



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10



1. [4 балла] Натуральные числа  $a$ ,  $b$ ,  $c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^{15}7^{11}$ ,  $bc$  делится на  $2^{17}7^{18}$ ,  $ac$  делится на  $2^{23}7^{39}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .

2. [4 балла] Известно, что дробь  $\frac{a}{b}$  несократима ( $a \in \mathbb{N}$ ,  $b \in \mathbb{N}$ ). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}$$

При каком наибольшем  $m$  могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на  $m$ ?

3. [4 балла] Центр окружности  $\omega$  лежит на окружности  $\Omega$ , хорда  $AB$  окружности  $\Omega$  касается  $\omega$  в точке  $C$  так, что  $AC : CB = 17 : 7$ . Найдите длину  $AB$ , если известно, что радиусы  $\omega$  и  $\Omega$  равны 7 и 13 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0;0)$ ,  $P(-13;26)$ ,  $Q(3;26)$  и  $R(16;0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$ .

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник  $ABC$  вписан в окружность. Пусть  $M$  – середина той дуги  $AB$  описанной окружности, которая не содержит точку  $C$ ;  $N$  – середина той дуги  $AC$  описанной окружности, которая не содержит точку  $B$ . Найдите расстояние от вершины  $A$  до центра окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ , если расстояния от точек  $M$  и  $N$  до сторон  $AB$  и  $AC$  соответственно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

обозначим степени вхождения в числа 2  
в  $a, b, c$  за  $a_1, b_1, c_1$  соответственно.

по условию

$$a_1 + b_1 \geq 15$$

$$b_1 + c_1 \geq 17$$

$$a_1 + c_1 \geq 23$$

суммируем

$$2(a_1 + b_1 + c_1) \geq 55$$

то есть

$$a_1 + b_1 + c_1 \geq 27,5, \text{ но } a_1 + b_1 + c_1 - \text{целое, значит}$$
$$a_1 + b_1 + c_1 \geq 28. \quad (1)$$

Также заметим, что  $ac \geq 7^{39}$ , значит

$$abc \geq 7^{39} \quad (2)$$

из (1) и (2) имеем  $abc \geq 2^{28} 7^{39}$

Пример:

$$a = 2^{11} 7^{19}$$

$$c = 2^{12} 7^{19}$$

$$b = 2^5$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

 МФТИ

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

То, что дробь  $\frac{a}{b}$  несократима  $\Leftrightarrow \text{НОД}(a, b) = 1$ .

Найдем НОД  $(a+b; a^2-7ab+b^2)$ . Заметим, что  
из  $a^2-7ab+b^2$  мы можем вынести  $k \cdot (a+b)$ ,  
а значит, когда мы поделим, вычтем  
 $(a+b)^2$

$$(a+b)(a+b; a^2-7ab+b^2) = (a+b; -9ab)$$

Заметим, что если  $a \div p$ , то  $a+b \not\div p$ ,  
т.к.  $(a; b) = (a; a+b) = 1$ . Аналогично  
 $(b; a+b) = (a; b) = 1$ . Это есть  $(a+b; -9ab) =$   
 $= (a+b; -9)$ . Это есть  $m \leq 9$ .

Заметим, что если  $a=4, b=5$  то  
дробь целит. и

Заметим, что для  $a=4, b=5$  можно  
сократить на 9.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

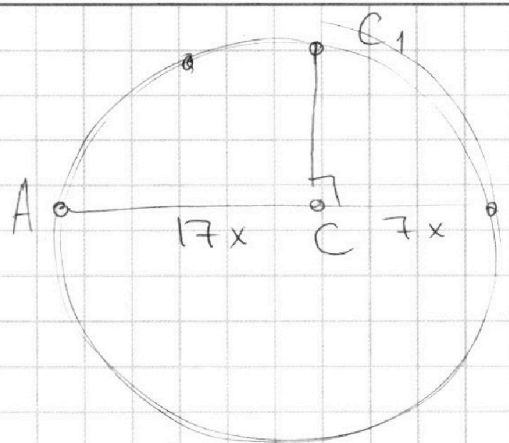
Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$C_1$  - центр  $\omega$   
 $C_1C \perp AB$  - касание

Заметим, что  
для  $\triangle AC_1B$  впис.

$$AC_1 \cdot C_1B \cdot AB = 4 \cdot S \cdot R$$

( $S$  = пл.  $\triangle AC_1B$ ,  $R$  - радиус  $\Omega$ )

$$AC_1 = \sqrt{(17x)^2 + 49}$$

$$BC_1 = \sqrt{(7x)^2 + 49}$$

$$AB = 24x$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot C_1C \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 24x$$

$$R = 13$$

$$\sqrt{(17x)^2 + 49} \cdot \sqrt{(7x)^2 + 49} \cdot 24x = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 24x \cdot 13 \cdot 4$$

$$\sqrt{(17x)^2 + 49} \cdot \sqrt{(7x)^2 + 49} = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 24 \cdot 13 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 13$$

$$((17x)^2 + 49)(49x^2 + 49) = 4 \cdot 49 \cdot 169$$

$$(17x \rightarrow x) \\ (289x^2 + 49)(x^2 + 1) = 4 \cdot 169$$

$$t = x^2$$

$$(289t + 49)(t + 1) = 4 \cdot 169$$

Заметим, что  $t > 0$ . При  $t = 1$  выполняется равенство а при  $t \geq 0$  функция слева очевидно монотонно возрастает.

$$t = 1$$

$$x = 1$$

$$AB = 24x = 24$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Обозначим

$$\sqrt{A} = m$$

$$\sqrt{B} = n$$

$$m - n = m^2 - n^2$$

$$m^2 + m =$$

$$m^2 - m = n^2 - n$$

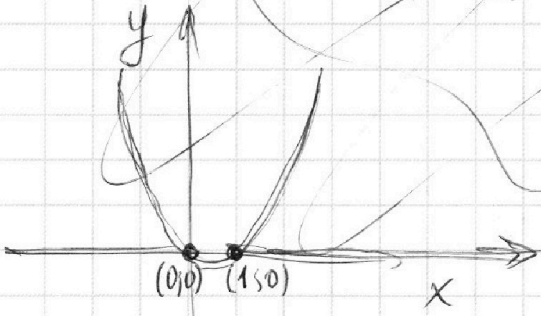
$$m, n \geq 0$$

рассмотрим

графики  
функции

$$y = x^2 - x$$

Это парабола с  
ветвями вверх,  
также имеет корни  
 $x_1 = 0, x_2 = 1$ . Тогда  
видно, что



$$(\sqrt{A} - \sqrt{B}) = (\sqrt{A} - \sqrt{B})(\sqrt{A} + \sqrt{B}) \quad \text{по разности квадратов}$$

$$\sqrt{A} = \sqrt{B} \quad \text{когда} \quad 1 - 9x = 0 \quad (x = \frac{1}{9}). \quad \text{иначе}$$

$$\sqrt{A} + \sqrt{B} = 1$$

тогда

$$(\sqrt{A} + \sqrt{B}) + (\sqrt{A} - \sqrt{B}) = 1 + 1 - 9x$$

$$2\sqrt{A}$$

$$2\sqrt{3x^2 - 6x + 2} = 2 - 9x$$

$$4(3x^2 - 6x + 2) = 4 - 36x + 81x^2$$

$$12x^2 - 24x + 8 = 4 - 36x + 81x^2$$

$$69x^2 - 12x - 4 = 0$$

$$D = 144 + 16 \cdot 69$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

МФТИ



1  2  3  4  5  6  7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$3x^2 - 6x + 2 \geq 0 \quad (1)$$

$$D = 36 - 24 = 12$$

$$x_1 = \frac{6 + \sqrt{12}}{6} = 1 + \frac{2\sqrt{3}}{2 \cdot 3} =$$

$$= 1 + \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$x_2 = \frac{6 - \sqrt{12}}{6} = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$x \in (-\infty; 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}] \cup [1 + \frac{1}{\sqrt{3}}; \infty)$$

$$3x^2 + 3x + 1 \geq 0 \quad (2)$$

$$D = 9 - 12 < 0$$

$$x \in (-\infty; \infty)$$

нужно  $3x^2 + 3x + 1 = a$   
 $1 - 9x = b$

$$\sqrt{a+b} - \sqrt{a} = b$$

$$\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + b$$

$$a+b = a + b^2 + 2b\sqrt{a}$$

$$b = b^2 + 2b\sqrt{a}$$

$$(b - b^2) = 2b\sqrt{a}$$

$$1 - b = 2\sqrt{a}$$

$$(1 - b)^2 = 4a$$

|| ||

$$(9x)^2 = 4 \cdot (3x^2 + 3x + 1)$$

$$81x^2 = 12x^2 + 12x + 4$$

$$69x^2 - 12x - 4 = 0$$

$$D = 144 + 4 \cdot 16 \cdot 69 = 16(9 + 69) = 16 \cdot 78$$

$$x_1 = \frac{12 + 4\sqrt{78}}{2 \cdot 69} = \frac{6 + 2\sqrt{78}}{69}$$

$$x_2 = \frac{12 - 4\sqrt{78}}{2 \cdot 69} = \frac{6 - 2\sqrt{78}}{69}$$

нужно  $x_1, x_2$  (1), (2)

$$3x^2 - 6x + 2 = A$$

$$3x^2 + 3x + 1 = B$$

тогда  $\sqrt{A} - \sqrt{B} = A - B$ . Тогда берите  
наша работа правильная

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



- 1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Тогда есть 17 основных отрезков и 16 пунктирных (на ~~на~~ интересуют не пределы, а отрезки)

На основном отрезке  $PO$  лежит 14 целых точек

На побочном отрезке  $PO_1$  лежит 13 целых точек

(т.к. это сдвиг  $PO$  на  $(1; -1)$ , от отраз точки  $O$  вылетает за пределы пар. (рамки))

Теперь проанализируем основные отрезки основного  $A_1, \dots, A_{17}$  и пунктирные  $B_1, \dots, B_{16}$

Заметим, что для точки на  $A_i$  ~~ТМТ~~  $B$  вылетает прямая  $A_{i+7}$ .

Для точки на  $B_i$  —  $B_{i+7}$ .

Тогда для прямых  $A_1, \dots, A_{10}$  найдем прямые вида  $A_{i+7}$ , то есть это

10 · 14 · 14 пар точек

Также для  $B_1, \dots, B_9$  найдем  $B_{i+7}$ , то есть это 9 · 13 · 13 пар точек

$$\begin{array}{r} 14 \\ \times 14 \\ \hline 56 \\ 14 \\ \hline 196 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 13 \times 107 \quad 117 \\ \quad 13 \quad 13 \\ \hline 321 \quad 351 \\ 107 \quad 117 \\ \hline 41 \quad 1521 \end{array}$$

$$\text{Ответ: } \begin{array}{r} 1960 \\ + 1521 \\ \hline 3481 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

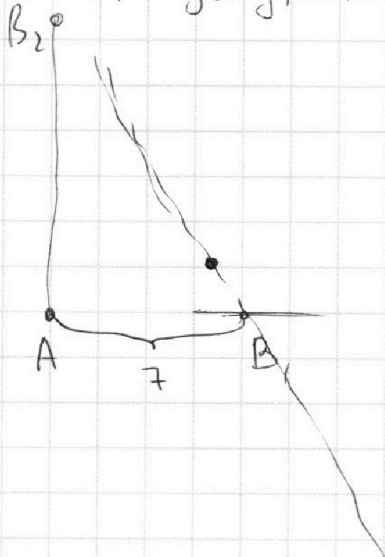
1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Для произвольной точки плоскости  $A(x_1; y_1)$   
найдем ГМТ точки  $B(x_2; y_2)$  чтобы

$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$$



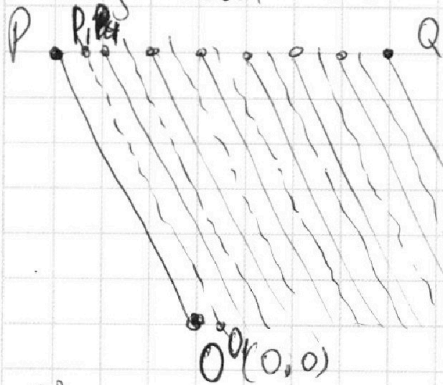
Очевидно подходит  
 $B_1(x_1 + 7; y_1)$ . Далее  
мы можем дать  
шаги  $y$   $B$

Все такие точки  
даются линиями на  
прямой  $y = -2x + 2x_1 + y_1 + 14$ ,  
то есть каждой прямой  
всем

подходит еще  $B_2$

$(x_1; y_1 + 14)$ . То есть ГМТ - это целые  
точки прямой  $B, B_2$ .

Разобьем наш пар. грамм. на прямые



Через целые точки  
на отрезке PQ проведем  
прямые,  $\parallel PQ$  (это  
прямая  $y = -2x$ )

Еще проведем прямые

Средние линии между сосед. проведенными  
(мульти.) Тогда все эти прямые содержат все  
точки цел. точки пар-грамма (так как  
если провести ординату, то найдем пересек.  
содержат пересек. ее во всех полученных  
точках, значит целые они содержат).

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

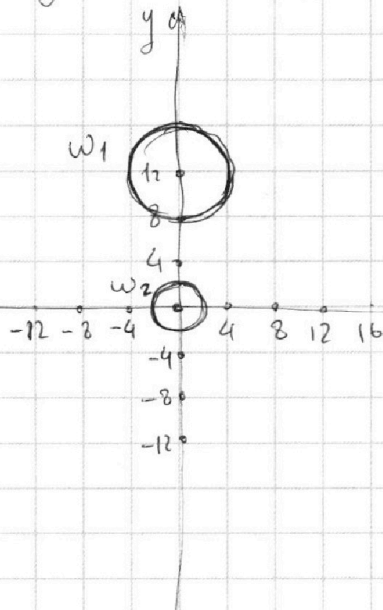
Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

нарисуем коорд. плоскость  $Oxy$ .



Заметим, что  
прямая  $ax + y - 8b = 0$   
должна касаться двух  
окружностей.

Не пересекают 2 круга  
(включ. сар. в данном случае  
реш.) она не может —  
второе уравне неравенство  
не выполняется.

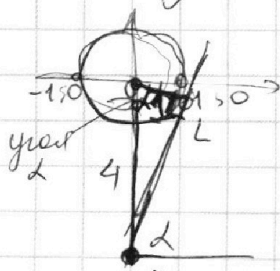
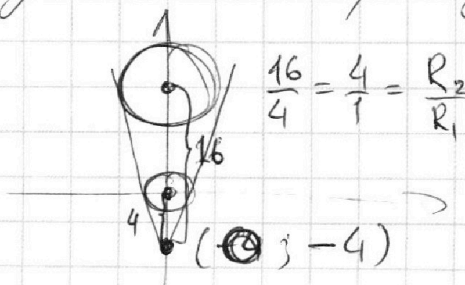
~~Пересечь круг прямой~~

~~Пересечь только один круг прямая не  
может, так как  $y$  системы будет либо  
1, либо беск. кол-во решений (круги не пересекаются,  
значит если точка внутри  $\omega_1$ , то вне  $\omega_2$ ,  
она два решения).~~

Так как круги не пересекаются (вкл. сар.),  
любая точка  $\omega_1$  или  $\omega_2$  является решением  
С ур., значит у прямой должно быть 2  
точки пересеч. с ними — общая кас.

Найдем ур общ. кас.

1) дс внеш. проходит через  $(0; -4)$  — центр ниж. окружн.



$$KL = \sqrt{16-1} = \sqrt{15}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{15}$$

$$y = -ax + 8b$$

$$a = -\operatorname{tg} \alpha = -\sqrt{15}$$

и снм. прямая  
 $a = \sqrt{15}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

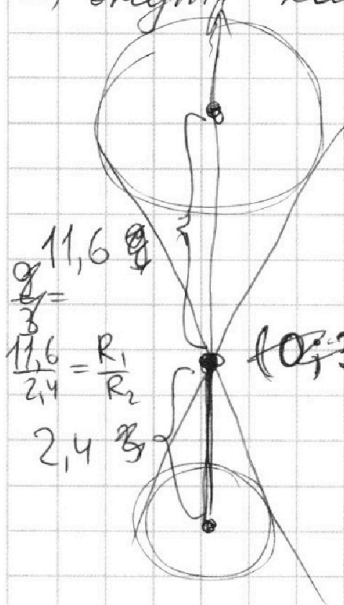
Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1     2     3     4     5     6     7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

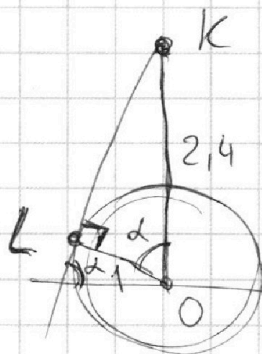
2) Внутр. касат. проходит через  
центр окруж.  $\omega_1$  и  $\omega_2$



~~(0; 4)~~  $(0; 2, 4)$   
проведем из ~~(0; 4)~~  $(0; 2, 4)$  кас.  
к  $\omega_2$

~~(0; 3)~~  $(0; 2, 4)$

$$\begin{array}{r} 24 \\ \times 24 \\ \hline 96 \\ 48 \\ \hline 576 \end{array}$$



$$KL = \sqrt{5,76 - 1} = \sqrt{4,76}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{KL}{LO} = \sqrt{4,76}$$

$$y = -ax + 8b$$

$$-a = \operatorname{tg} \alpha = \sqrt{4,76}$$

и сим. прямая  $a = \sqrt{4,76}$

Ответ:  $a = \pm \sqrt{4,76}$   
 $a = \pm \sqrt{15}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Перепишем

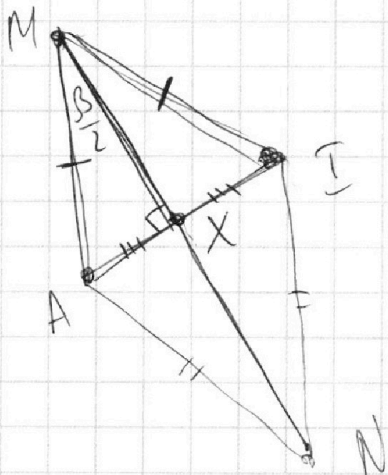
(X)

$$\frac{5}{\sin \frac{\gamma}{2}} \cdot \frac{r}{\sin \frac{\gamma}{2}} =$$
$$= \frac{2rB}{\sin \frac{\beta}{2}} \cdot \frac{r}{\sin \frac{\beta}{2}}$$

$$\frac{2}{\sin^2 \frac{\gamma}{2}} = \frac{1}{\sin^2 \frac{\beta}{2}} \Rightarrow \frac{\sin^2 \frac{\beta}{2}}{\sin^2 \frac{\gamma}{2}} = \frac{1}{2} \quad (\odot)$$

Рассмотрим

$\triangle MAI$ .



$MN \perp AI$  ( $MN$  это  
сер. пер. по медианам ос  
треугольце)

$\angle AMX$  опирается на  $\cup AN$   
также как  $\angle ABN \Rightarrow$   
 $\Rightarrow \angle AMX = \frac{\beta}{2}$

Заметим, что

$$AX = \sin \frac{\beta}{2} \cdot MA$$

$$\frac{AI}{2} =$$

$$AI = 2 \cdot \sin \frac{\beta}{2} \cdot \frac{5}{\sin \frac{\gamma}{2}}$$

$$AI^2 = 100 \cdot \frac{\sin^2 \frac{\beta}{2}}{\sin^2 \frac{\gamma}{2}} \stackrel{(\odot)}{=} 50$$

$$AI = \sqrt{50}$$

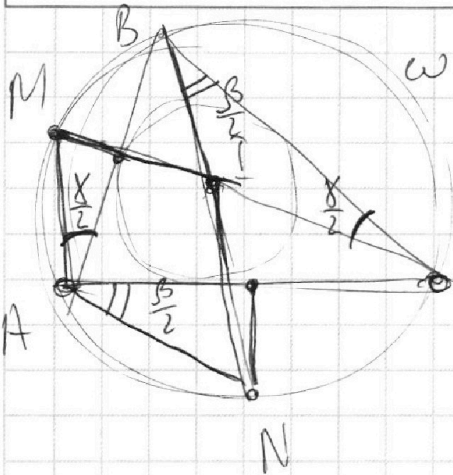
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$\omega$  Заметим, что  $E, I, M$   
лежат на дуге  $\angle C$   
 $B, I, N$  лежат на дуге  
 $\angle B$

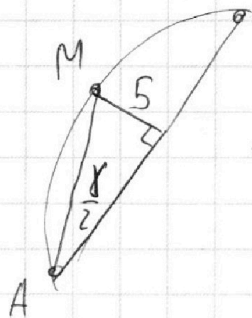
То мы имеем о треугольнике.  
 $MI = MA$   
 $NI = NA$ .

Заметим, что  $MI \cdot IC = BI \cdot IN$  (степень точки  $I$  относ  $\omega$ )

Тогда  $MA \cdot IC = NA \cdot IB$ .  $\otimes$

Заметим, что  $MA = \frac{5}{\sin \frac{\alpha}{2}}$  (угол треугольника  
нака обозначим за  $\alpha, \beta, \gamma$  соответственно)

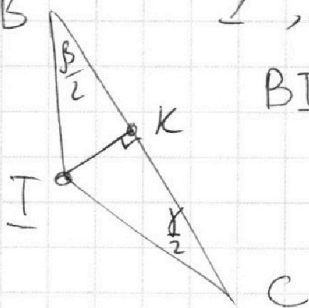
так как



$$\frac{5}{MA} = \sin \frac{\alpha}{2}$$

Аналогично  $NA = \frac{2,5}{\sin \frac{\beta}{2}}$

Рассмотрим  $\triangle BIC$ . Опустим высоту из  
 $B$   $I$ , обозначим ее длину за  $r$ .



$$BI = \frac{r}{\sin \frac{\beta}{2}} \quad CI = \frac{r}{\sin \frac{\gamma}{2}}$$

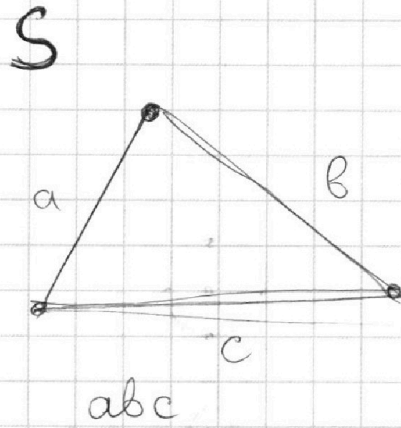
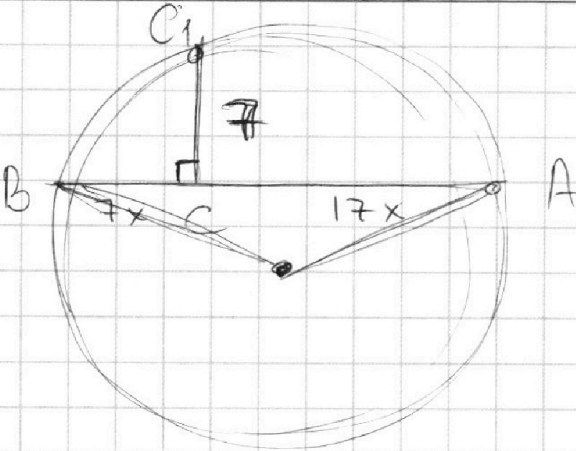
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

**МОТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



~~ab: 2<sup>15</sup> 7<sup>11</sup>~~  
~~bc:~~

~~ac: 2<sup>23</sup> 7<sup>39</sup>~~

~~ac = 2<sup>23</sup> 7<sup>39</sup>~~

~~a c = 2<sup>12</sup> 7<sup>19</sup>~~

~~a = 2<sup>11</sup> 7<sup>19</sup>~~

~~b = 2<sup>8</sup>~~

~~c = 2<sup>13</sup>~~

~~a = 2<sup>12</sup>~~

~~b = 2<sup>4</sup>~~

~~c = 2<sup>28</sup>~~

~~15 + 17 + 23 = 55~~

~~ab sin γ = 8/2 \* 2S~~

~~abc = 4SR~~

~~√(49 + 49x<sup>2</sup>) \* √(289x<sup>2</sup> + 49) \* 24x = 4 \* 1/2 \* 7 \* 24x \* 13~~

~~49~~

~~289 + 49 = 338~~

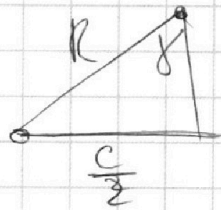
~~676~~

~~169  
x 4  
676~~

$\frac{1}{2} ab \sin \gamma = S$

~~$\frac{c}{\sin \gamma} =$~~

$\sin \gamma = \frac{c}{2R}$



$\frac{c}{\sin \gamma} = 2R$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

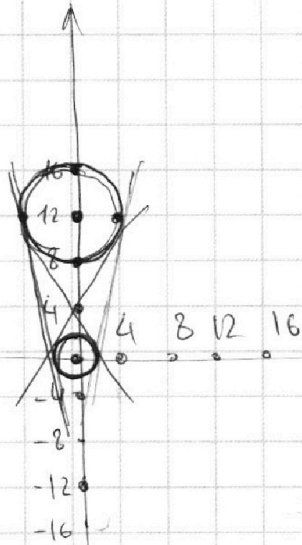
решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$(x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0$$



прямая  $ax + y - 8\sqrt{a} = 0$   
имеет 2 точки

$$y = -ax + 8\sqrt{a}$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} - 1 + 9x = \sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$\sqrt{a+b} - \sqrt{a} = b$$

$$a+b = (b+\sqrt{a})^2$$

$$a+b = a + b^2 + 2b\sqrt{a}$$

$$b(b+2\sqrt{a})$$

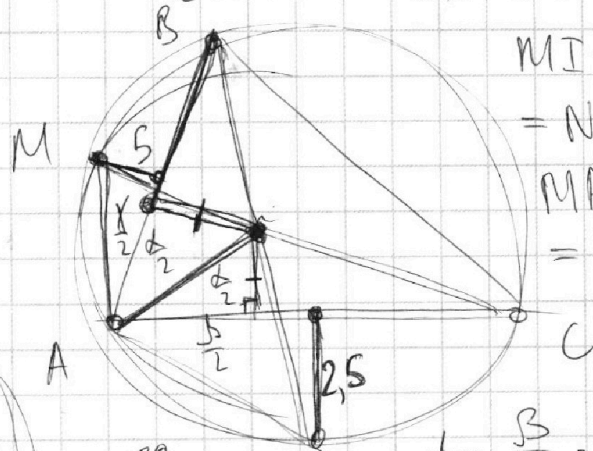
$$b - b^2 = 2b\sqrt{a}$$

$$1 - b = 2\sqrt{a}$$

$$81x^2 = 4(3x^2 + 3x + 1)$$

$$3x^2 + 3x + 1 \geq 0$$

$$3x^2 + 3x - 6x + 2 \geq 0$$



$$MI \cdot IC =$$

$$= NI \cdot IB$$

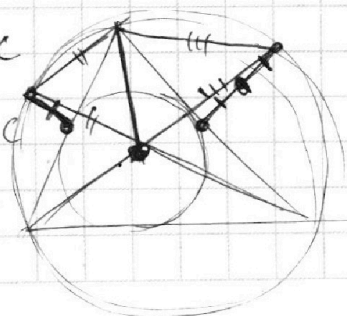
$$MA \cdot IC =$$

$$= NA \cdot IB$$

$$2b(p-c) = (p-b)c$$

$$2b(a+b) = (a+c)c$$

$$2ab + 2b^2 = ac + c^2$$



$$\frac{p-b}{(p-b)c} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \cdot AC}{\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \cdot AB} = \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

 МФТИ

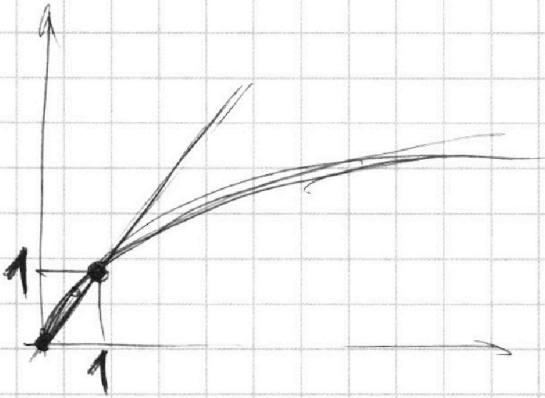
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~~$\sqrt{A} - \sqrt{B}$~~

$$\sqrt{A} - \sqrt{B} = A - B$$

$$A + B - 2\sqrt{AB} = A^2 - 2AB + B^2$$

$$A^2 + B^2$$





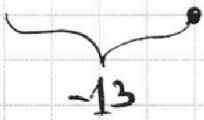
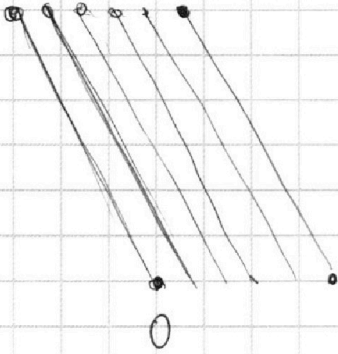
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

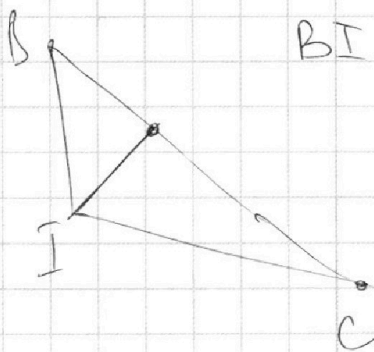
1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$MA = \frac{5}{\sin \frac{\alpha}{2}} \quad NA = \frac{2,5}{\sin \frac{\beta}{2}}$$

$$\frac{2}{\sin \frac{\alpha}{2}} \cdot IC = \frac{1}{\sin \frac{\beta}{2}} \cdot IB$$



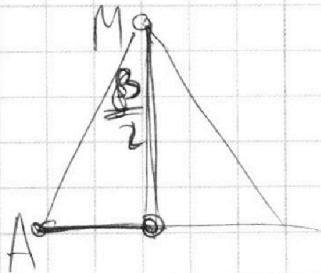
$$BI = \frac{r}{\sin \frac{\beta}{2}} \quad IC = \frac{r}{\sin \frac{\alpha}{2}}$$

$$\frac{2}{\sin^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{\sin^2 \frac{\beta}{2}}$$

$$2 \sin^2 \frac{\beta}{2} = \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

или хитрым

AI



$$\frac{AI}{2MA} = \sin \frac{\beta}{2}$$

$$\frac{AI}{2 \cdot \frac{5}{\sin \frac{\alpha}{2}}}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$3x^2 - 6x + 2 = 81x^2 - 18x + 1 + 3x^2 + 3x + 1$$

$$\sqrt{a+b} - \sqrt{a} = b$$

$$\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + b$$

$$a+b = a + b^2 + 2\sqrt{a}b$$

$$b = b^2 + 2\sqrt{a}b$$



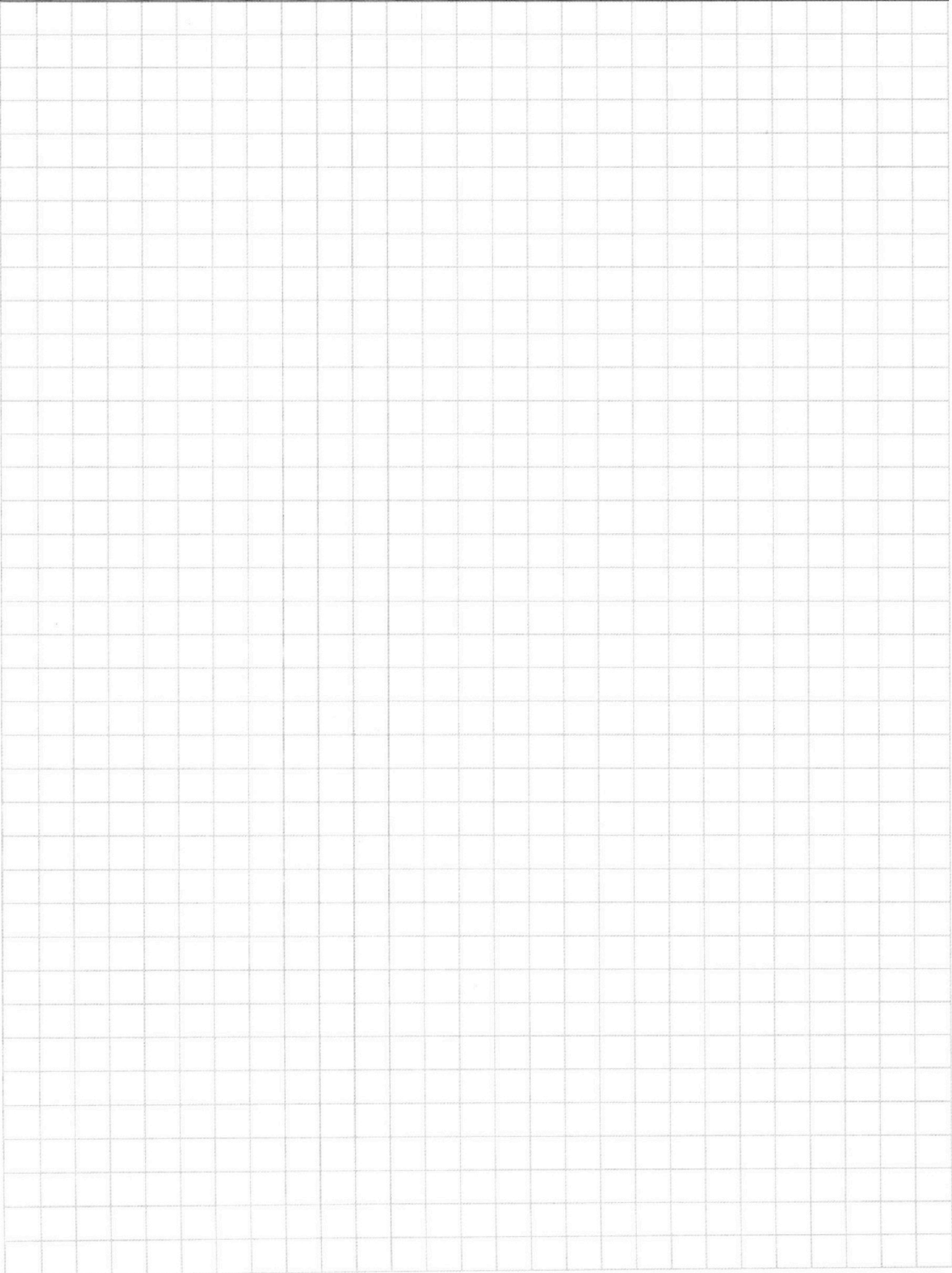
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



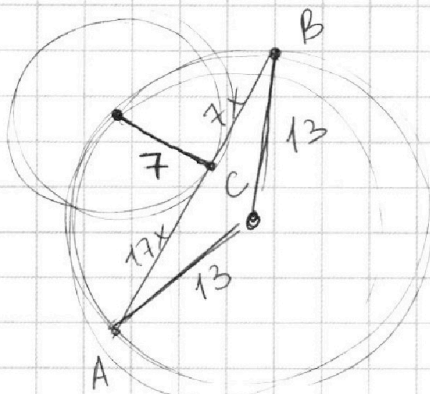
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

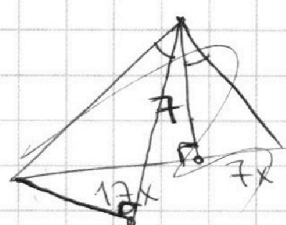
1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$24x = ?$$



$$\begin{array}{r} 17 \\ \times 17 \\ \hline 119 \\ 17 \\ \hline 289 \end{array}$$

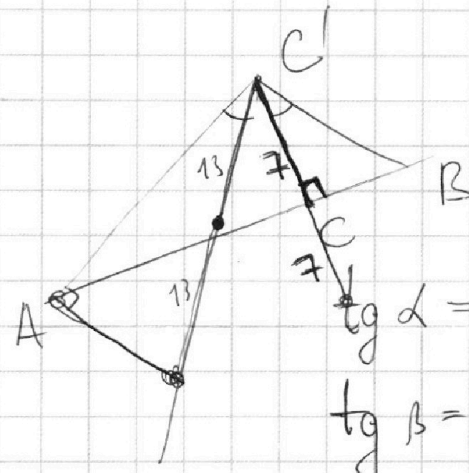
$$\begin{array}{r} (13 \times 14)^2 \\ 13^2 = 169 \\ 169 \\ \times 4 \\ \hline 676 \end{array} \quad \begin{array}{r} 676 \\ - 49 \\ \hline 627 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 338^2 = \\ 338 \\ \times 338 \\ \hline 2704 \\ 1014 \\ \hline 1014 \\ \hline 114244 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 289 \\ \times 627 \\ \hline 2023 \\ 578 \\ \hline 1734 \\ \hline 181203 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 181203 \\ \times 4 \\ \hline 724812 \\ + 114244 \\ \hline 839056 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 29 \\ \times 29 \\ \hline 261 \\ 58 \\ \hline 841 \\ \times 2898 \\ \times 2898 \\ \hline 84 \end{array}$$



$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha &= \frac{7}{17x} \\ \operatorname{tg} \beta &= \frac{7}{7x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 13 \cdot 14 &= AC' \cdot C'B \\ (AC' \cdot C'B)^2 &= (13 \cdot 14)^2 \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \end{aligned}$$

$$(49 + (17x)^2)(49 + (7x)^2)$$

$$t = x^2$$

$$\begin{aligned} (49 + 289t)(49 + 49t) &= 13^2 \cdot 4 \cdot 7^2 \\ (49 + 289t)(1 + t) &= 13^2 \cdot 4 \\ 289t^2 + (289 + 49)t + 49 - 13^2 \cdot 4 &= 0 \\ 289t^2 + 338t - 627 &= 0 \end{aligned}$$

$$D = 338^2 + 4 \cdot 289 \cdot 627 = 839056$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$ab : 2^{15} 7^{11}$$

$$bc : 2^{17} 7^{18}$$

$$ac : 2^{23} 7^{39}$$

$$a_1, a_2 \quad (a, b) = 1$$

$$b_1, b_2 \quad (a+b; a^2 - 7ab + b^2) =$$

$$c_1, c_2$$

$$a^2 b^2 c^2 : 2^{55} 7^{68}$$

$$a_1 + b_1 \geq 15$$

$$b_1 + c_1 \geq 17$$

$$a_1 + c_1 \geq$$

$$abc : 2^{28} 7^{34}$$

$$abc = 2^{22} 7^{34}$$

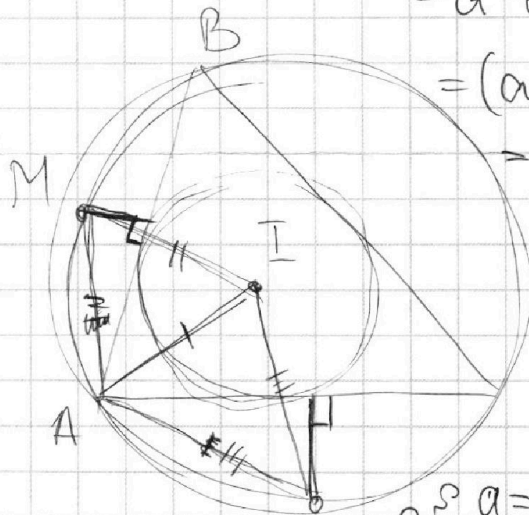
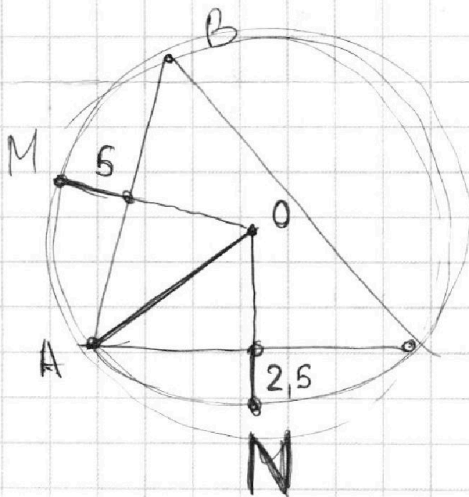
$$c = 2^{13} 7 = (a+b; a^2 - 7ab + b^2 - a^2 - b^2 - 2ab) =$$

$$= (a+b; -9ab) =$$

$$= (a+b; 9ab)$$

$$a : p \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a+b/p$$



$$a_1 + b_1 = 15$$

$$b_1 + c_1 = 17$$

$$a_1 + c_1 =$$

$$a_1 + b_1 = 11$$

$$b_1 + c_1 = 12$$

$$a_1 + b_1 + c_1 = 39$$

$$c_1 = 22$$

$$7^{38}$$

$$a = 2 \cdot 7$$

$$b = 2^{14} \cdot 7^{10}$$

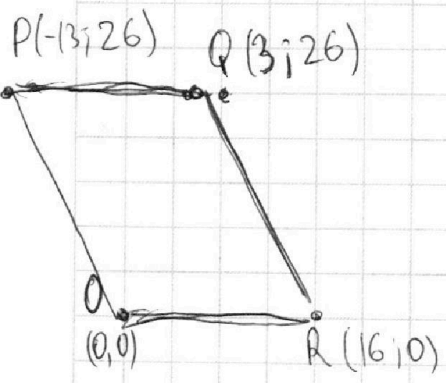
$$c = 23$$

$$2,5 = \sin \frac{\beta}{2} \cdot \frac{b}{2} \cdot \frac{c}{2}$$

$$5 = \frac{b}{2} \cdot \frac{c}{2}$$

$$10 = \frac{b}{2} \cdot \frac{c}{2}$$

$$\text{найдем: } \frac{(b-a)^2}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{b+c}{2 \cos \frac{\alpha}{2}}$$



$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$$

$$(x_1, y_1) \dots (x_1, y_1 + 14)$$