geq 0$ , так как квадрат числа неотрицателен ( $t = x^2$ ).

Значит,  $x^2 = 1 \Rightarrow |x| = 1$ . По  $x \geq 0$ , так как  $17x$  - длина отрезка. Значит,  $x = 1$ .

$$AB = AC + CB = 24x = 24.$$

$C \in [AB]$ , так как по условию задачи окружность  $\omega$  касается хорды  $AB$ , а не ее продолжения.

Рисунком, приведенным в начале решения, я нигде не пользовалась.

Ответ:  $AB = 24$ .

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№4. Проверим, что  $x = \frac{1}{9}$  является корнем:

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = \sqrt{\frac{3 - 54 + 162}{81}} - \sqrt{\frac{3 + 27 + 81}{81}} = \sqrt{\frac{111}{81}} - \sqrt{\frac{111}{81}} = 0$$

$$1 - 9x = 1 - 9 \cdot \frac{1}{9} = 0. \text{ Далее считаем, что } x \neq \frac{1}{9}.$$

$$(\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1}) = 1 - 9x \mid \cdot (\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1}).$$

Докажем, что то, на что мы делили, не равно 0.

~~$3x$~~  Корень числа неотрицателен, поэтому сумма двух корней равна 0, только если каждый корень равен 0.

Это есть в случае, когда  $3x^2 - 6x + 2 = 0 = 3x^2 + 3x + 1$

$$1 = 9x \Rightarrow x = \frac{1}{9}, \text{ но}$$

$x = \frac{1}{9}$  мы больше не рассматриваем. Итак, мы

можем домножить на сумму корней.

$$(\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1})(\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1}) = (1 - 9x)(\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1})$$

$$\cancel{3x^2} - 6x + 2 - \cancel{3x^2} - 3x - 1 = (1 - 9x)(\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1}) \mid : (1 - 9x) \neq 0, \text{ т.к. } x \neq \frac{1}{9}$$

$$1 = \sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$1 - \sqrt{3x^2 - 6x + 2} = \sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$x + \cancel{3x^2} - 6x + 2 - 2\sqrt{3x^2 - 6x + 2} = \cancel{3x^2} + 3x + 1$$

$$2 - 9x = 2\sqrt{3x^2 - 6x + 2}$$

$$81x^2 - 36x + 4 = 12x^2 - 24x + 8$$

$$69x^2 - 12x - 4 = 0.$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи.

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№4, вторая часть

$$D = 12^2 + 16 \cdot 69 = 144 + 16 \cdot 60 + 144 = 960 + 288 = 1000 + 248 = 1248 = 4 \cdot 312 = 4 \cdot 4 \cdot 78$$

$$x_1 = \frac{12 - 4\sqrt{78}}{2 \cdot 69}$$

$$x_2 = \frac{12 + 4\sqrt{78}}{2 \cdot 69}$$

$$x_1 = \frac{6 - 2\sqrt{78}}{69}$$

$$x_2 = \frac{6 + 2\sqrt{78}}{69}$$

~~$3x^2 - 6x + 2 \geq 0$  и  $3x^2 + 3x + 1 > 0$ , т.к. квадрат под знаком радикала~~

~~$$3x^2 - 6x + 2 \geq 0$$~~

~~$$D = 36 + 4 \cdot 6 = 60$$~~

~~$$x \in (-\infty; \frac{6 - \sqrt{60}}{6}] \cup [\frac{6 + \sqrt{60}}{6}; +\infty)$$~~

~~Подставим  $x = x_1$~~

~~$$\sqrt{3 \cdot \left(\frac{6 - 2\sqrt{78}}{69}\right)^2 - 6 \cdot \left(\frac{6 - 2\sqrt{78}}{69}\right) + 2} + \sqrt{3 \cdot \left(\frac{6 - 2\sqrt{78}}{69}\right)^2 + 3 \cdot \left(\frac{6 - 2\sqrt{78}}{69}\right) + 1} =$$~~

~~$$= \frac{1}{23} \left( \frac{36 + 4 \cdot 78 - 24\sqrt{78}}{3} - 2(6 - 2\sqrt{78}) + 23 + 2 \cdot 23^2 + \sqrt{36 - 24\sqrt{78} + 4 \cdot 78} + 23(6 - 2\sqrt{78}) + 23^2 \right) =$$~~

~~$$= \frac{1}{23} (12 + 104 - 8\sqrt{78} + 23(46 - 12) + 92\sqrt{78} + \sqrt{12 + 104 - 8\sqrt{78} + 23 \cdot 29 - 46\sqrt{78}}) =$$~~

~~$$= \frac{1}{23}$$~~

Теперь проверим эти корни, ведь в процессе решения мы совершили неравносильные переходы.  $x_1$  и  $x_2$  корни уравнения

$$(2 - 9x)^2 = (2\sqrt{3x^2 - 6x + 2})^2. \text{ Из этого следует равенство}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№4, третья часть

$$2-9x = 2\sqrt{3x^2+3x+1}, \text{ если } 2-9x \geq 0 \text{ и } 3x^2+3x+1 \geq 0.$$

Заметим, что второе условие выполнено всегда:

$$3x^2+3x+1 = 0, 75x^2 + 2,25x^2 + 3x + 1 = 0, 75x^2 + (1,5x+1)^2 \geq 0.$$

$$2-9x_1 = 2 - 9 \cdot \frac{6-2\sqrt{78}}{69} = \frac{138-54+18\sqrt{78}}{69} = \frac{18\sqrt{78}+84}{69} > 0. \text{ верно}$$

$$2-9x_2 = 2 - 9 \cdot \frac{6+2\sqrt{78}}{69} = \frac{138-54-18\sqrt{78}}{69} = \frac{84-18\sqrt{78}}{69} \leq \frac{84-18 \cdot 5}{69} < 0,$$

так как  $\sqrt{78} > \sqrt{25} = 5$ .

Итак, для  $x = x_2$  из равенства  $69x^2 - 12x - 4 = 0$  следует

$$9x - 2 = 2\sqrt{3x^2 - 6x + 2}, \text{ а для корней исходного}$$

уравнения верно  $2-9x = 2\sqrt{3x^2-6x+2}$ . При этом  $2-9x \neq 9x-2$ ,

$$\text{так как } x_2 = \frac{6+2\sqrt{78}}{69} \neq \frac{2}{9}.$$

$$\text{А для } x = x_1 \text{ верно } 2-9x = 2\sqrt{3x^2-6x+2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{верно } (1-\sqrt{3x^2-6x+2})^2 = (\sqrt{3x^2+3x+1})^2. \text{ Из этого следует}$$

необходимое равенство  $1 = \sqrt{3x^2-6x+2} + \sqrt{3x^2+3x+1}$ , если

$$3x^2-6x+2 \geq 0 \text{ (стоит под корнем)} \text{ и } \sqrt{3x^2-6x+2} \leq 1.$$

$$0 \leq 3x^2-6x+2 \leq 1.$$

$$3x^2-6x+1 \leq 0 \leq 3x^2-6x+2.$$

$$3x^2-6x+1 \leq 0$$

$$D = 36 - 12 = 24$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№4, четвертая часть

$x \in \left[ \frac{6-2\sqrt{6}}{6}; \frac{6+2\sqrt{6}}{6} \right]$ , так как ветви параболы направлены  
вверх (т.к.  $3 > 0$ )

$$x \in \left[ 1 - \frac{\sqrt{6}}{3}; 1 + \frac{\sqrt{6}}{3} \right]$$

Проверим  $x = x_2$  на принадлежность этому промежутку

$$\frac{6-2\sqrt{78}}{69} < \frac{6-2 \cdot 5}{69} < 0, \text{ т.к. } \sqrt{78} > \sqrt{25} = 5.$$

А для  $x \in \left[ 1 - \frac{\sqrt{6}}{3}; 1 + \frac{\sqrt{6}}{3} \right]$  верно  $x \geq 1 - \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{\sqrt{9}-\sqrt{6}}{3} > 0$ .

Противоречие. Значит, для  $x = x_1$  из равенства

$$(1 - \sqrt{3x^2 - 6x + 2})^2 = (\sqrt{3x^2 + 3x + 1})^2 \text{ следует}$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - 1 = \sqrt{3x^2 + 3x + 1}, \text{ если } 3x_1^2 - 6x_1 + 2 \geq 0 \text{ (иначе этот}$$
  
корень не подходит сразу)

Но  $\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - 1 = -\sqrt{3x^2 + 3x + 1}$  для корней исходного  
равенства. Значит, это может быть верно, только

если  $\sqrt{3x^2 + 3x + 1} = -\sqrt{3x^2 + 3x + 1}$ , т.е. если  $3x^2 + 3x + 1 = 0$ .

$$D = 9 - 4 \cdot 3 < 0 \Rightarrow$$

у этого уравнения корней нет.

Значит, ни  $x = x_1$ , ни  $x = x_2$  не являются корнями исходного  
уравнения.

Ответ:  $x = \frac{1}{3}$  — единственный корень.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№6. Уравнение  $x^2 + y^2 - 1 = 0$  задаёт окружность с центром  $(0; 0)$  и радиусом 1. Уравнение  $x^2 + (y - 12)^2 = 16$  задаёт окружность с центром  $(0; 12)$  и радиусом 4. Если точка находится <sup>внутри</sup> вне обеих окружностей, то для её координат верно  $x^2 + y^2 - 1 > 0, (x^2 + (y - 12)^2 - 16) > 0 \Rightarrow$   
 $\Rightarrow$  для неё неверно второе условие системы. Если точка лежит на одной из окружностей, то соответствующее выражение обнуляется, и для неё верно второе неравенство системы. Так как окружности не пересекаются (расстояние между центрами  $12 > 5 = 4 + 1$  - сумма радиусов), то точка, лежащая внутри одной окружности, лежит вне другой  $\Rightarrow$  одно из выражений  $x^2 + y^2 - 1$  и  $x^2 + (y - 12)^2 - 16$  при подстановке её координат будет отрицательным, а другое - положительным. Значит, второму условию системы  $(x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0$  удовлетворяют точки внутри окружностей и на них.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

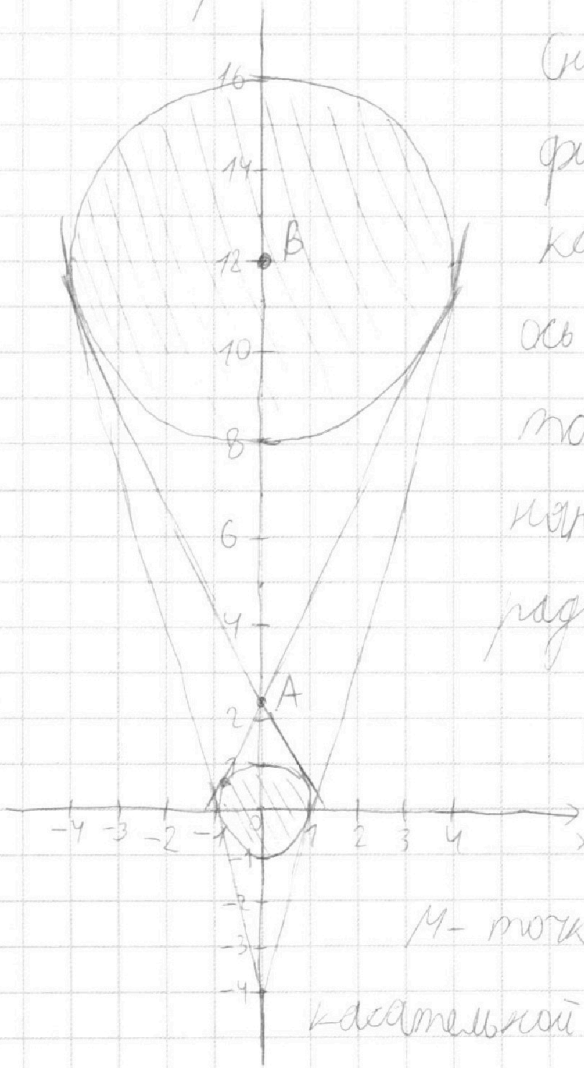
1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$ax+у-8b=0$  задает прямую. По условию заданы  
эти прямая должна пересекать эти два круга  
в двух точках. Если она пересекает один из кругов  
в двух точках, то она пересекает его по хорде,  
то есть система имеет больше двух решений. Значит,  
прямая пересекает каждый из кругов ровно в одной  
точке  $\Rightarrow$  прямая касается  $\&$  обеих окружностей.



Сначала найдем условия коэф-  
фициент обшей внутренней  
касательных. Они пересекают  
ось ординат в точке  $(0; 4)$ ,  
так как делят отрезок, соеди-  
няющий центры, в отношении  
радиусов  $\frac{2,4}{2,6} = \frac{1}{4}$ .

$$y = -ax + 8b \Rightarrow 8b = 2,4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b = 0,3$$

Пусть  $A(0; 2)$ ,  $B(0; 12)$ ,

$M$  - точка касания обшей внутренней

касательной с  $\&$  верхней  $\&$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

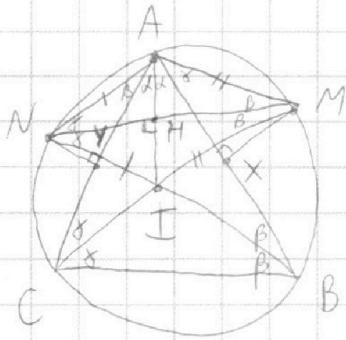
Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1     2     3     4     5     6     7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№7.



Пусть  $X$  - середина  $AB$ ,  $Y$  - середина  $AC$ .

$MX \perp AB$  (средний перпендикуляр к отрезку  $AB$ ), аналогично,  $NY \perp AC$ .

Значит,  $\rho(M; AB) = MX = 5$ ,  $\rho(N; AC) = NY = 2,5$ .

Пусть  $\angle BAC = 2\alpha$ ,  $\angle ABC = 2\beta$ ,  $\angle ACB = 2\gamma$ .  $M$  - середина дуги  $AB \Rightarrow$

$\Rightarrow CM$  - биссектриса  $\angle ACB \Rightarrow \angle ACM = \angle BCM = \gamma$ .

$N$  - середина дуги  $AC \Rightarrow BN$  - биссектриса  $\angle ABC \Rightarrow \angle ABN = \angle CBN = \beta$ .

Кроме того  $I = BN \cap CM$  - центр вписанной в  $\triangle ABC$  окружности,  $\Rightarrow \angle CAI = \angle BAI = \alpha$ .

$\angle NAC = \angle NBC = \beta$ , т.к. опираются на одну и ту же дугу.

Аналогично,  $\angle NMC = \angle NMA = \beta$ ,  $\angle MAB = \angle MNB = \angle ANM = \gamma$ .

По теореме о хордах  $AN = AI$ ,  $AM = MI \Rightarrow NM \perp AI$  (средний перпендикуляр к отрезку  $AI$ ). Значит,  $H = AI \cap NM$  - середина  $AI$ .

Из прямоугольного  $\triangle ANH$   $\sin \gamma = \sin \angle ANH = \frac{AH}{AN}$ .

Из прямоугольного  $\triangle AMX$   $\sin \gamma = \sin \angle MAX = \frac{MX}{MA} = \frac{5}{AM}$ . (1)

$$\frac{AH}{AN} = \frac{5}{AM} \Rightarrow AH = \frac{5AN}{AM}$$

Из прямоугольного  $\triangle ANY$   $\sin \beta = \sin \angle NAY = \frac{NY}{AN} = \frac{2,5}{AN}$ . (2)

По теореме синусов в  $\triangle ANM$   $\frac{AM}{\sin \gamma} = \frac{AN}{\sin \beta} \Rightarrow \frac{\sin \gamma}{\sin \beta} = \frac{AM}{AN}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№7, вписанная высота

$$(1):(2) \quad \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{5 \cdot AN}{AM \cdot 2,5} = \frac{2AN}{AM}$$

$$\frac{AM}{AN} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{2AN}{AM}$$

$$AM^2 = 2AN^2$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{AN}{AM}$$

$$\text{Значит, } AH = 5 \frac{AN}{AM} = \frac{5}{\sqrt{2}}; \quad AI = 2AN = \frac{5 \cdot 2}{\sqrt{2}} = 5\sqrt{2}.$$

$$\text{Ответ: } AI = 5\sqrt{2}.$$

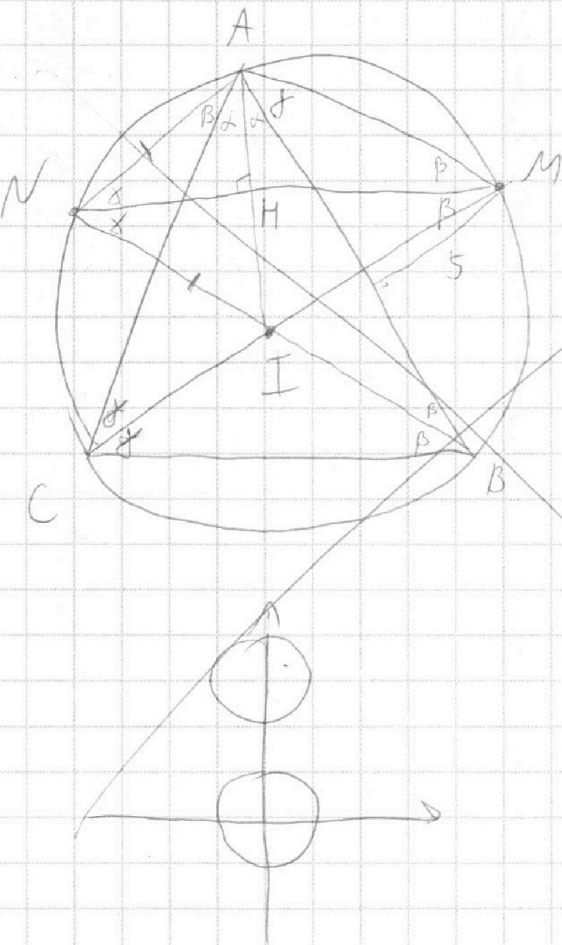
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{AH}{AN} = \sin \alpha = \frac{5}{AM}$$

$$\sin \beta = \frac{2,5}{AN}$$

$$\frac{AM}{AN} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{2,5 \cdot AN}{AM \cdot 2,5}$$

$$AM^2 = 2AN^2 \quad \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{AN}{AM}$$

$$AH = 5 \frac{AN}{AM} = \frac{5}{\sqrt{2}}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{array}{r} 8 \\ \times 169 \\ \hline 169 \\ 1521 \\ 1014 \\ \hline 169 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 82 \\ \times 289 \\ \hline 29 \\ 2611 \\ \hline 578 \\ 8391 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1156 \\ + 169 \\ \hline 1325 \end{array}$$

$$5 \cdot 265 = 25 \cdot 53$$

$$\begin{array}{r} \times 28561 \\ \hline 114214 \\ 839100 \\ \hline 053344 \end{array}$$

$$\begin{aligned} dx^2 - 20x + c \\ 40^2 - 40c = 0 \\ 40 = 2\sqrt{40^2 - 40c} \\ 2a \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} \times 968 \\ \hline 968 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 956 \\ \hline 956 \\ 5736 \\ 4780 \\ \hline 8504 \\ 903936 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 7744 \\ 5808 \\ 8712 \\ \hline 937024 \end{array}$$

$$\begin{aligned} 5400 + 420 + 36 \\ 6300 + 420 + 42 \\ 8100 + 630 + 54 \end{aligned}$$

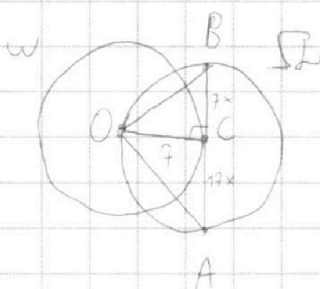
$$\begin{array}{r} \times 998 \\ \hline 998 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 978 \\ \hline 978 \\ 7824 \\ 6846 \\ \hline 8802 \\ 956484 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 976 \\ \hline 976 \\ 5856 \\ 6832 \\ 8784 \\ \hline 952576 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} +280 \\ 49 \\ \hline 338 \end{array}$$

$$\begin{aligned} 9x = 2\sqrt{13x^2 + 3x + 1} \\ 81x^2 = 4(13x^2 + 3x + 1) \\ 81x^2 = 52x^2 + 12x + 4 \end{aligned}$$



$$OB = \sqrt{49 + 169x^2}$$

$$\sin \alpha = \frac{7}{\sqrt{49 + 169x^2}}$$

$$\begin{array}{r} +34 \\ 34 \\ \hline 136 \\ +19 \\ 102 \\ \hline 1756 \\ 119 \end{array}$$

$$\sqrt{49 + 169x^2} = \sqrt{49 + 289x^2} = 26$$

$$7^2 + 7^2(17^2 + 17^2)x^2 = 2^2 \cdot 13^2$$

$$17^2x^4 + 2 \cdot 13^2x^2 + 7^2 - 4 \cdot 13^2 = 0$$

$$13^4 - 4 \cdot 17^2 \cdot 7^2 + 17^2 - 4 \cdot 13^2 =$$

$$= 13^2(169 + 1156) - 119^2 = 65^2 \cdot 53 - 119^2$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1     2     3     4     5     6     7

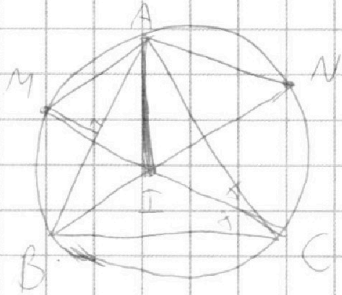


Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$3(x^2 - 2x + 1) - 1$$

$$36 + 4 \cdot 2 \cdot 3 = 36 + 24 = 60$$



$$\frac{2 \cdot 5}{AB} = \cos \alpha$$

AB

$$AB = \frac{10}{\cos \alpha}$$

$$y = ax = 88$$

$$\frac{AB}{2 \sin \alpha \cos \alpha} = \frac{10 \cdot 2}{2 \sin \alpha \cos^2 \alpha} = \frac{2 \cdot 5}{\sin \alpha \cos^2 \alpha}$$

$$\frac{6 - 2\sqrt{78}}{69} \vee \frac{6 - 2\sqrt{75}}{6}$$

$$\frac{6 - 2\sqrt{78}}{23} \vee 3 - \sqrt{75}$$

$$6 - 2\sqrt{78} \vee 63 - 23\sqrt{75}$$

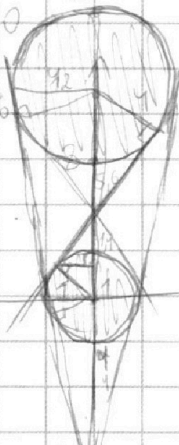
$$23\sqrt{75} \vee 63 + 2\sqrt{78}$$

$$23^2 \cdot 3 \cdot 5 \vee 3 \cdot 7^2 + 23 \cdot 3 \cdot 39 + 126\sqrt{78}$$

$$a) \frac{\sqrt{4,76}}{2,4} + \frac{1}{2,4} - 2,4 = 0$$

$$-\sqrt{4,76} + 1 - 5,76 = 0$$

d =



$$\frac{(\sqrt{4,76})^2}{2,4} = \frac{2,4 \cdot 26 - 25}{5,76} \Rightarrow \frac{1}{2,4}$$

$$98 = 3 \cdot 26$$

$$-a \frac{\sqrt{4,76}}{2,4}$$

$$625 - 49 = 576$$

2,4 =

116

$$y = \sqrt{1 - x^2}$$

$$3 \left( (x-1)^2 - \frac{1}{3} \right) - 1$$

$$3(x-1)^2 - 1$$

$$b = 0,3$$

$$(ax - 2,4)^2 + x^2 - 1 = 0$$

$$(a^2 + 1)x^2 - 4,8ax + 4,76 = 0$$

$$ax + y - 2,4 =$$

$$\frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\begin{array}{r} \times \sqrt{4,76} \\ \hline 376 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 48 \\ \hline 384 \\ \hline 192 \\ \hline 2304 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 4,76 \\ \hline 19,04 \end{array}$$

$$2304 - 19,04(a^2 + 1) = 0$$

$$5 - 19,04 a^2 = 0$$

$$a^2 = \frac{5}{19,04}$$



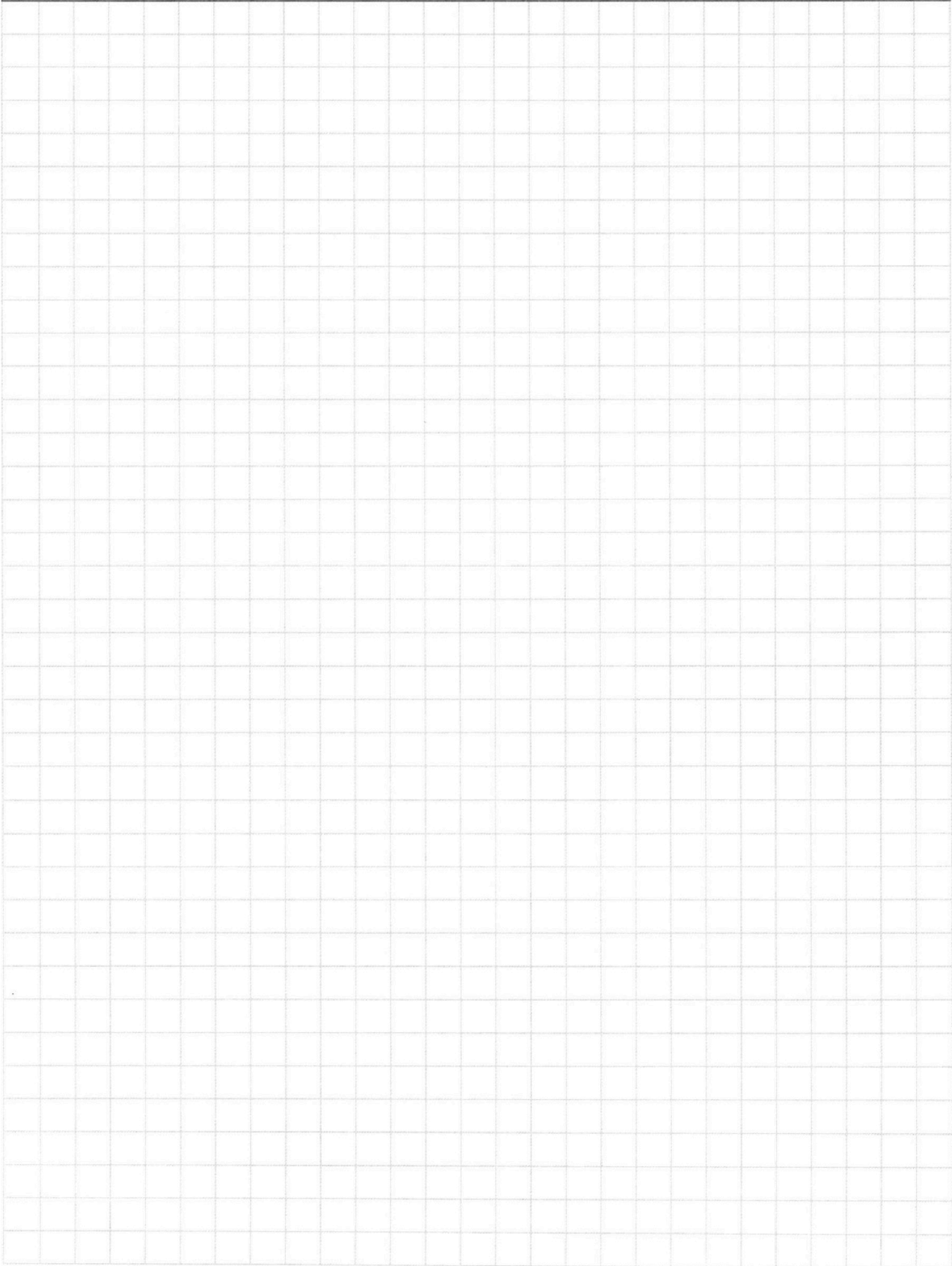
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





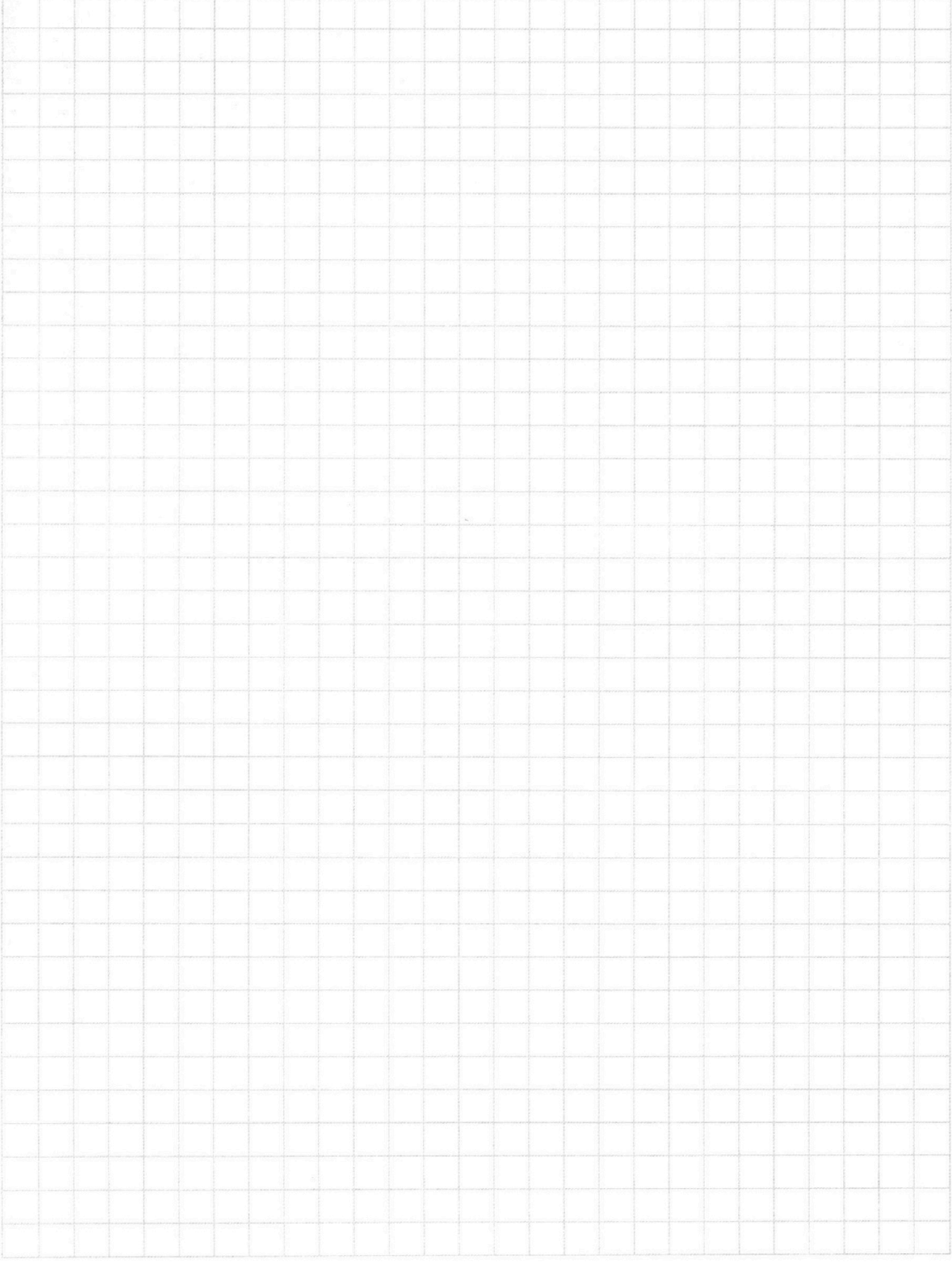
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





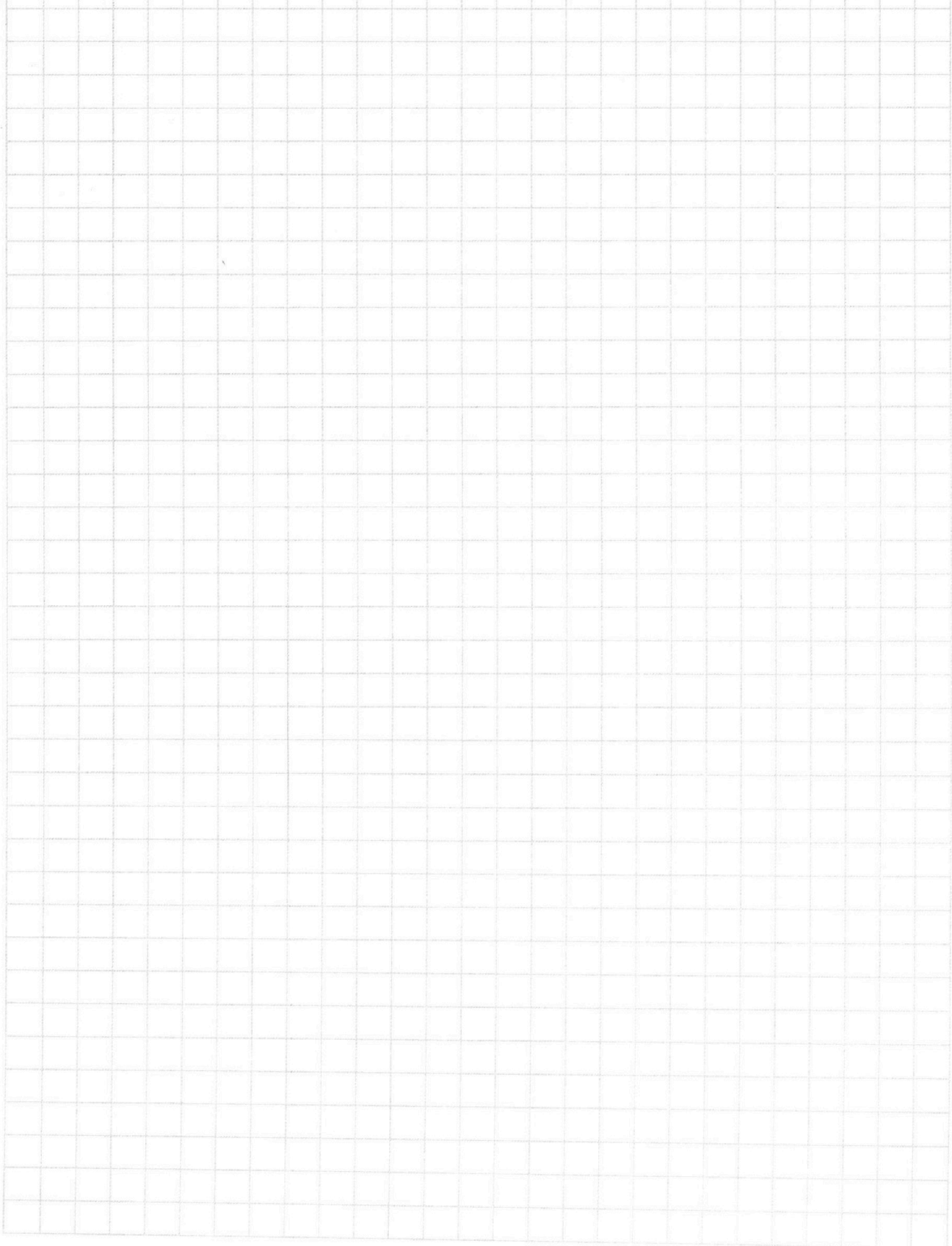
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





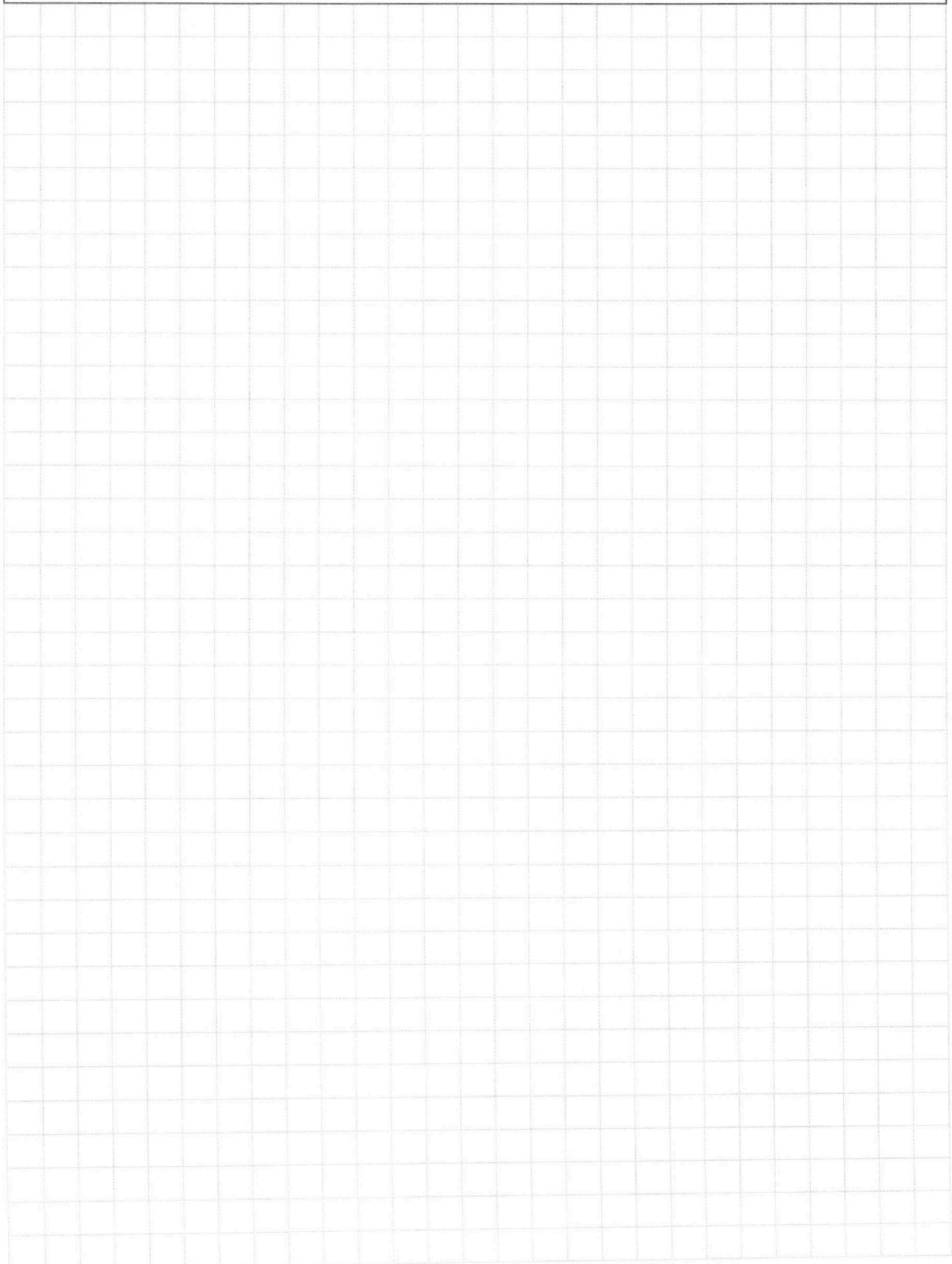
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



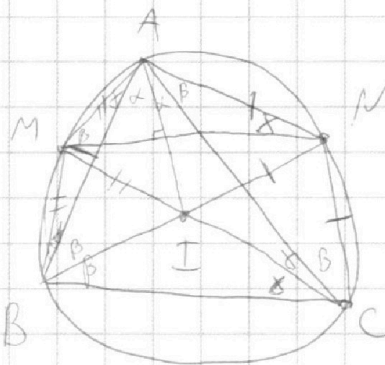
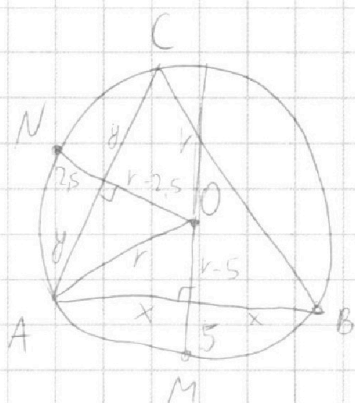
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$(r-5) \cdot 5 = x^2$   
 $x^2 = 10r - 25$   
 $y^2 = 2.5(2r - 2.5)$   
 $y^2 = 5r - 6.25$   
 $5r - 6.25 + r^2 - 5r + 6.25$   
 $r^2$   
 $36 - 12\sqrt{18} \leq 414 - 69\sqrt{60}$   
 $6 - 2\sqrt{18} \leq 6 - \sqrt{60}$   
 $36 - 12\sqrt{18} \leq 36 - 2\sqrt{60}$   
 $12\sqrt{18} \geq 2\sqrt{60}$   
 $6\sqrt{18} \geq \sqrt{60}$   
 $36 \cdot 18 \geq 60$   
 $648 \geq 60$

$\frac{5}{MB} = \sin x$   
 $\frac{MA}{BE} = \frac{AN}{IC} = \frac{MN}{BC}$   
 $d: 7$   
 $e: 7^e$   
 $f: 7^f$   
 $d+e \geq 11$   
 $e+f \geq 17$   
 $d+f \geq 39$   
 $d+e+f \geq 34$   
 $k+l+s=28$

$$\begin{array}{r} 15 \\ + 17 \\ \hline 32 \\ + 23 \\ \hline 55 \end{array}$$

$Y \frac{S_{BIC} \cdot MI \cdot IN}{BI \cdot IC \cdot MN}$   
 $k+l \geq 15$   
 $l+s \geq 17$   
 $k+s \geq 23$   
 $k+l+s \geq 28$   
 $s=13$   
 $k=10$   
 $l=5$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$(a;b) = 1$$

$$\frac{a+b}{a^2 - 2ab + b^2} = \frac{(a+b)}{(a+b)^2 - 2ab}$$

$$4 \cdot 13^2 = 289x^4 + 338x^2 + 49$$

$$289x^4 + 2 \cdot 169x^2 - 725 = 0$$

$$4 \cdot 13^4 + 4 \cdot 17^2 \cdot 5 \cdot 29$$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{36}}{69}$$

$$x^2 = \frac{36 \pm 12\sqrt{36}}{69^2}$$

$$348 - 12\sqrt{36} - 6 \cdot 23(6 - 2\sqrt{36}) + 6 \cdot 23^2 = 348 - 12\sqrt{36} - 138(6 - 2\sqrt{36}) + 92 \cdot 23 = 116 - 4\sqrt{36} + 96\sqrt{36} + 92\sqrt{36}$$

$$a+b \equiv m \pmod{p}$$

$$(a+b)^2 \equiv m^2 \pmod{p}$$

$$2ab \equiv m^2 - (a+b)^2 \pmod{p}$$

$$a \equiv p$$

$$b \equiv p$$

$$9 \equiv m$$

$$+ 289$$

$$338$$

$$627$$

$$2 \cdot 169$$

$$4 \cdot 169$$

$$\times 338$$

$$7326$$

$$7326$$

$$49$$

$$725$$

$$725 =$$

$$= 5 \cdot 145 =$$

$$= 5 \cdot 5 \cdot 29$$

$$\frac{9}{16+25-2 \cdot 35 \cdot 4} = \frac{9}{41-140} = -\frac{9}{99} = -\frac{1}{11}$$

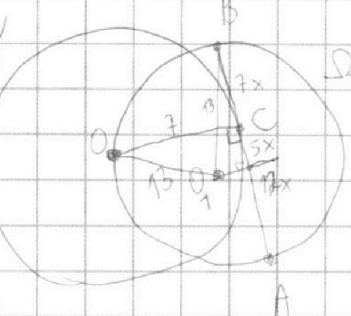
$$a=1, b=8$$

$$\frac{9}{1+64-56} = \frac{9}{9}$$

$$(10+7)(10+7) = 100 + 140 + 49$$

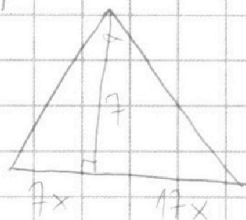
$$\begin{array}{r} 17 \\ \times 17 \\ \hline 119 \\ 119 \\ \hline 289 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 31 \\ + 289 \\ \hline 320 \end{array}$$



$$BO^2 = 49 + 49x^2$$

$$AO = 49 + 289x^2$$



$$\frac{24x}{\sin \alpha} = 26$$

$$\sin \alpha = \frac{12x}{13}$$

$$7 \cdot 24x = 26 \cdot \frac{12x}{13} \cdot \sqrt{49 + 49x^2} \cdot \sqrt{49 + 289x^2}$$

$$14 \cdot 13^2 = 49 - 289x^4 + 49(49 + 289x^2) + 49 \cdot 49$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{array}{r} \times 4225 \\ 53 \\ \hline 12675 \\ 21125 \\ \hline 223925 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 119 \\ 119 \\ \hline 1071 \\ 119 \\ \hline 14161 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \cdot 10 \cdot 10 \\ 223925 \\ - 14161 \\ \hline 209764 \end{array}$$

$$\times \frac{478}{47}$$

$$\begin{array}{r} \times 458 \\ 458 \\ \hline 3664 \end{array}$$

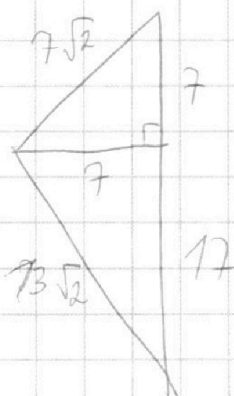
$$\begin{array}{r} \times 172 \\ 172 \\ \hline 344 \\ 1204 \\ 172 \\ \hline 29584 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 462 \\ 462 \\ \hline 924 \\ + 2772 \\ \hline 1848 \\ 213444 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2290 \\ 1832 \\ \hline 209764 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \cdot 10 \cdot 10 \\ 458 \\ - 169 \\ \hline 289 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} - 169 + 458 \\ \hline 289 \end{array}$$



$$\frac{\sqrt{289}}{49} = \frac{7\sqrt{2}}{13\sqrt{2}}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1     2     3     4     5     6     7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Handwritten solution on grid paper:

Graphs of functions are shown. One graph has a root at  $(0,0)$  and another at  $(26,0)$ . A triangle is drawn with vertices at  $(0,0)$ ,  $(13,0)$ , and  $(0,13)$ . Calculations include  $240 + 13 = 253$ ,  $36 + 33 = 69$ ,  $6^2 + 4 \cdot 69 = 312$ , and  $312 = 4 \cdot 78$ .

Arithmetic:  $144 + 16 \cdot 69 = 144 + 1104 = 1248$ . Division:  $1248 / 16 = 78$ .

Equation:  $\sqrt{\frac{3+27+81}{81}} = \sqrt{\frac{111}{81}} = \sqrt{\frac{111}{81}}$ . Another calculation:  $4 \cdot 312 = 1248$ ,  $1248 / 4 = 312$ .

Another graph shows a triangle with vertices at  $(-13,0)$ ,  $(0,0)$ , and  $(0,16)$ . Calculations:  $312 = 4 \cdot 78$ ,  $\sqrt{\frac{3-54+162}{81}} = \sqrt{\frac{111}{81}}$ .

Equation:  $\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + 9x = \sqrt{3x^2 + 3x + 1} + 1$ . Squaring both sides:  $81x^2 + 3x^2 - 6x + 2 + 18x\sqrt{3x^2 - 6x + 2} = 3x^2 + 3x + 1 + 2\sqrt{3x^2 + 3x + 1}$ .

Result:  $81x^2 - 9x$ . Solution:  $x = \frac{1}{9}$ .

Final steps:  $(\sqrt{3x^2 + 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1})(1 - 9x) = 3x^2 - 6x + 2 - 3x^2 - 3x - 1$ . Simplification:  $\sqrt{3x^2 + 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1$ . Squaring:  $3x^2 + 6x + 2 = 1 - 2\sqrt{3x^2 + 3x + 1} + 3x^2 + 3x + 1$ . Result:  $9x^2 = 4(3x^2 + 3x + 1)$ . Equation:  $3x^2 + 12x + 4 = 0$ . Discriminant:  $144 - 48 = 96$ .