



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ



10 КЛАСС. Вариант 10

- [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
- [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2 - 7ab + b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

- [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.

- [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

- [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-13; 26)$, $Q(3; 26)$ и $R(16; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$.

- [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

- [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 5 и 2,5.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$n=1$

$$abc : ac \Leftrightarrow abc : 7^{39} \text{ (нужно } ac : 7^{39})$$

$$(abc)^2 = ab \cdot bc \cdot ac : (2^{15} \cdot 7^{11} \cdot 2^{17} \cdot 7^{18} \cdot 2^{23} \cdot 7^{39}) \Leftrightarrow$$

$$(abc)^2 : 2^{55}, \text{ тогда } abc : 2^{28} \text{ (чтобы } abc$$

$$: 2^k (k \leq 27), \text{ и } (abc)^2 : 2^{2k}, (abc)^2 \nmid 2^{2k+1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (abc)^2 \nmid 2^{55}).$$

$$\text{Значит, } abc : 2^{28} 2^{39} \Rightarrow abc \geq 2^{28} \cdot 7^{39}.$$

Считаем пример, когда $abc = 2^{28} 7^{39}$:

$$a = 7^{11} \cdot 2^{11}, b = 2^5, c = 7^{28} \cdot 2^{12}$$

$$\text{Ответ: } 2^{28} \cdot 7^{39}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N^o 2

$$\frac{a+b}{(a^2 - 7ab + b^2)}$$

— Если дробь сократима на $m > 1$,

то $(a+b) \vdots m$, $(a^2 - 7ab + b^2) \vdots m$, и $a \vdots m$, $b \nmid m$

(если $a \equiv b \equiv 0 \pmod{m}$, то при $m > 1$ возникает противоречие).

Если только одно из чисел $a, b \vdots m$, то их
сумма $\not\vdash m$.

$$a^2 - 7ab + b^2 = (a+b)^2 - 9ab \vdash m, (a+b)^2 \vdash (a+b) \vdash m,$$

то есть $-9ab \vdash m \Leftrightarrow 9ab \vdash m$. Тогда $9 \vdash m$,

и $m \leq 9$. Следовательно, при $m=9$:

~~$a=4, b=5, a+b=9, a^2 - 7ab + b^2 = -99$~~

оба числа сокращаются на $m=3$.

Однако, при $m=3$,

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 3

Дано

ω, r ,

$AB, C \in AB$,

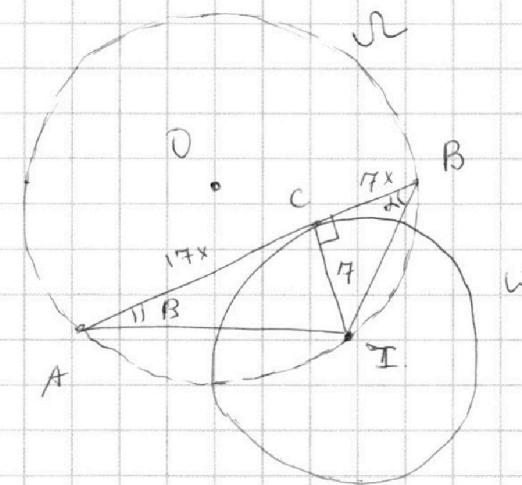
$AC : CB = 17 : 2$.

$R_w = 7, R_n = 13$

Найти:

AB

Решение



Сумма O -углов $17x$, I — центр w , $x = \angle AIB$, $\beta = \angle BAI$.

$IC \perp AB$, т.к. w касается AB в точке C . Тогда

$$AB = 24x \Rightarrow AC = 17x, BC = 7x.$$

$$\sin \alpha = \frac{CI}{BI} = \frac{CI}{\sqrt{CI^2 + BC^2}} = \frac{7}{\sqrt{7^2 + (7x)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

$$\sin \beta = \frac{CI}{AI} = \frac{CI}{\sqrt{CI^2 + AC^2}} = \frac{7}{\sqrt{7^2 + (17x)^2}} =$$

$$= \frac{7}{\sqrt{49 + 289x^2}}.$$

По теореме синусов в $\triangle AIB$ $2R_{\omega} = \frac{AI}{\sin \alpha} =$

$$= \left(\frac{CI}{\sin \beta} \right) \cdot \frac{1}{\sin \alpha} = \frac{7}{\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}} \cdot \frac{7}{\sqrt{49 + 289x^2}} = \sqrt{(x^2 + 1)(289x^2 + 49)}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача $4R_n^2 = 9 \cdot 169 = 676 = (x^2 + 1)(289x^2 + 49)$

$$289x^4 + 338x^2 - 627 = 0$$
$$x^2 = \frac{-338 + \sqrt{338^2 + 4 \cdot 627 \cdot 289}}{289 \cdot 2} = \frac{\sqrt{209765}}{289}$$

$$= \frac{2\sqrt{52441} - 169}{289} = 1$$

~~$$AB = 29\sqrt{x^2} = 24$$~~
$$\text{Ошибки: } AB = 29\sqrt{\frac{2\sqrt{52441} - 169}{289}}$$

~~Быстро~~

$$AB = 24\sqrt{x^2} = 24.$$

Ошибка: $AB = 24$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

5

6

7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$x_1 = \frac{12 + \sqrt{(-12)^2 + 4 \cdot 4 \cdot 69}}{69 \cdot 2} = \frac{12 + 4\sqrt{78}}{69 \cdot 2} = \frac{6 + 2\sqrt{78}}{69} - \text{удовлетворяет ОДЗ.}$$

$$x_2 = \frac{6 - 2\sqrt{78}}{69} - \text{удовлетворяет ОДЗ}$$

$$\text{Ответ: } x = \left\{ \frac{6 - 2\sqrt{78}}{69}, \frac{1}{9}, \frac{6 + 2\sqrt{78}}{69} \right\}$$

На одной странице можно оформлять **ТОЛЬКО** одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

OP3.

$$\left\{ \begin{array}{l} 3x^2 - 6x + 2 \geq 0 \\ 3x^2 + 3x + 1 \geq 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow x \in \left(-\infty; \frac{3-\sqrt{3}}{3} \right] \cup \left[\frac{3+\sqrt{3}}{3}; +\infty \right]$$

Система $u^2 = 3x^2 - 6x + 2$, $t^2 =$

Система $u = \sqrt{3x^2 - 6x + 2}$, $t = \sqrt{3x^2 + 3x + 1}$.

Значит $u^2 - t^2 = 1 - 9x$. Значит, что нужно решить

уравнение $u - t = u^2 - t^2$.

$$(u-t)(u+t+1) = 0$$

$$1) u - t = 0 \Rightarrow u = t$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} = \sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$3x^2 - 6x + 2 = 3x^2 + 3x + 1$$

$$x = \frac{1}{9} \quad - \text{записываем QDZ}$$

$$2) u + t - 1 = 0 \Rightarrow u + t = 1$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 \\ \sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x \end{array} \right. /+$$

$$2\sqrt{3x^2 - 6x + 2} = 2 - 9x$$

$$4(3x^2 - 6x + 2) = 81x^2 - 36x + 4$$

$$69x^2 - 12x - 4 = 0$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

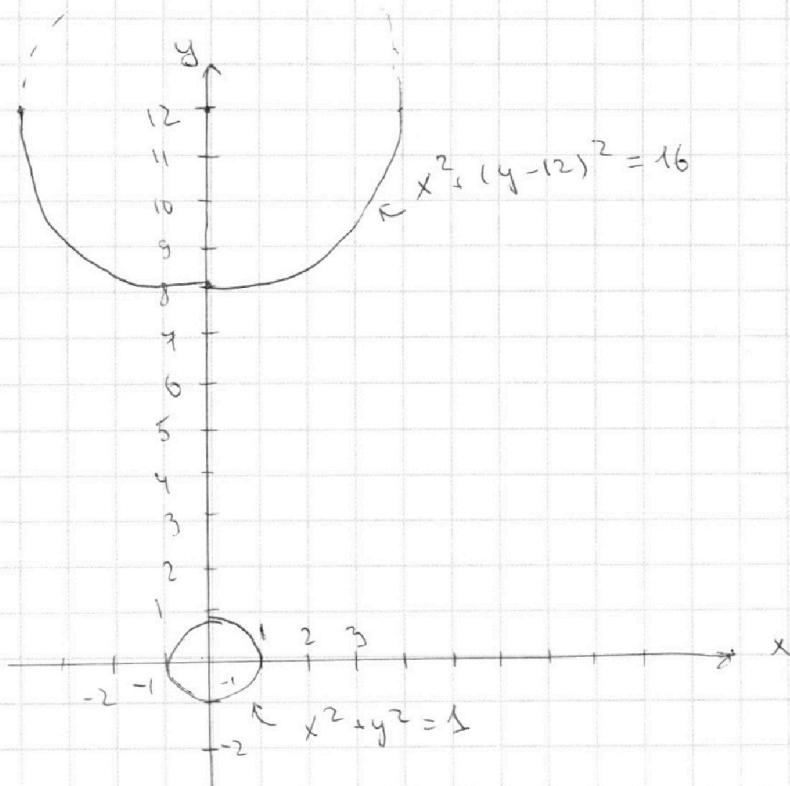
N-6

$$\begin{cases} ax + y - 86 = 0 \\ (x^2 + y^2 - 1) (x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

$$(x^2 + y^2 - 1) (x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0$$

$$x^2 + y^2 - 1 = 0 \quad \text{и} \quad x^2 + (y - 12)^2 - 16 = 0 \quad -$$

Уравнения окружностей с радиусами 1 и 4 и
центрами $(0; 0)$ и $(0; 12)$ соответственно





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~~Найдите угловой коэффициент a, при которых~~

Блик $(x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0$,
то точка $(x; y)$ лежит ~~на~~ внутри ~~или на~~
из данных окружностей, или на них.

Если прямая $y = -ax + 8b$ проходит через какую-
то окружность, то не касается её, то линия будет
иметь 2 решения, так как точек внутри окружности,
лежащих на прямой, будет бесконечно много.

Значит, ~~что~~ $y = -ax + 8b$ должна лишь касаться
окружности. А так как решений ровно две, то
 $y = -ax + 8b$ касается обеих окружностей.

$$\left. \begin{array}{l} x_1^2 + (-ax + 8b)^2 - 1 = 0 \\ x_2^2 + (-ax + 8b - 12)^2 - 16 = 0 \end{array} \right\}$$

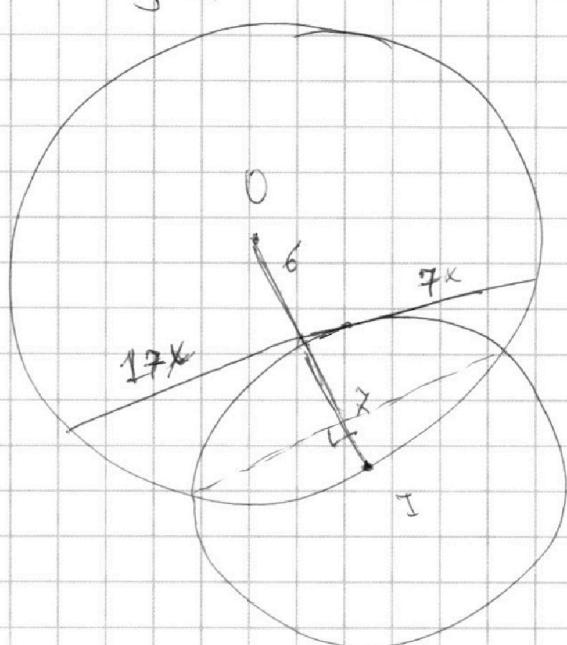
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$16 \times 25 = r_{O_1}^2 = 4x - r_{O_1}^2 = 3x$$

$$3(x-1)^2 - 1 = 0$$

$$(x-3)^2/3$$

$$\omega + 1 = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$+ \frac{\sqrt{3}}{3} + 1 = \frac{3-\sqrt{3}}{3}$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} \geq 2 \sqrt{(3x^2 - 6x + 2) + 3x^2 + 3x + 1}$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1$$

$$3(x - \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4} = 1 \quad . \quad |x + \frac{1}{2}| \geq \frac{1}{2}$$

$$|x + \frac{1}{2}| \leq \frac{1}{4} \quad x + \frac{1}{2} \geq \frac{\sqrt{3}}{3} - 1 - \frac{1}{2} \geq 0$$

$$x + \frac{1}{2} \leq 1.5 - \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{9-2\sqrt{3}}{6}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

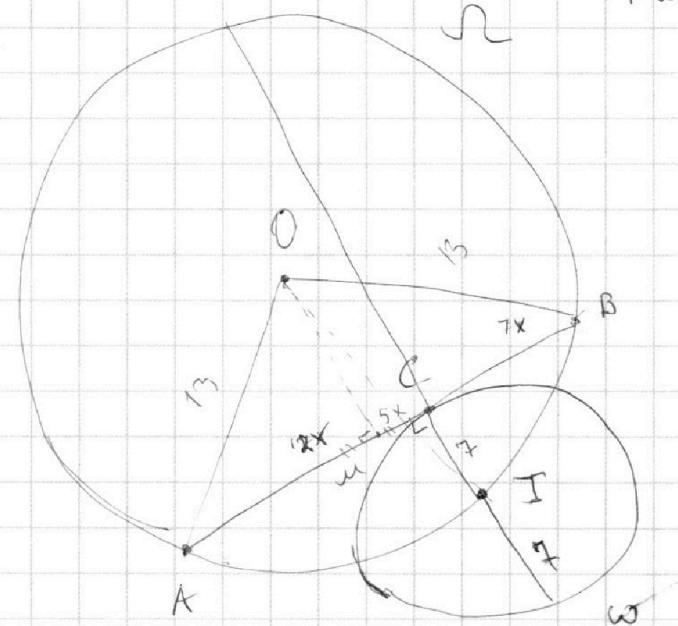
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

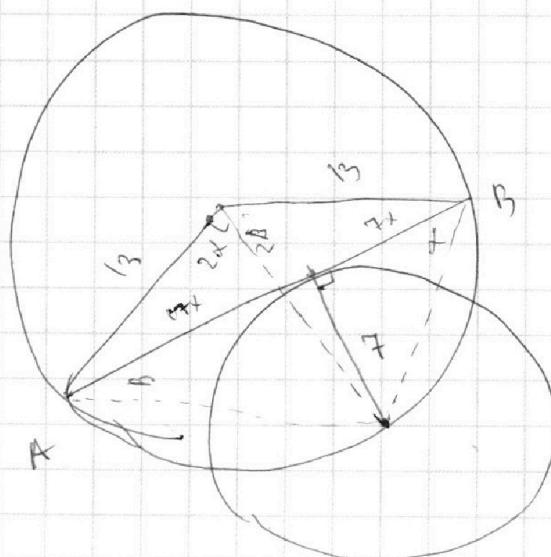


$$R_0 = R = AB$$

$$R_w = r = ?$$

$$AB = 24x \quad \underline{AB} = R^2$$

$$3(x + \frac{1}{2})^2 - \frac{3}{4}r^2 = \frac{1}{4} + 3x - \frac{1}{2})^2$$



$$\begin{aligned} & R_0 = R = AB \\ & R_w = r = ? \\ & 2x = 25 \\ & x = 25/2 \end{aligned}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N-64

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

$$\cancel{3x^2 + 3x + 1} \quad 3x^2 + 3x + 1 + (1 - 9x) = 3x^2 - 6x + 2$$

$$u^2 - 3x^2 + 3x + 1, \quad t = 1 - 9x$$

$$u^2 - \sqrt{u+t} = 0$$

$$(u^2 - t)^2 = u + t$$

$$u^4 - 2u^2t + t^2 = u + t$$

$$(2-a)(x_2-x_1) = 14$$

$$y_2 - y_1 = a(x_2 - x_1)$$

$$9x^2 - 3x + 1 =$$

$$a=5$$

$$3x^2 - 6x + 2 = 3(x^2 - 2x + 1) - 1 = 3(x-1)^2 - 1$$

N-61

$$3x^2 - 6x + 2 = 0$$

$$x_1 = \frac{6 + 2\sqrt{3}}{6} = \frac{3 + \sqrt{3}}{3}$$

$$D = 36 - 8 \cdot 3 = 12$$

$$x_2 = \frac{3 - \sqrt{3}}{3}$$

* От

$$3x^2 - 3x + 1 \geq 0$$

$$D = 9 - 12 < 0$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N^o 2

$\frac{a}{b} : (a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}, \text{mod}(a, b) = 1)$

$$a+b \vdots m \\ a^2 - 7ab + b^2 \vdots m$$

$$(a+b)^2 - 9ab \vdots m$$

$$9ab \vdots m$$

или b

~~Когда~~ Если $a \vdots b$ m , то противоречие

$$m = 9, \quad a = 4, \quad b = 5$$

$$9 \vdash 9, \quad 16+25 - 7 \cdot 20 = 41 - 140 = -98 \vdash 9$$

N^o 3

$a, b, c :$

$$ab : 2^{15} \cdot 7^{11}, \quad bc : 2^{17} \cdot 7^{18}, \quad ac : 2^{23} \cdot 7^{35}$$

$$\text{abc} \Rightarrow \text{lcm}(2^{15} \cdot 7^{11}, 2^{17} \cdot 7^{18}, 2^{23} \cdot 7^{35}) = 2^{23} \cdot 7^{35}$$

$$\text{abc} : 2^{23} \cdot 7^{35}$$

$$a = 7^{11} \cdot 2^n$$

$$c = 7^{35} \cdot 2^{12}$$

$$b = 2^5,$$

$$a+b=15$$

$$a+2c=23$$

$$b+c=17$$

$$2a = 35 - 17 = 22$$

$$a-b = a = 11$$

$$(abc)^2 : \left(2^{15+17+23} \cdot 7^{11+18+35} \right) = 2^{55} \cdot 7^{68}$$

$$abc : 7^{34} \quad abc : 2^{23}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

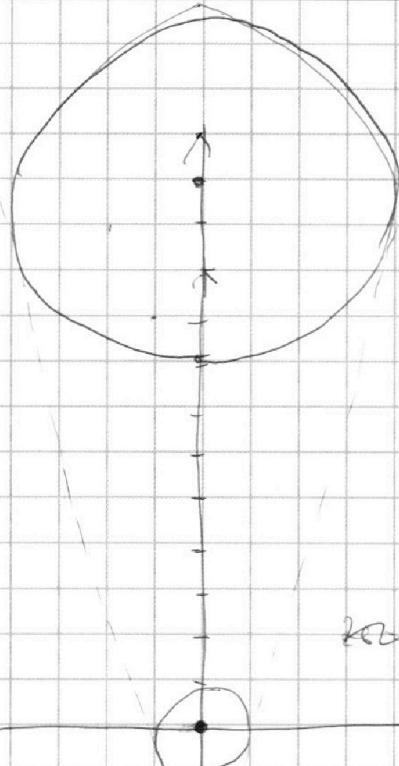
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$AB = 7 \sin \alpha$$

$$AB = 7 \sin \beta$$

$$AB = 7(\cos \beta + \cos \alpha) =$$
$$= 7 \left(\frac{\cos \beta \cdot \sin \alpha + \cos \alpha \cdot \sin \beta}{\sin \alpha \sin \beta} \right)$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{\sin \beta}{\cos \beta} \cdot \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} = \frac{17}{7} = \frac{7}{26}$$

$$\frac{\sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta} = \frac{17}{17 \cdot 26}$$

$$26 \sin 26 \sin(\alpha + \beta) = AB$$

$$\frac{7}{\sin \alpha \sin \beta} = 26 \sin \alpha$$

$$\frac{\sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta} = \frac{7}{26 \sin \alpha}$$

Если $\alpha \rightarrow 0$, то $\beta \rightarrow \pi$

$$y = -ax + b$$

$$\frac{7}{\sin \alpha} \cdot \frac{7}{\sin \alpha} = 17 \sin \alpha$$
$$26 \sin \beta$$

$$y(0) = b$$

$$\frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = \frac{26}{7}$$

$$7 = 17 \times \tan \beta = 7 \times \tan \alpha$$

$$\frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}} = \frac{17}{7} \quad \frac{\tan \beta}{\sqrt{1 - \sin^2 \beta}} \quad \tan \alpha = \frac{17}{7} + \tan \beta$$
$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{17}{7} + \frac{\sin \beta}{\cos \beta}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ.

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x - 1} = 1 - 3x$$

$$6x^2 - 3x + 3 - 8\cancel{5}x^2 + 18x - 1 = 2\sqrt{(3x^2 - 6x + 2)(3x^2 + 3x - 1)}$$

$$\cancel{82} \rightarrow -75x^2 + 15x + 2 = 2\sqrt{3} \dots$$

$$D = 225 + 8 \cdot 75 = 825 = 25 \cdot 33$$

$$x_1 = \frac{-15 + 5\sqrt{33}}{150} = \frac{\cancel{5}\sqrt{33} - 3}{30}$$
$$x_2 = \frac{\sqrt{33} + 3}{30}$$

$$t = \frac{6 - 24\sqrt{2}}{6} = \frac{3 + \sqrt{3}}{3}$$

$$3x^2 - 6x + 2 = u^2, \quad 3x^2 + 3x - 1 = t^2$$

$$u^2 - t^2 = 1 - 3x$$

$$u - t = \cancel{u^2 - t^2} \rightarrow (u - t)(u + t - 1) > 0$$

$$1) u = t$$

$$3x^2 - 6x + 2 = 3x^2 + 3x - 1, \quad 1 - 3x = 0, \quad x = \frac{1}{3}$$

$$2) u + t = 1$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x - 1} = \cancel{1} \frac{17}{18}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N°4

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2}$$

2341

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1$$

$$\begin{array}{r} 4704 | 4 \\ -4 \\ \hline 7 \\ -7 \\ \hline 0 \\ \end{array} \quad \begin{array}{r} 1176 | 4 \\ -4 \\ \hline 32 \\ -32 \\ \hline 0 \\ \end{array} \quad \begin{array}{r} 294 | 3 \\ -3 \\ \hline 26 \\ -26 \\ \hline 0 \\ \end{array}$$

$$2\sqrt{3x^2 + 6x - 2} = 2 - 3x$$

$$33^2 = 1600 - 80x -$$

$$8x^2 + 24x + 8 = 81x^2 - 36x + 4 = 1$$

98=

$$69x^2 - 60x - 112 = 0$$

$$\begin{array}{r} 68 \\ \times 68 \\ \hline 544 \\ \hline -282 \end{array}$$

$$D = 3600 + 4b \cdot 68 = 4704$$

$$60 \rightarrow \sqrt{4704}$$

$$\begin{array}{r} 408 \\ \hline 4624 \\ -4624 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 69 \\ \times 16 \\ \hline 414 \\ + 69 \\ \hline 1104 \end{array}$$

$$x_1 = \frac{30 + \sqrt{1176}}{69} = \frac{30 + \sqrt{1176}}{69} \approx 2.1$$

$$\begin{array}{r} 30+28\sqrt{2} \\ \hline 69 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 30+\sqrt{1176} \\ \hline 69 \\ -69 \\ \hline 0 \end{array} < \frac{3-\sqrt{3}}{3}$$

$$\frac{30}{69} = 1 - \frac{1}{23} \cdot \frac{13}{23} >$$

$$2\sqrt{3x^2 + 3}$$

$$2\sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 3x$$

$$\begin{array}{r} 1+28\sqrt{2} \\ \hline 69 \\ -69 \\ \hline 0 \end{array} = \sqrt{3 \cdot 23 + 28\sqrt{2}}$$

$$12x^2 + 12x + 4 = 8x^2$$

$$69x^2 - 12x - 4 = 0$$

$$D = 144 - 16 - 68 = 48 \Rightarrow$$

$$x_1 \approx 3.3 > 23\sqrt{3}$$

$$x_2 \approx 1.5 < 23\sqrt{3}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~~7x tg x = 7x tg β~~

$$17x \operatorname{tg} \beta = 7x \operatorname{tg} x, \operatorname{tg} x = \frac{17}{7} \operatorname{tg} \beta \Rightarrow \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{17}{7} \frac{\sin \beta}{\cos \beta}$$

$$\sin^2 x (1 - \sin^2 \beta) = \sin^2 \beta (1 - \sin^2 x) \cdot \frac{17^2}{7^2}$$

$$\sin^2 x - \sin^2 x \sin^2 \beta = (\sin^2 \beta - \sin^2 x \sin^2 \beta) \Rightarrow \frac{185}{49}$$

$$49 \sin^2 x - 49 \sin^2 x \sin^2 \beta = 185 \sin^2 \beta - 185 \sin^2 x \sin^2 \beta$$

$$\cancel{7x} \quad 26 \sin(x+\beta) = 289 \sin x.$$

$$\begin{array}{r} 17 \\ \times 17 \\ \hline 289 \end{array}$$

$$ON^2 = 169 - 13^2 - 12^2 \times 2 = OC^2 - 5^2 \times 2$$

$$\begin{array}{r} 289 \\ + 49 \\ \hline 338 \end{array}$$

$$AT^2 = 243 + 189 \times 2, \quad BI^2 = 49 + 49 \times 2$$

$$(x^2 + 4)(189x^2 + 49) = 838 \cdot 2 = 676 \quad 7^2 + 17^2 = 2 m^2 \quad 289 + 49 =$$

$$18x^4 + 289x^4 + 49 - 338 = 0 \quad \begin{array}{r} 338 \\ - 49 \\ \hline 289 \end{array}$$

$$289x^4 + 289 - 338 - 338x^2 - 289 = 0$$

$$22 = x^4 + \frac{338}{289} x^2 - 120$$

$$\begin{array}{r} 676 \\ - 49 \\ \hline 627 \end{array} \rightarrow 3$$

$$D = 338^2$$

$$\begin{array}{r} 23 \\ \times 169 \\ \hline 676 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 11 \\ \times 49 \\ \hline 738 \end{array}$$

$$289x^4 + 338x^2 - 676$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

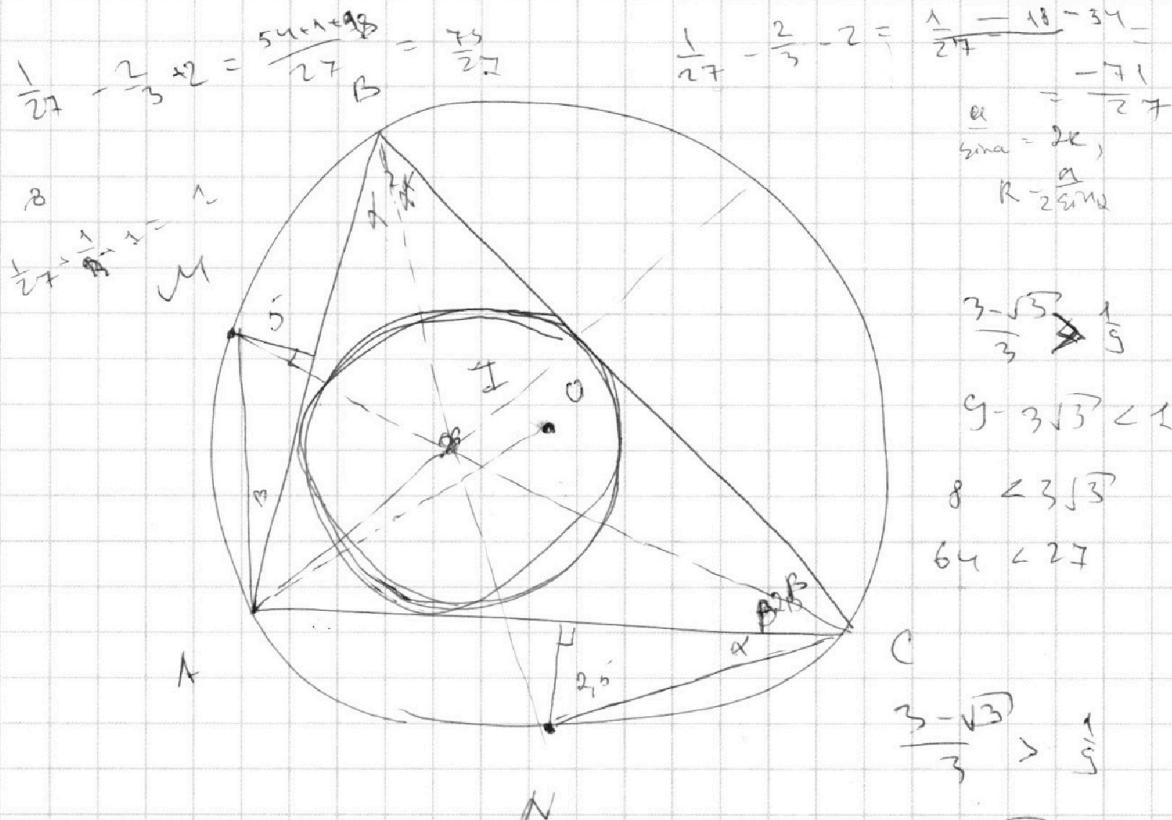
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ.



$$AC \angle NC = \frac{2\pi}{\sin \alpha}, \quad AM = \frac{5}{\sin \beta},$$

$$AO = R = \frac{NC}{2 \sin \alpha} = \frac{5}{\sin^2 \alpha} = \frac{25}{\sin^2 \beta},$$

$$\sin^2 \beta = 25 \sin^2 \alpha,$$

$$\sin \beta = \sqrt{25} \sin \alpha$$

$$\frac{3-\sqrt{3}}{3} > \frac{1}{9}$$

$$3 - 3\sqrt{3} > 1$$

$$\begin{array}{r} 63 \\ \times 63 \\ \hline 378 \\ 378 \\ \hline 3969 \end{array}$$

$$1899 + 276\sqrt{26} < 3969$$

$$\begin{array}{r} 276 \\ \times 276 \\ \hline 2070 \end{array}$$

$$1899 + 276\sqrt{26} < 3969$$

$$276\sqrt{26} < 2070$$



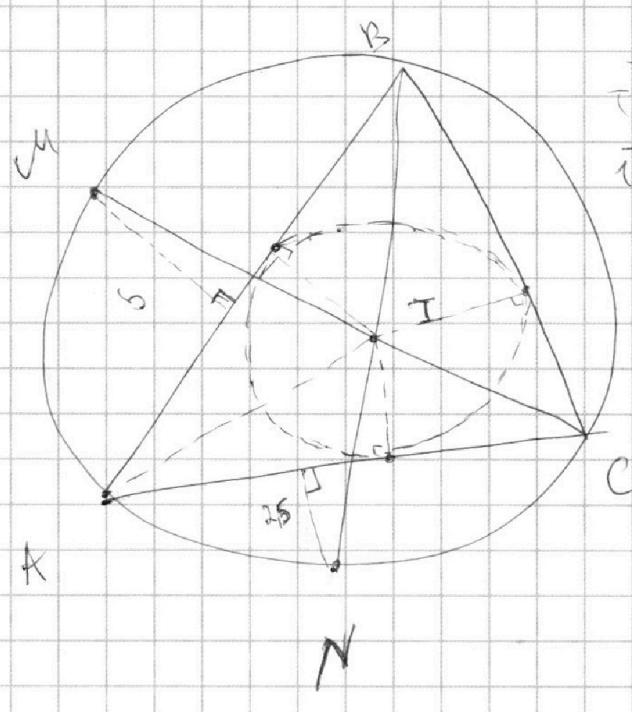
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

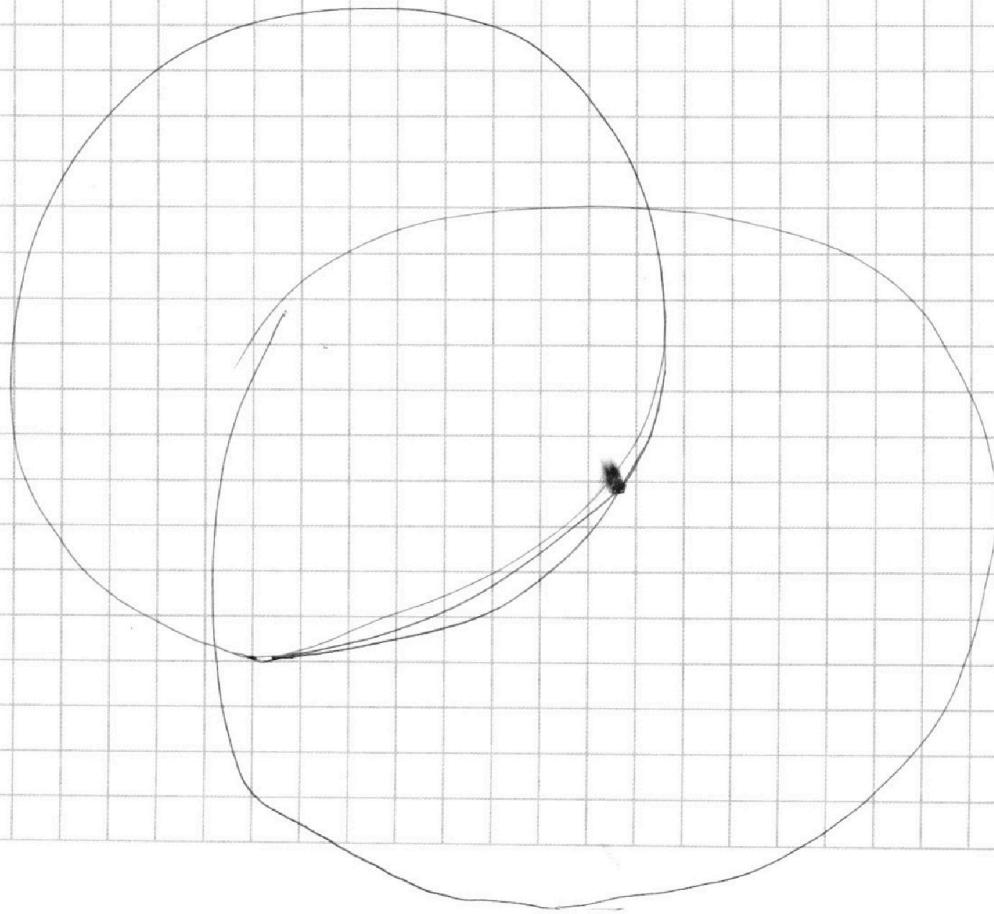
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{array}{r} \times 69 \\ 16 \\ \hline 414 \\ 69 \\ \hline 1104 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1248 \\ 112 \\ \hline 128 \end{array} \quad \begin{array}{r} 16 \\ 78 \\ \hline \end{array}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{array}{r} & 338 \\ \times & 338 \\ \hline 1 & 2704 \\ 10 & 14 \\ \hline 1014 \\ \hline 114244 \end{array}$$

$$827 \cdot 4 = 2400 + 25 \cdot 4 + 2 \cdot 4 = \\ = 2508$$

$$\begin{array}{r} & 2508 \\ \times & 289 \\ \hline 22572 \\ 20064 \\ 5016 \\ \hline 724812 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} & 2508 \\ \times & 211 \\ \hline 211 \\ + 211 \\ \hline 422 \\ \hline 724812 - 4521 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} & 724812 \\ + & 114244 \\ \hline 839056 \end{array}$$

$$211^2 = 40000 + 20000 \cdot 11 + 121 = 40040000$$

341

200

$$\begin{array}{r} 835056 \\ - 80 \\ \hline 39 \\ - 32 \\ \hline 70 \\ - 64 \\ \hline 16 \\ - 16 \\ \hline 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} 16 \\ \hline 52441 \\ - 38 \\ \hline 14 \\ - 14 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 233 \\ \times 239 \\ \hline 2151 \\ 477 \\ \hline 53121 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 52441 \\ - 38 \\ \hline 144 \\ - 133 \\ \hline 114 \\ - 114 \\ \hline 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} 19 \\ \hline 246 \\ - 246 \\ \hline 0 \end{array}$$

2151

1717

478

53121

$$\begin{array}{r} 52441 \\ - 25 \\ \hline 52416 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 52441 \\ - 422 \\ \hline 1024 \\ - 844 \\ \hline 1801 \end{array} \quad \begin{array}{r} 211 \\ \hline 249 \\ - 249 \\ \hline 0 \end{array}$$

I-

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{array}{r} 338^2 = \\ \times 338 \\ \hline 2704 \\ + 1014 \\ \hline 1014 \\ \hline 114244 \\ \times 12 \\ \hline 627 \\ \times 4 \\ \hline 2508 \end{array}$$
$$\begin{array}{r} 2508 \\ \times 289 \\ \hline 22572 \\ 20064 \\ \hline 5016 \\ + 724812 \\ \hline 114244 \\ \hline 839056 \\ \times 289 \\ \hline 289 \end{array}$$

627
x 4
—
2508

$$\sqrt{\frac{1}{1+48/49}}$$

$$\begin{array}{r} 839056 \\ - 8 \\ \hline 35 \\ - 36 \\ \hline 30 \\ - 28 \\ \hline 25 \\ - 24 \\ \hline 16 \\ | \\ 209764 \\ - 20 \\ \hline 9 \\ | \\ 52441 \\ - 49 \\ \hline 34 \\ - 28 \\ \hline 64 \\ - 64 \\ \hline 0 \\ | \\ 743 \\ - 7 \\ \hline 4 \\ | \\ 17 \\ - 17 \\ \hline 0 \\ | \\ 17 \\ - 17 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 17 \\ \times 17 \\ \hline 119 \\ + 17 \\ \hline 285 \end{array}$$

$$AI = \frac{x}{\sin \beta} \quad TI = \frac{x}{\sin \alpha} = \frac{7}{\sin \alpha \sin \beta}$$

$$\sqrt{x^2+1} \cdot \sqrt{289 \times 2 + 49} \cdot 7 = 2R$$

$$289x^2 + (t+1)(289t+49)$$

$$289t^2 + 338t + 49 = 4k^2 = 4 \cdot 169 = 338 - 2 = 676$$

$$\frac{49}{627}$$

$$289t^2 + 338t - 627.$$

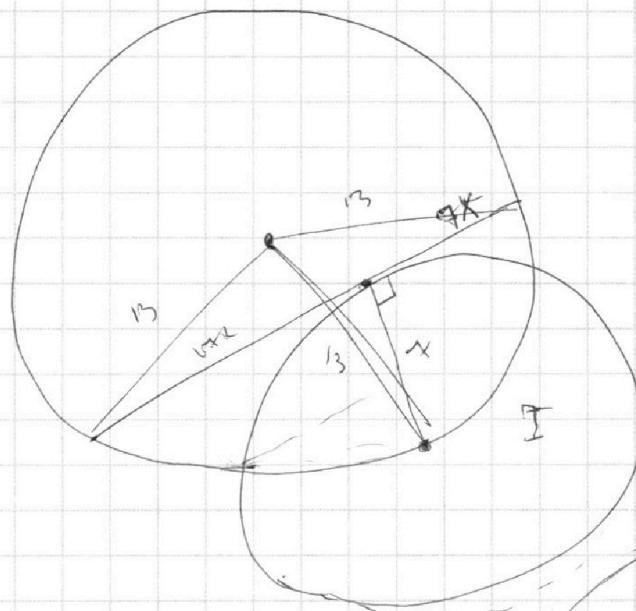
На одной странице можно оформлять **ТОЛЬКО ОДНУ** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

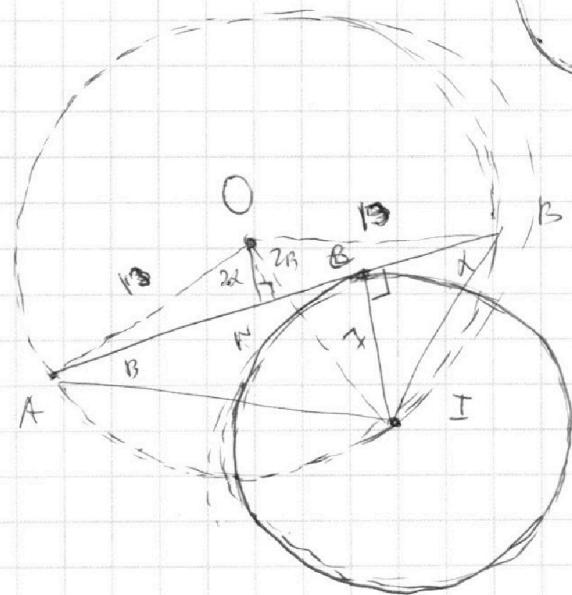
- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



БК б. 20-120



$$2R = \frac{7}{\sin \alpha} = \frac{7}{\sin \beta}$$

$$\sin \alpha = \frac{7}{4\sqrt{1+x^2}}$$

$$\sin \beta = \frac{7}{\sqrt{49+17x^2}}$$

$$\frac{7}{\sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{7}{\sqrt{49+17x^2}} = \sqrt{1+x^2} \cdot \sqrt{49+17x^2} = 2R$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

388

$$\begin{array}{r} 839056 \\ - 8 \\ \hline 39 \end{array} \quad \begin{array}{r} 4 \\ \hline 29764 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 34 \\ - 30 \\ \hline 4 \\ - 24 \\ \hline 24 \\ - 24 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 442 \xrightarrow{3} \\ - 39 \\ \hline 51 \\ - 51 \\ \hline 0 \end{array} \quad 95 \cdot 51 = 4755$$

$$\begin{array}{r} 52441 \xrightarrow{3} \\ - 52 \\ \hline 41 \\ - 41 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 28764 \\ - 28 \\ \hline 17 \\ - 16 \\ \hline 16 \\ - 16 \\ \hline 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} 4 \\ \hline 17 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 209764 \\ - 20 \\ \hline 9 \\ - 8 \\ \hline 14 \\ - 16 \\ \hline 16 \\ - 16 \\ \hline 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} 52441 \xrightarrow{17} \\ - 52441 \\ \hline 0 \end{array}$$

...
458
- 169
289

$$\begin{array}{r} 229 \\ \times 229 \\ \hline 2061 \\ 458 \\ \hline 52441 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 229 \\ \times 229 \\ \hline 2061 \\ 458 \\ \hline 52441 \end{array}$$

$$2 \cdot 229 = 458 \\ - 169 \\ 289$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~~231~~

$$\begin{array}{r} \times 231 \\ 231 \\ \hline 231 \\ + 693 \\ \hline 33361 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 524411 \\ - 44 \\ \hline 84 \\ - 77 \\ \hline 77 \\ - 66 \\ \hline 81 \end{array}$$

~~202~~

$$\begin{array}{r} \times 229 \\ 229 \\ \hline 2461 \\ 458 \\ \hline 52841 \end{array}$$

$$6 \cdot 54 + 18 \sqrt{78} < 69$$

$$144 + 16 \cdot 15$$

$$\begin{array}{r} \times 69 \\ 16 \\ \hline 414 \\ 69 \\ \hline 1104 \end{array}$$

$$\sqrt{53} \approx 6.1$$

6.

$$\begin{array}{r} 36 \\ \times 10 \\ \hline 36 \\ 36 \\ \hline 360 \end{array}$$

$$12 \cdot 48 \mid 4 = 342 \mid$$

78

$$71 \mid 2 - 39 \cdot 2$$

$$4 \sqrt{78}$$

$$\frac{12 + 4 \sqrt{78}}{69 \cdot 2} - \frac{6 + 2 \sqrt{78}}{69} > \frac{1}{2}$$

$$\frac{12 + 4 \sqrt{78}}{69 \cdot 2} = \frac{6 - 2 \sqrt{78}}{69}$$

$$12 + 4 \sqrt{78} > 69$$

$$4 \sqrt{78} > 57$$

$$16 \cdot 78 > 572$$

$$\begin{array}{r} 23 \\ \times 23 \\ \hline 69 \\ 46 \\ \hline 525 \\ 23 \\ \hline 187 \\ 78 \\ \hline 187 \\ 187 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\frac{6 + 2 \sqrt{78}}{69} < \frac{3 - \sqrt{3}}{3}$$

$$\frac{6 + 2 \sqrt{78}}{23} < \frac{3 - \sqrt{3}}{3}$$

$$6 + 2 \sqrt{78} < 69 + 23 \sqrt{3}$$

$$23 \sqrt{3} + 2 \sqrt{78} < 6663$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ.

$$x^2 + ax^2 - abx + bx^2 - 1 = 0$$

$$\alpha \approx a(x^2)$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

5

6

7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!