



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ



## 10 КЛАСС. Вариант 10

- [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^{15}7^{11}$ ,  $bc$  делится на  $2^{17}7^{18}$ ,  $ac$  делится на  $2^{23}7^{39}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
- [4 балла] Известно, что дробь  $\frac{a}{b}$  несократима ( $a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$ ). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2 - 7ab + b^2}.$$

При каком наибольшем  $m$  могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на  $m$ ?

- [4 балла] Центр окружности  $\omega$  лежит на окружности  $\Omega$ , хорда  $AB$  окружности  $\Omega$  касается  $\omega$  в точке  $C$  так, что  $AC : CB = 17 : 7$ . Найдите длину  $AB$ , если известно, что радиусы  $\omega$  и  $\Omega$  равны 7 и 13 соответственно.
- [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

- [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0; 0)$ ,  $P(-13; 26)$ ,  $Q(3; 26)$  и  $R(16; 0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$ .
- [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

- [6 баллов] Треугольник  $ABC$  вписан в окружность. Пусть  $M$  – середина той дуги  $AB$  описанной окружности, которая не содержит точку  $C$ ;  $N$  – середина той дуги  $AC$  описанной окружности, которая не содержит точку  $B$ . Найдите расстояние от вершины  $A$  до центра окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ , если расстояния от точек  $M$  и  $N$  до сторон  $AB$  и  $AC$  соответственно равны 5 и 2,5.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                                   | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

однозначные степени вхождения в числа 2  
в  $a_1; b_1; c_1$  за  $a_1; b_1; c_1$  соответственно.

по условию

$$a_1 + b_1 \geq 15$$

$$b_1 + c_1 \geq 17$$

$$a_1 + c_1 \geq 23$$

суммируем

$$2(a_1 + b_1 + c_1) \geq 55$$

но есть

$$a_1 + b_1 + c_1 \geq 27,5, \text{ но } a_1 + b_1 + c_1 - \text{целое, значит}$$

$$a_1 + b_1 + c_1 \geq 28. \quad (1)$$

Также зачесим, что  $ac : 7^{39}$ , значит

$$ac : 7^{39} \quad (2)$$

из (1) и (2) имеем  $abc \geq 2^{28}7^{39}$

Пример.

$$a = 2^{11}7^{19}$$

$$c = 2^{12}7^{19}$$

$$b = 2^5$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                                   | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ.**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

То, что дробь  $\frac{a}{b}$  неокрашена  $\Leftrightarrow \text{НОД}(a, b) = 1$ .

Найдем НОД  $(a+b; a^2 - 7ab + b^2)$ . Предположим, что  
из  $a^2 - 7ab + b^2$  есть неокрашенные факторы  $k \cdot (a+b)$ ,  
а значит, когда все поделится на  $(a+b)^2$ .

$$(a+b)(a+b; a^2 - 7ab + b^2) = (a+b; -9ab).$$

Предположим, что если  $a \nmid p$ , то  $a+b \nmid p$ ,  
т.к.  $(a, b) = (a, a+b) = 1$ . Аналогично  
 $(b, a+b) = (a, b) = 1$ . Тогда  $(a+b; -9ab) =$   
 $= (a+b; -9)$ . Тогда  $m \leq 9$ .

Предположим, что если  $a=4, b=5$  то  
дробь окрашена. и

Предположим, что если  $a=4, b=5$  можно  
окрашивать на 9.

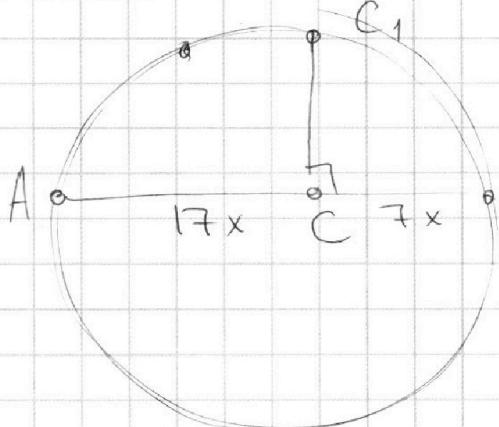
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                                   | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ.**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$C_1$  - центр  $\omega$   
 $C_1C \perp AB$  - касание

B Заметим, что  
две  $\triangle AC_1B$  вин.

$$AC_1 \cdot C_1B \cdot AB = 4 \cdot S \cdot R$$

( $S$  = ви.  $\triangle AC_1B$ ,  $R$  - радиус  $\omega$ )

$$AC_1 = \sqrt{(17x)^2 + 49}$$

$$BC_1 = \sqrt{(7x)^2 + 49}$$

$$AB = 24x$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot BC_1 \cdot AC_1 \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 24x$$

$$R = 13$$

$$\sqrt{(17x)^2 + 49} \cdot \sqrt{(7x)^2 + 49} \cdot 24x = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 24x \cdot 13 \cdot 4$$

$$\sqrt{(17x)^2 + 49} \cdot \sqrt{(7x)^2 + 49} = \cancel{\frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 24x} \cdot 2 \cdot 7 \cdot 13$$

$$(17x^2 + 49)(49x^2 + 49) = 4 \cdot 169 \cdot 169$$

$$(289x^2 + 49)(x^2 + 1) = 4 \cdot 169$$

$$t = x^2$$

$$(289t + 49)(t + 1) = 4 \cdot 169$$

Заметим, что  $t > 0$ . При  $t=1$  выполняется  
равенство а при  $t > 0$  функция сима  
отрицательно монотонно возрастает.

$$t = 1$$

$$x = 1$$

$$AB = 24x = 24$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



- |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                                   | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Обозначим

$$\sqrt{A} = m$$

$$\sqrt{B} = n$$

$$m - n = m^2 - n^2$$

$$m^2 + m =$$

$$m^2 - m \Rightarrow n^2 - n$$

расстояния

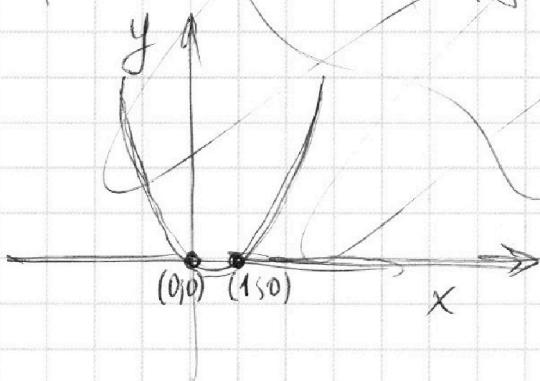
график

функций

$$m, n \geq 0$$

$$y = x^2 - x$$

Это парабола с  
ветвями вверх,  
она имеет корни  
 $x_1 = 0, x_2 = 1$ . Тогда  
видно, что



$(\sqrt{A} - \sqrt{B}) = (\sqrt{A} - \sqrt{B})(\sqrt{A} + \sqrt{B})$  по разности  
квадратов

$\sqrt{A} = \sqrt{B}$  когда  $1 - 9x = 0$  ( $x = \frac{1}{9}$ ). иначе

$$\sqrt{A} + \sqrt{B} = 1$$

тогда

$$(\sqrt{A} + \sqrt{B}) + (\sqrt{A} - \sqrt{B}) = 1 + 1 - 9x$$

$$2\sqrt{A}$$

$$3 \cdot 2\sqrt{3x^2 - 6x + 2} = 2 - 9x$$

$$4(3x^2 - 6x + 2) = 4 - 36x + 81x^2$$

$$12x^2 - 24x + 8 = 4 - 36x + 81x^2$$

$$69x^2 - 12x - 4 = 0$$

$$D = 144 + 96 \cdot 69$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



- |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                                   | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$3x^2 - 6x + 2 \geq 0 \quad (1)$$

$$D = 36 - 24 = 12$$

$$x_1 = \frac{6 + \sqrt{12}}{6} = 1 + \frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} =$$

$$= 1 + \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$x_2 = \frac{6 - \sqrt{12}}{6} = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$x \in (-\infty; 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}] \cup [1 + \frac{1}{\sqrt{3}}, \infty)$$

получим  $3x^2 + 3x + 1 = a$

$$1 - 9x = b$$

$$\sqrt{a+b} - \sqrt{a} = b$$

$$\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + b$$

$$a+b = a + b^2 + 2b\sqrt{a}$$

$$b = b^2 + 2b\sqrt{a}$$

$$(b - b^2) = 2b\sqrt{a}$$

$$1 - b = 2\sqrt{a}$$

$$(1 - b)^2 = 4a$$

|| ||

$$(9x)^2 = 4 \cdot (3x^2 + 3x + 1)$$

$$81x^2 = 12x^2 + 12x + 4$$

$$69x^2 - 12x - 4 = 0$$

$$D = 144 + 4 \cdot 16 \cdot 69 = 16(9 + 69) = 16 \cdot 78$$

$$x_1 = \frac{12 + 4\sqrt{78}}{2 \cdot 69} = \frac{6 + 2\sqrt{78}}{69}$$

$$x_2 = \frac{12 - 4\sqrt{78}}{2 \cdot 69} = \frac{6 - 2\sqrt{78}}{69}$$

проверка  $x_1, x_2$  в (1), (2)

получим  $3x^2 - 6x + 2 = A$

$$3x^2 + 3x + 1 = B$$

тогда  $\sqrt{A} - \sqrt{B} = A - B$ . Кстати говоря  
можно сделать вывод

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                                   | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Тогда есть 17 основных отрезков и  
16 пунктирных (нас ~~не~~ не пересекают все  
пределы, а отрезки)

На основном отрезке РО лежат 14  
единичных отрезков

На логотипном отрезке РО, лежат 13  
единичных отрезков

(т.к. это единиц РО на  $(1; -1)$ , сюда  
отрезки О включаются за пределы параллелей)

Теперь просуммируем основные отрезки  
основного  $A_1, \dots, A_{17}$  и  
пунктирного  $B_1, \dots, B_{16}$

Задача в том, что две точки на  $A_i$  и  $B_j$   
включены в пределах  $A_{i+7}$ .

Две точки на  $B_i = B_{i+7}$ .

Тогда две промежуточные  $A_1, \dots, A_{10}$  найдутся  
Промежуточные  $B_1, \dots, B_{10}$ , то есть это

10·14·14 пар точек

Минимум две  $B_1, \dots, B_9$  найдутся  $B_{i+7}$ ,  
то есть это 30·9·13·13 пар точек

$$\begin{array}{r} 14 \\ \times 14 \\ \hline 56 \\ 14 \\ \hline 196 \end{array} \quad \begin{array}{r} 13 \quad 107 \quad 117 \\ \times \quad \cancel{13} \quad \times 13 \\ \hline \cancel{32} \quad 351 \\ \hline 107 \quad 117 \\ \hline 91 \quad 1521 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{Ответ: } + \\ 1960 \\ + 1521 \\ \hline 3481 \end{array}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                                   | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

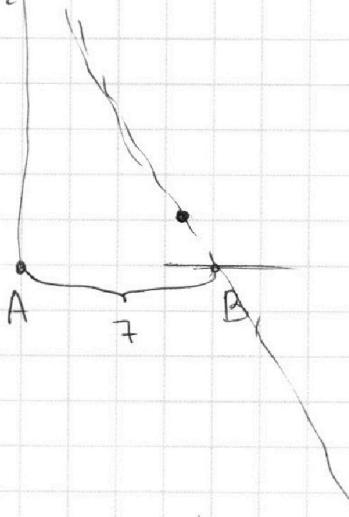
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Для произвольной точки плоскости  $A(x_1; y_1)$  найдем ГМТ точки  $B(x_2; y_2)$  чтобы

$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14. \quad \text{Очевидно подходит}$$

$B_2$



$B_2(x_1 + 7; y_1)$ . Далее

мы можем дальше идти

ищем и т.д.

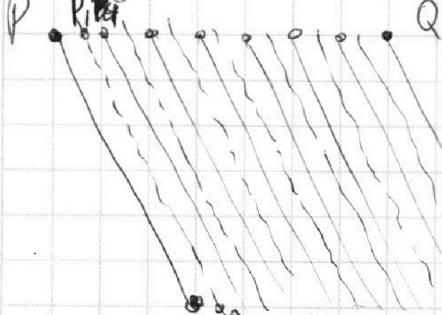
Все такие точки  
делятся линиями на  
прямой  $y = -2x + 2x_1 + y_1 + 14$ ,

то есть нахождение прямой

подходит еще  $B_3$

$(x_1; y_1 + 14)$ . Но есть ГМТ - это выше  
точки прямой  $B_1, B_2$ .

Рассмотрим например граничную прямую



Через вышеупомянутые  
точки на отрезке PQ проведем  
прямую, || PO (это  
прямая  $y = -2x$ )

Еще проведем прямую

средние линии между соседними  
(нумер.) линиями. Тогда все эти прямые содержат все  
точки чл. точки параллелей (так как  
если провести ординату, то наше все прямые  
содержат пересек. ее во всех полученных  
точках, значит вышеупомянутые они содержат)

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

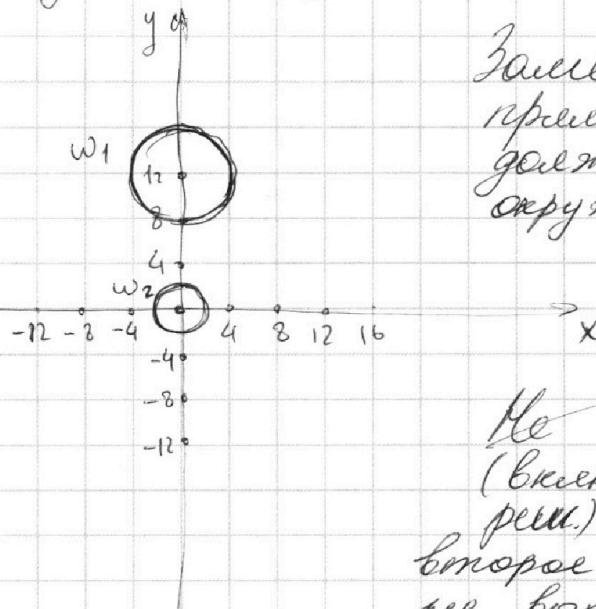


- |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                                   | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

нарисуйте коорд. плоскость  $Oxy$ .



Запишите, что  
пресекая  $ax + y - 8b = 0$   
должна лежать в двух  
окружностях.

Не пересекают 2 круга  
(вспомог. фиг. в дальнейшем  
реш.) одна из линий -  
второе уравнение нравенство  
ее дополнением.

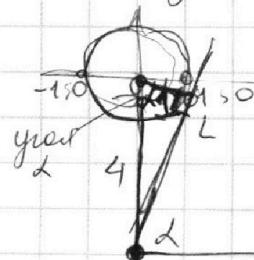
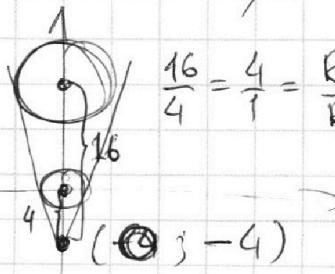
Пересекут круг пресекают

Пересекут только один круг пресекают все  
линейки, так как у системы будет либо  
1, либо беск. кол-во решений (круги не пересек,  
значит одна точка внутри  $w_1$ , то вне  $w_2$ ,  
она либо пересекается).

Так как круги не пересекаются (вн. окр.)  
одна точка  $w_1$  либо  $w_2$  является решением  
1 ур., значит у пресекающей должна быть 2  
точки пересеч. Ее либо - общая лин.

Найдем ур. общ. лин.

1) либо внеш. проходит через  $(0; -4)$  - центр малой  
окружности.



$$KL = \sqrt{16-1} = \sqrt{15}$$

$$\tan \alpha = \sqrt{15}$$

$$y = -ax + 8b$$

$$a = -\tan \alpha = -\sqrt{15}$$

и сим. пресекают

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                                   | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

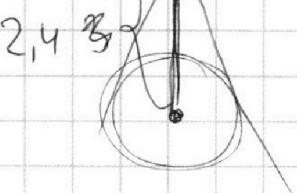
МФТИ



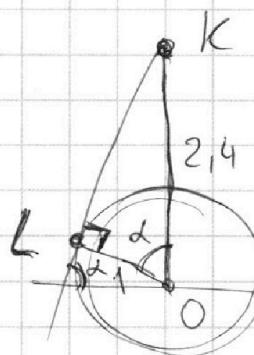
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

2) Внешт. касат. проходит через  
центры отрез. сопотений  
~~(0;2,4)~~. (0;2,4)  
проведен из ~~(0;2,4)~~ кас.  
к  $w_2$

$$\frac{g}{R_1} = \frac{11,6}{2,4}$$
$$11,6 = R_1 \cdot \frac{g}{2,4}$$



$$\begin{array}{r} 24 \\ \times 24 \\ \hline 96 \\ 48 \\ \hline 576 \end{array}$$



$$KL = \sqrt{576 - 1} =$$
$$= \sqrt{476}$$

$$\tan \alpha = \frac{KL}{LO} = \sqrt{4,76}$$

$$y = -ax + 86$$
$$-a = \tan \alpha = \sqrt{4,76}$$

и сим. прямая  $a = \sqrt{4,76}$

две ветви:  $a = \pm \sqrt{4,76}$   
 $a = \pm \sqrt{15}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                            |                            |                            |                            |                            |                            |                                       |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input checked="" type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

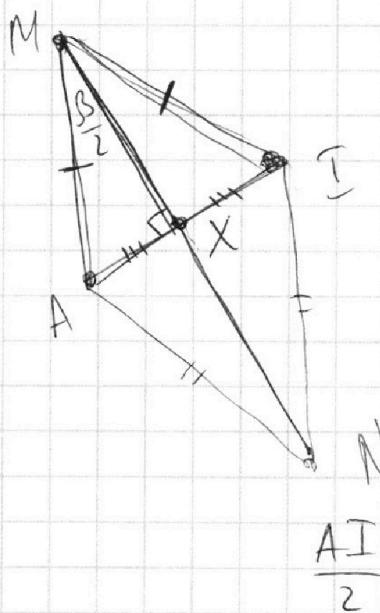
Перенесем

()

$$\frac{S}{\sin \frac{\gamma}{2}} \cdot \frac{r}{\sin \frac{\beta}{2}} = \\ = \frac{2r\beta}{\sin \frac{\beta}{2}} \cdot \frac{r}{\sin \frac{\beta}{2}}$$

$$\frac{2}{5\sin^2 \frac{\gamma}{2}} = \frac{1}{5\sin^2 \frac{\beta}{2}} \Rightarrow \frac{\sin^2 \frac{\beta}{2}}{\sin^2 \frac{\gamma}{2}} = \frac{1}{2} \quad (\textcircled{O})$$

Рассмотрим  $\triangle MAI$ .



$MN \perp AT$  ( $MN$  это  
сер. пер. по линии ос  
треугольника)

$\angle AMX$  отображает на  $\angle AN$   
максимум как  $\angle ABN \Rightarrow$   
 $\Rightarrow \angle AMX = \frac{\beta}{2}$

Значит,

$$AX = \sin \frac{\beta}{2} \cdot MA$$

$$\frac{AI}{2} =$$

$$AI = 2 \cdot \sin \frac{\beta}{2} \cdot \frac{5}{\sin \frac{\gamma}{2}}$$

$$AI^2 = 100 \cdot \frac{\sin^2 \frac{\beta}{2}}{\sin^2 \frac{\gamma}{2}} \stackrel{(\textcircled{O})}{=} 50$$

$$AI = \sqrt{50}$$

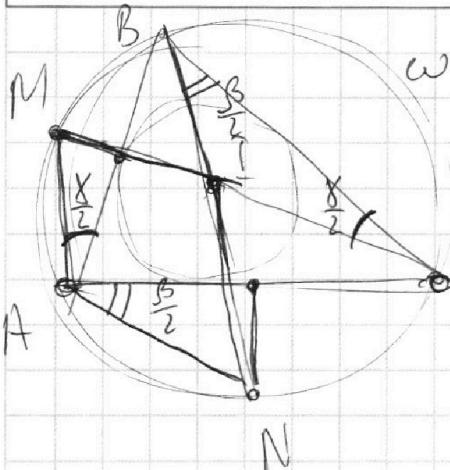
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                                   |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

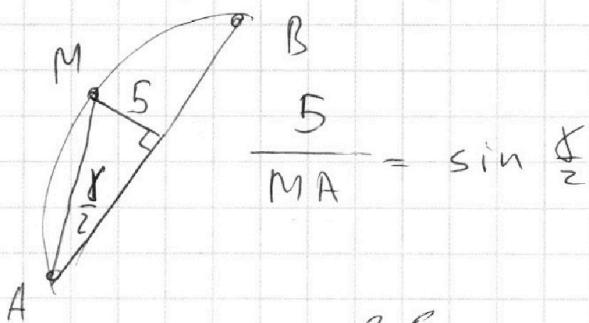


Задача  
Задано, что  $C; I; M$  лежат на дис.  $\angle C$   
 $B; I; N$  лежат на дис.  $\angle B$   
По условию о треугольнике.  
 $MI = MA$   
 $NI = NA$ .

Задано, что  $MI \cdot IC = BI \cdot IN$  (степень  
точки  $I$  относ  $\omega$ )

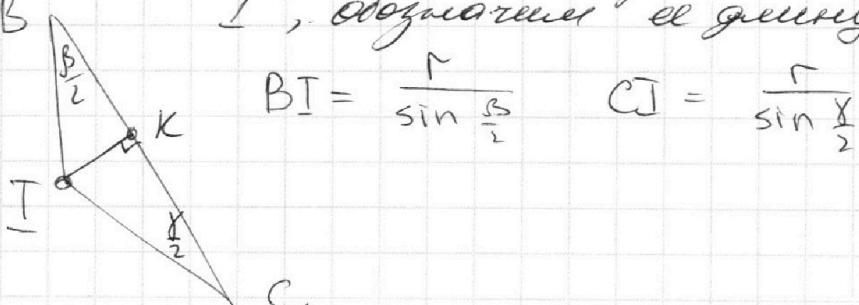
Тогда  $MA \cdot IC = NA \cdot IB$ .  $\text{OK}$

Задано, что  $MA = \frac{5}{\sin \frac{\gamma}{2}}$  (учет треугольни-  
ка обозначен за  $\alpha, \beta, \gamma$  соответственно),  
так как



$$\text{Аналогично } NA = \frac{2,5}{\sin \frac{\beta}{2}}$$

Рассмотрим  $\triangle BIC$ . Определив высоту из  
 $I$ , обозначен ее длину за  $r$ .



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

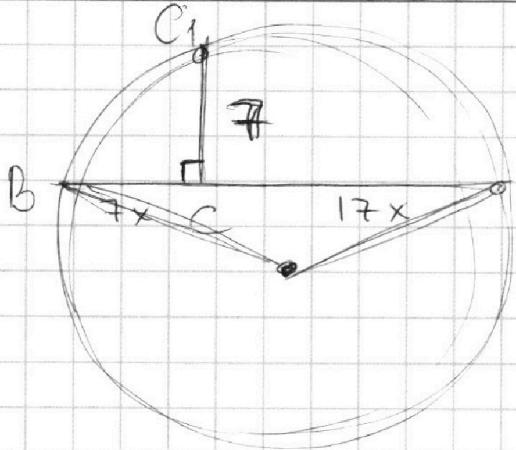
Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

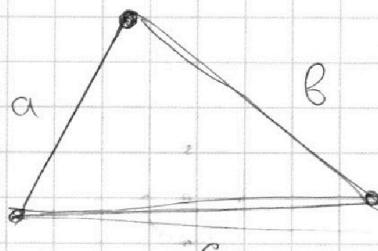
- |                            |                            |                            |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



S



$$ab \cdot 2^{16} \cdot 7^{11}$$

abc:

$$ac : 2^{23} \cdot 7^{39}$$

$$ac = 2^{23} \cdot 7^{39}$$

$$a \cdot c = 2^{12} \cdot 7^{39}$$

$$a = 2^{11} \cdot 7^{19}$$

$$\therefore b = 2^{28}$$

$$c = 2^{13}$$

$$a = 2^{12}$$

$$b = 2^4$$

$$2^{28}$$

$$55$$

$$ab \sin Y = \frac{8}{2} \cdot 2S$$

$$abc = 4SR$$

$$-\sqrt{49+49x^2} \cdot \sqrt{289x^2+49} - 24x = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 24x \\ \bullet 13$$

$$289 + 49 = 338$$

$$676$$

$$\begin{array}{r} \times 169 \\ \hline 676 \end{array}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

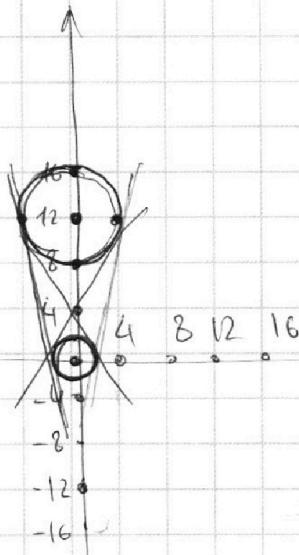
Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

**МФТИ.**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$(x^4 + y^2 - 1)(x^2 + (y-12)^2 - 16) \leq 0$$



премнож  $\alpha x + y - 8\sqrt{6} = 0$   
имеем 2 точки

$$y = -\alpha x + 8\sqrt{6}$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} + 1 - 9x = 1 - 9x$$

$$\sqrt{a+b} - \sqrt{a} = b$$

$$a+b = (b+\sqrt{a})^2$$

$$a+b = \alpha + b^2 + 2b\sqrt{\alpha}$$

$$b(b+2\sqrt{\alpha})$$

$$(b-b^2) = 2b\sqrt{\alpha}$$

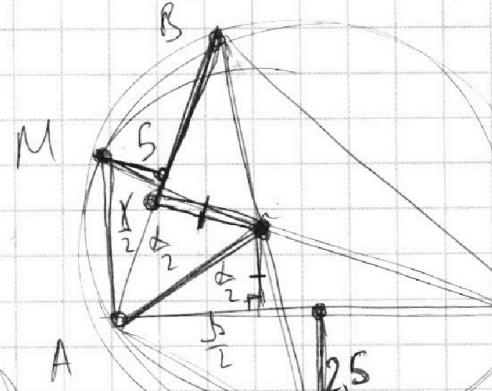
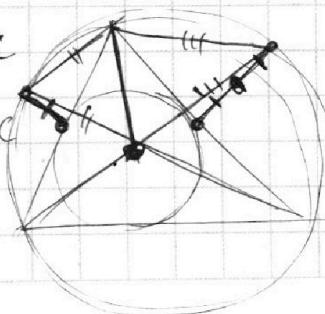
$$1-b = 2\sqrt{\alpha}$$

$$81x^2 = 4(3x^2 + 3x + 1)$$

$$2b(p-b) = (p-b)c$$

$$2b(a+b) = (a+c)c$$

$$2ab + 2b^2 = ac + c^2$$



$$MI \cdot IC = \\ = NI \cdot IB$$

$$MA \cdot IC = \\ = NA \cdot IB$$

$$\frac{p-b}{(p-b)c} = \frac{N}{2} = \frac{\tan \frac{\beta}{2} \cdot AC}{\tan \frac{\gamma}{2} \cdot AB} = \frac{1}{2}$$

**Л**

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

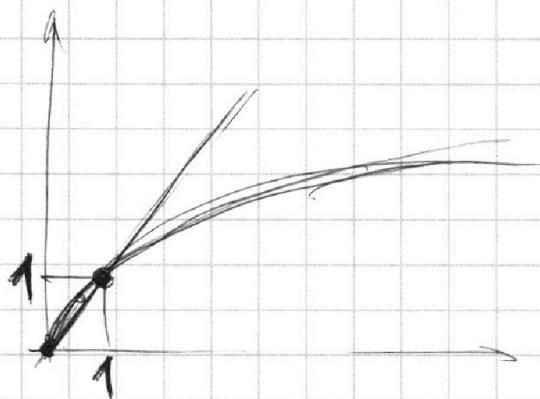
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~~ФАР-~~

$$\sqrt{A} - \sqrt{B} = A - B$$

$$A + B - 2\sqrt{AB} = A^2 - 2AB + B^2$$

$$A^2 + B^2$$





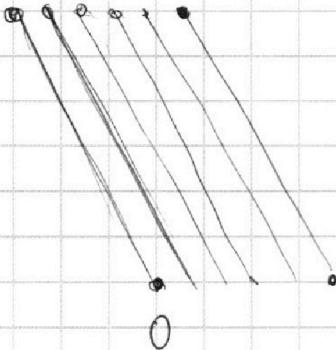
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> |

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



-13



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                            |                            |                            |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

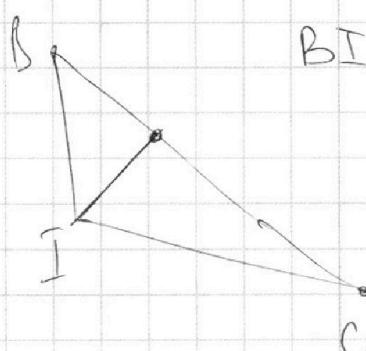
**МФТИ.**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$MA = \frac{5}{\sin \frac{\gamma}{2}}$$

$$NA = \frac{2,5}{\sin \frac{\beta}{2}}$$

$$\frac{2}{\sin \frac{\gamma}{2}} \cdot IC = \frac{1}{\sin \frac{\beta}{2}} \cdot IB$$



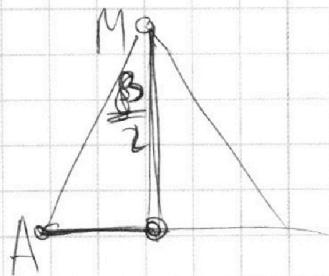
$$BI = \frac{r}{\sin \frac{\beta}{2}}$$

$$IC = \frac{r}{\sin \frac{\gamma}{2}}$$

$$\frac{2}{\sin^2 \frac{\gamma}{2}} = \frac{1}{\sin^2 \frac{\beta}{2}}$$

$$2 \sin^2 \frac{\beta}{2} = \sin^2 \frac{\gamma}{2}$$

мы хотим  $AI$



$$\frac{AI}{2MA} = \sin \frac{\beta}{2}$$

$$\frac{AI}{2 \cdot \frac{5}{\sin \frac{\gamma}{2}}} = \frac{\sin \frac{\beta}{2}}{\sin \frac{\gamma}{2}}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$3x^2 - 6x + 2 = 81x^2 - 18x + 1 + 3x^2 + 3x + 1$$

$$\sqrt{a+b} - \sqrt{a} = b$$

$$\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + b$$

$$a+b = a + b^2 + 2\sqrt{ab}$$

$$b = b^2 + 2\sqrt{ab}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

5

6

7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

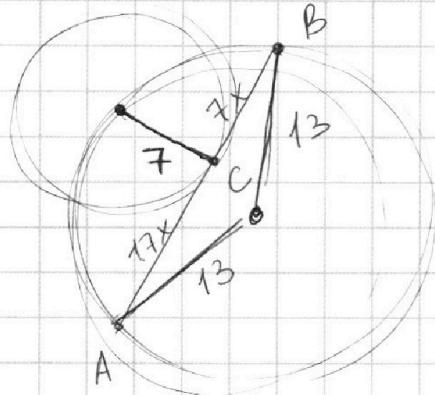
Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



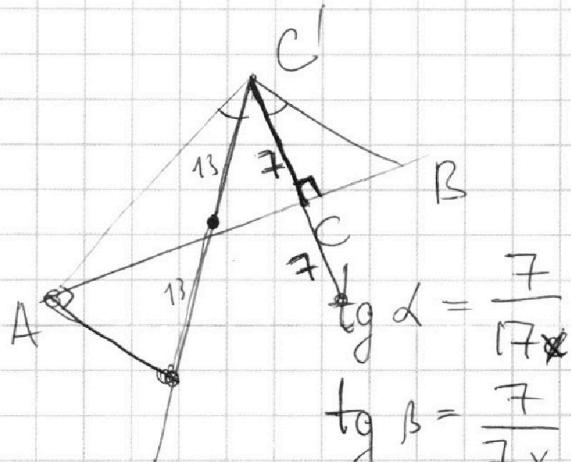
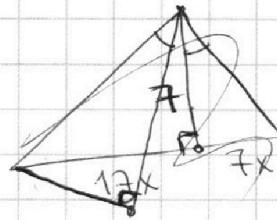
- 1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$24x = ?$$



17

17

119

289

$$(13 \times 14)^2$$

$$13^2 = 169$$

$$\begin{array}{r} 169 \\ \times 4 \\ \hline 676 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 676 \\ - 49 \\ \hline 177 \end{array}$$

$$538^2 =$$

$$\begin{array}{r} 338 \\ \times 338 \\ \hline 289 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 627 \\ \hline 2023 \\ 578 \\ \hline 455 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1014 \\ 1014 \\ \hline 114244 \\ 1734 \\ \hline 181203 \\ 1812 \\ \hline 724812 \\ 724812 \\ \hline 839056 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 29 \\ \times 29 \\ \hline 261 \\ 58 \\ \hline 841 \\ 2898 \\ 2898 \\ \hline 64 \end{array}$$

$$13 \cdot 14 = AC^1 \cdot C^1 B \quad \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \beta} = \frac{7}{17}$$

$$(AC^1 \cdot C^1 B)^2 = (13 \cdot 14)^2$$

$$t = x^2$$

$$(49 + (17x)^2)(49 + 49t) = 13^2 \cdot 4 \cdot 7^2$$

$$(49 + 289t)(1 + t) = 13^2 \cdot 4$$

$$289t^2 + (289 + 49)t^2 + 49 - 13^2 \cdot 4 = 0$$

$$289t^2 + 338t - 627 = 0$$

$$D = 338^2 + 4 \cdot 289 \cdot 627 = 839056$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$ab : 2^{15} 7^{11}$$

$$bc : 2^{17} 7^{12}$$

$$ac : 2^{23} 7^{39}$$

$$a_1 \quad a_2 \quad (a_1, b_1) = 1$$

$$b_1 \quad b_2 \quad (a_1 + b_1; a_1^2 - 7ab_1 + b_1^2) =$$

$$c_1 \quad c_2$$

$$a^2 b^2 c^2 : 2^{55} 7^{68}$$

$$a_1 + b_1 \geq 15$$

$$b_1 + c_1 \geq 17$$

$$a_1 + c_1 \geq$$

$$abc : 2^{28} 7^{34}$$

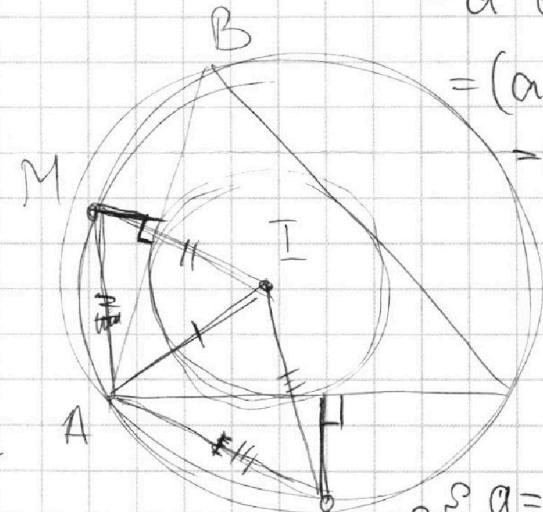
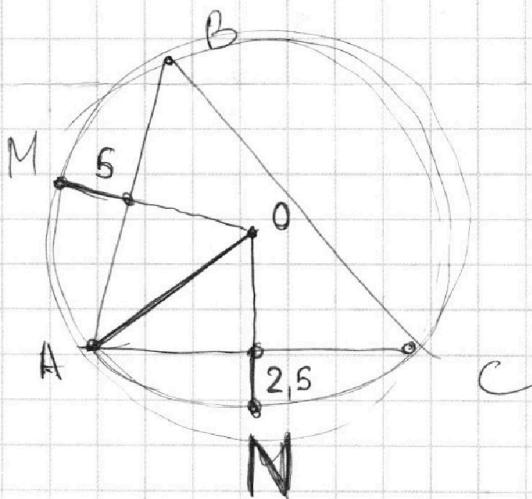
$$abc = 2^{22} 7^{34}$$

$$c = 2^{13} 7 = (a+b; a^2 - 7ab + b^2 - a^2 b^2 - 2ab) =$$

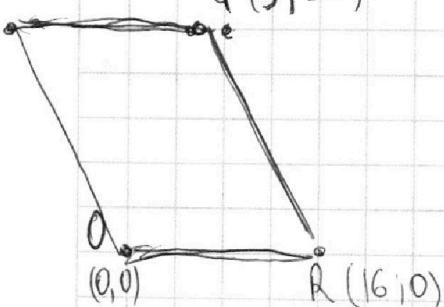
$$= (a+b; -9ab) = \\ = (a+b; 9ab)$$

$$a:p \Rightarrow \\ \Rightarrow a+b/p$$

$$\begin{aligned} a_1 + b_1 &= 15 \\ b_1 + c_1 &= 17 \end{aligned}$$



$$P(-3; 26) \quad Q(3; 26)$$



$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$$

$$2,5 = \sin \frac{\beta}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \cdot \frac{b}{2}$$

$$5 = \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \cdot b$$

$$10 = \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \cdot c$$

$$\text{найти: } \frac{(p-a)^2}{\cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{b+c}{2 \cos \frac{\alpha}{2}}$$

$$\begin{aligned} \alpha &= 2 \cdot 7 \\ b &= 2^{14} \cdot 7^{10} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ab : 2^{16} 7^{11} \\ bc : \end{aligned}$$

$$(x_1, y_1) \sim (x_1, y_1 + 14)$$