



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9



1. [4 балла] Натуральные числа  $a$ ,  $b$ ,  $c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^{14}7^{10}$ ,  $bc$  делится на  $2^{17}7^{17}$ ,  $ac$  делится на  $2^{20}7^{37}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .

2. [4 балла] Известно, что дробь  $\frac{a}{b}$  несократима ( $a \in \mathbb{N}$ ,  $b \in \mathbb{N}$ ). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}.$$

При каком наибольшем  $m$  могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на  $m$ ?

3. [4 балла] Центр окружности  $\omega$  лежит на окружности  $\Omega$ , хорда  $AB$  окружности  $\Omega$  касается  $\omega$  в точке  $C$  так, что  $AC : CB = 7$ . Найдите длину  $AB$ , если известно, что радиусы  $\omega$  и  $\Omega$  равны 1 и 5 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0; 0)$ ,  $P(-12; 24)$ ,  $Q(3; 24)$  и  $R(15; 0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$ .

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник  $ABC$  вписан в окружность. Пусть  $M$  – середина той дуги  $AB$  описанной окружности, которая не содержит точку  $C$ ;  $N$  – середина той дуги  $AC$  описанной окружности, которая не содержит точку  $B$ . Найдите расстояние от вершины  $A$  до центра окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ , если расстояния от точек  $M$  и  $N$  до сторон  $AB$  и  $AC$  соответственно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Пусть степень вхождения  $z$  в  $a, b, c$  это  $x, y, z$  соответственно, а степень вхождения  $4$  в  $a, b, c$  это  $k, m, l$  соответственно.

Поскольку, т.к.  $ab = 2^{14} \cdot 7^{10}$ ,  $bc = 2^{14} \cdot 7^{14}$  и  $ac = 2^{20} \cdot 7^{37}$ , то.

$$\begin{cases} x+y \geq 14 \\ y+z \geq 14 \\ x+z \geq 20 \end{cases} \Rightarrow 2(x+y+z) \geq 51 \Rightarrow x+y+z \geq 26.$$

$$\begin{cases} k+m \geq 10 \\ m+l \geq 17 \\ k+l \geq 37 \end{cases} \Rightarrow 2(k+m+l) \geq 64 \Rightarrow k+m+l \geq 32, \text{ но}$$

т.к.  $k+l \geq 37$ , то  $k+m+l \geq 37$ .

Заметим, что  $(x+y+z)$  - степень вхождения  $z$  в  $abc$ , а  $(k+l+m)$  - степень вхождения  $4$  в  $abc$ , а значит  $abc \geq 2^{x+y+z} \cdot 4^{k+l+m} \geq$

$\geq 2^{26} \cdot 7^{37}$ . Если  $a = 2^9 \cdot 7^{18}$ ,  $b = 2^6 \cdot 7^{14}$ ,  $c = 2^{11} \cdot 7^{18}$ , то все условия выполняются и  $abc = 2^{26} \cdot 7^{37}$ .

Ответ:  $abc = 2^{26} \cdot 7^{37}$ .

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Пусть заметим, что  $a+b \equiv 0 \pmod{m}$  и  $a^2+b^2-6ab \equiv 0 \pmod{m}$ .  
 $a^2+b^2-6ab = (a+b)^2 - 8ab \equiv -8ab \equiv 0 \pmod{m}$ . Значит,  
таким, что  $(a, m) =: p > 1$ , где  $(a, m)$  — ~~на~~  
НОД чисел  $a$  и  $m$ . Заметим, что  $a \equiv 0 \pmod{p}$  и  
 $a+b \equiv 0 \pmod{m} \Rightarrow a+b \equiv 0 \pmod{p} \Rightarrow b \equiv 0 \pmod{p} \Rightarrow (a, b) =: p > 1$ , но  
такого не может быть, т.к.  $\frac{a}{b}$  — несократимая  
дробь. Значит  $(a, m) = 1$ , по тем же  
самым причинам  $(b, m) = 1$ . Значит  $(ab, m) = 1$ .  
А т.к.  $8ab \equiv 0 \pmod{m}$  и  $(ab, m) = 1$ , то  $8 \equiv 0 \pmod{m} \Rightarrow$   
 $m \leq 8$ . При ~~а~~  $a=5$  и  $b=3$   $\frac{a}{b} = \frac{5}{3}$  — несократимая  
и  $\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2} = \frac{8}{-56} = -\frac{1}{7}$ .

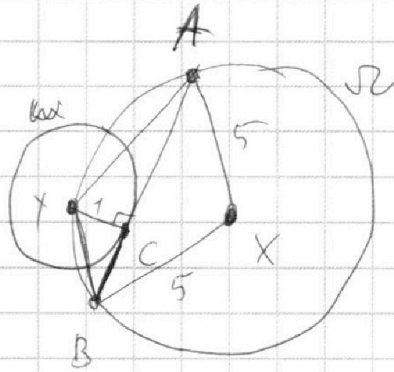
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Заметим, что если  $Y$  и  $X$  — центры окружностей  $\omega$  и  $\Omega$  соответственно, то  $YC \perp AB$ ,

т.к.  $YC$  — радиус, проведенный к точке касания касательной.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{b}{a} = \frac{160 \pm 80}{150} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{80}{150} = \frac{8}{15} \quad \text{или} \quad \frac{b}{a} = \frac{240}{150} = \frac{8}{5}$$

$$\begin{cases} \frac{b}{a} = \frac{8}{15} \Rightarrow b = \frac{8}{15}a \\ a^2 - 25b^2 + 1 = 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \frac{b}{a} = \frac{8}{5} \Rightarrow b = \frac{8}{5}a \\ a^2 - 25b^2 + 1 = 0 \end{cases}$$

$$a^2 - 25 \cdot \frac{64}{225} a^2 + 1 = 0.$$

$$a^2 - 25 \cdot \frac{64}{25} a^2 + 1 = 0.$$

$$63a^2 = 1.$$

$$a = \pm \frac{1}{3\sqrt{7}} \Rightarrow b = \pm \frac{8}{15\sqrt{7}}$$

~~$$a^2 - \frac{64}{9} a^2 + 1 = 0.$$~~

$$a^2 - \frac{64}{9} a^2 + 1 = 0. / \cdot 9.$$

~~$$9a^2 - 64a^2 + 9 = 0.$$~~

~~$$D = 256 - 4 \cdot 81 = 4(256 - 81) = 4 \cdot 175 = 4 \cdot 7 \cdot 25.$$~~

~~$$a = \frac{64 \pm 10\sqrt{7}}{18}$$~~

~~$$b = \frac{8}{15} \cdot \frac{64 \pm 10\sqrt{7}}{18} = \frac{2(64 \pm 10\sqrt{7})}{15 \cdot 9}.$$~~

~~$$\begin{cases} b = \frac{8}{5}a \\ a^2 - 25b^2 + 1 = 0 \\ b^2 = 64 \end{cases}$$~~

$$9a^2 - 64a^2 + 9 = 0.$$

$$55a^2 = 9.$$

$$a^2 = \frac{9}{55} \Rightarrow a = \pm \frac{3}{\sqrt{55}} \Rightarrow b = \pm \frac{8}{5\sqrt{55}}$$

$$\text{Ответ: } a = \pm \frac{1}{3\sqrt{7}}; a = \pm \frac{3}{\sqrt{55}}.$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Знаем  $y = ax + 10b$  - общая касательная  
2х окружностей. Найдем  $a$  и  $b$ , решив  
2 системы.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ y = ax + 10b \end{cases} \Rightarrow (a^2 + 1)x^2 + 20abx + (100b^2 - 4) = 0.$$
$$D = 400a^2b^2 - 4(a^2 + 1)(100b^2 - 4) = 0,$$

т.к. имеет лишь одну точку пересечения.

$$400a^2b^2 - 400a^2b^2 + 16a^2 - 400b^2 + 16 = 0. \quad | : 16.$$

$$a^2 - 25b^2 + 1 = 0. \Rightarrow 1 = 25b^2 - a^2$$

$$\begin{cases} y = ax + 10b \\ (x+8)^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

$$x^2 + 16x + 64 + a^2x^2 + 20abx + 100b^2 = 1.$$

$$x^2(a^2 + 1) + x(20ab + 16) + (100b^2 + 63) = 0.$$

$$D = 400a^2b^2 + 640ab + 256 - 400a^2b^2 - 252a^2 - 400b^2 - 252 = 0.$$

$$640ab - 252a^2 - 400b^2 + 4 = 0 \quad | : 4$$

$$160ab - 63a^2 - 100b^2 + 1 = 0.$$

$$\begin{cases} 160ab - 63a^2 - 100b^2 + 1 = 0 \\ 25b^2 - a^2 = 1 \end{cases}$$

$$160ab - 63a^2 - 100b^2 + 25b^2 - a^2 = 0.$$

$$64a^2 + 75b^2 - 160ab = 0. \quad | : a^2 - y = 10b = \text{const} - \text{не касается}$$

$$45\left(\frac{b}{a}\right)^2 - 160\left(\frac{b}{a}\right) + 64 = 0.$$

$$D = 160^2 - 4 \cdot 64 \cdot 45 = 5^2 \cdot 2^8$$

обеих окружностей.

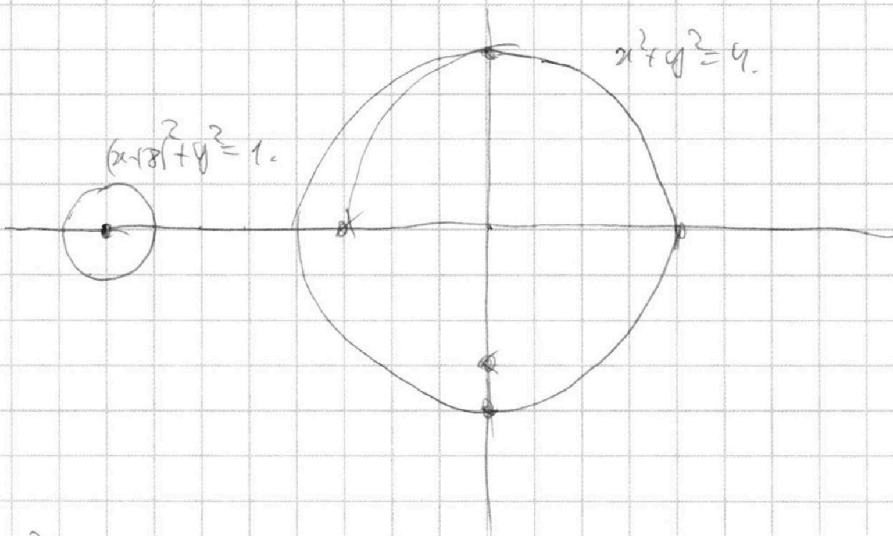
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Заметим, что  $y = ax + b$  — уравнение прямой.  
Если эта прямая не пересекает ни одну  
из окружностей, то  $(x+8)^2 + y^2 > 1$  и  $x^2 + y^2 > 4$ ,  
и  $((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) > 0$ . Если эта прямая  
~~пересекает~~ <sup>касается</sup> окружность в ~~2х~~ <sup>одной</sup> точке, тогда  
любая точка на образованной хорде  
удовлетворяет условию ~~этого~~ <sup>этого</sup> неравенства,  
т.к. лежит <sup>внутри</sup> ~~внутри~~ <sup>снаружи</sup> ~~снаружи~~ окружности и  
вне другой. Значит ~~эта~~ <sup>этого</sup> ~~прямая~~ <sup>прямая</sup> ~~может~~  
~~иметь~~ ~~ровно~~ ~~одну~~ ~~общую~~ <sup>точку</sup>. Если эта прямая  
касается ~~одной~~ <sup>одной</sup> окружности и не пере-  
секает ~~этой~~ <sup>этой</sup>, то  $y$  системы будет ~~лишь~~ <sup>одно</sup> ~~одно~~  
решение.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

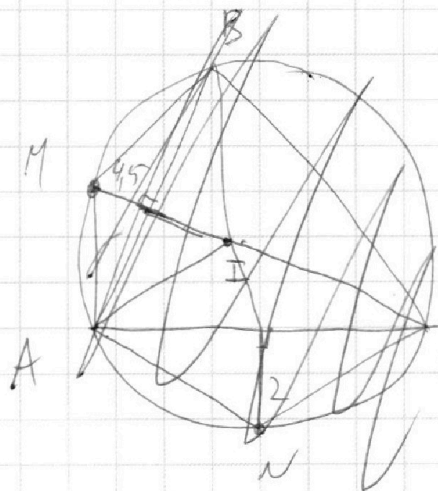
Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



I - центр вписанной окружности  $\triangle ABC$ .

CI - биссектриса  $\angle C$

C проложит через M, т.к. равные  $\angle ICB = \angle ICA$  опираются на равные дуги.

То тем же причинам BI проложит через N. По лемме

$\odot$  хорды  $AN = NC$ ,  $AM = MB$ .

$$\sin \alpha = \frac{4,5}{AM}, \text{ по теор. синусов } \frac{AM}{\sin \alpha} = 2R.$$

$$\sin \beta = \frac{2}{CN}, \text{ по теор. синусов } \frac{CN}{\sin \beta} = 2R, \text{ где } R - \text{ радиус } \triangle ABC.$$

$$\begin{cases} CN \cdot \sin \beta = 2 \\ \frac{CN}{\sin \beta} = 2R \end{cases} \Rightarrow CN = 2R \cdot \sin \beta \Rightarrow 2R \sin^2 \beta = 2 \Rightarrow \sin^2 \beta = \frac{1}{R} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin \beta = \frac{1}{\sqrt{R}}$$

$$\begin{cases} \sin \alpha \cdot AM = 4,5 \\ AM = \sin \alpha \cdot 2R \end{cases} \Rightarrow \sin^2 \alpha \cdot 2R = 4,5 \Rightarrow \sin \alpha = \sqrt{\frac{9}{4R}} =$$

$$= \frac{3}{2\sqrt{R}} \Rightarrow \sin \alpha = 1,5 \sin \beta.$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

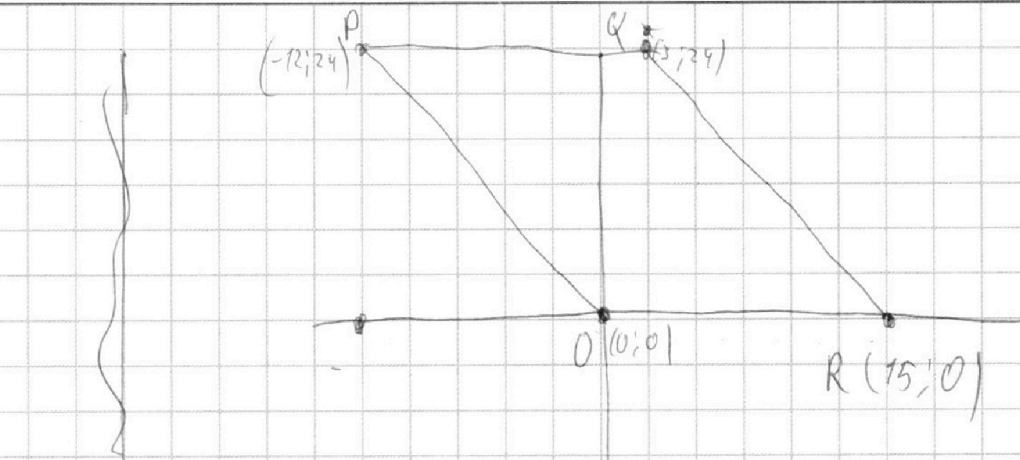
Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$A(x_1; y_1)$$

$$B(x_2; y_2)$$

$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12.$$

$$y_1, y_2 \in [0; 24].$$

$$2|x_2 - x_1| + |y_2 - y_1| = 12.$$

$$x_2 - x_1 = 0.$$

$$y_2 - y_1 = 12.$$

$$2x^2 - 5x + 3 - 2\sqrt{(2x^2 - 5x + 3)/(2x^2 + 2x + 1)}$$



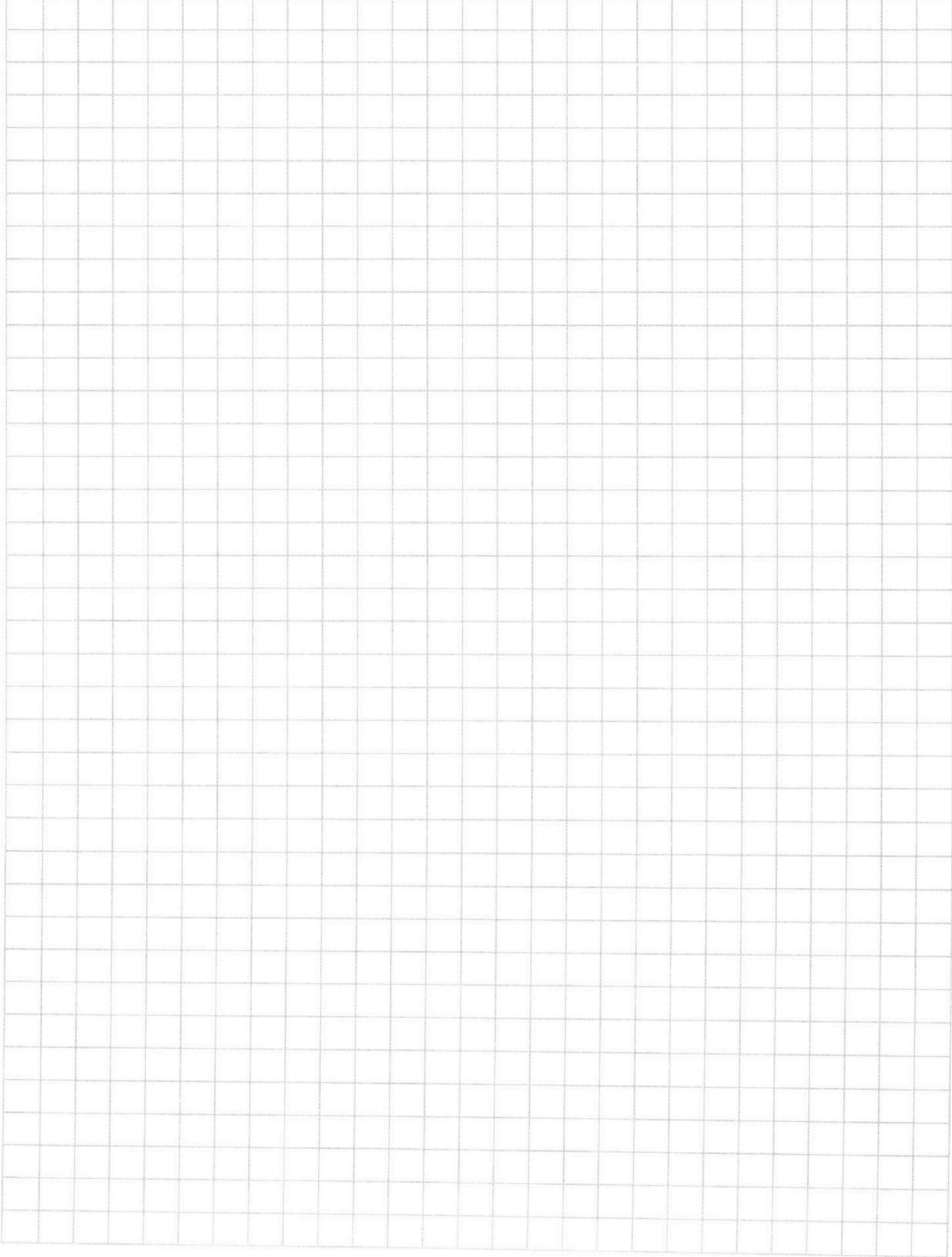
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

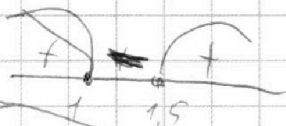
$$\begin{array}{r} -2x^2 - 5x + 3 \mid x-1 \\ 2x^2 - 2x \mid 2x-3 \\ \hline -3x+3 \end{array}$$

$$\sqrt{(x-1)(2x-3)} - \sqrt{x^2 + (x+1)^2} = 2 - 7x.$$

$$(x-1)/(2x-3) \geq 0.$$

$$(x-1)/(x-1.5) \geq 0.$$

$$x \in (-\infty; 1] \cup [1.5; +\infty)$$



$$\begin{cases} CN = 2R \\ \sin B \\ CN \cdot \sin B = 2 \end{cases}$$

$$\sqrt{(x-1)(2x-3)} = (2-7x) + \sqrt{x^2 + (x+1)^2}$$

$$\sqrt{x^2 + (x+1)^2} \geq 1.$$

$$x^2 + (x+1)^2 \geq 1.$$



$$x^2 + (x+1)^2 \geq 2(x+1)x =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$2-7x + \sqrt{x^2 + (x+1)^2} < 0.$$

$$2-7x + \sqrt{x^2 + (x+1)^2} < 0.$$

$$2x^2 - 5x + 3$$

$$\sqrt{2}x.$$

$$4x - 2 > 0 \Rightarrow x > \frac{1}{2}$$

$$x^2 + 2x^2 + 2x + 1 < 40x^2 - 28x + 4$$

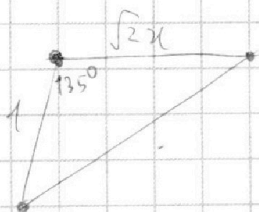
$$4x^2 - 30x + 3 > 0.$$

$$4x - 2 \leq 0.$$

$$x \leq \frac{1}{2}.$$

$$4x^2 - 30x + 4 < 2x^2 + 2x + 1$$

$$4x^2 - 30x + 3 < 0.$$



$$\sqrt{2}x + \sqrt{3}$$

$$2x^2 + 3 - 2 \cos \beta + \sqrt{3} - \sqrt{2}x.$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$100a^2b^2 - 4a^2 + 100b^2 - 4$$

$$x^2 + y^2 = 4$$

$$400a^2b^2 + 640ab + 256$$

$$90 - \alpha - \beta + \alpha = 90 - \beta$$

$$(2+8)x^2 + y^2 = 1 \quad 40 \cdot 16 = 640$$

$$y = ax + 10b$$

$$\begin{cases} y = ax + 10b \\ (2+8)x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

$$x^2 + 16x + 16 + a^2x^2 + 20abx + 100b^2 = 1$$

$$x^2(a^2+1) + x(20ab+16) + (100b^2+63) = 0$$

32

320

$\geq 0$

$\leq 0$

$$63a^2 + 100b^2 - 160ab - 1 = 0$$

$$63a^2 + 100b^2 - 160ab + a^2 - 25b^2 = 0$$

$$64a^2 + 75b^2 - 160ab = 0 \quad /: b^2$$

$$64\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 160\left(\frac{a}{b}\right) + 75 = 0$$

$$\frac{a}{b} = t$$

$$64t^2 - 160t + 75 = 0$$

$$D = 160^2 - 4 \cdot 75 \cdot 64 = 32 \cdot 2^2 \cdot 5 - 2 \cdot 3 \cdot 5^2 = 5^2 \cdot 2^8 (4-3) = 5^2 \cdot 2^8$$

$$t = \frac{160 \pm 80}{128} = \frac{240}{128} = \frac{3 \cdot 5}{8}$$

$$2^4 \cdot 5 = 16 \cdot 5$$

$$\frac{80}{128} = \frac{5}{8}$$

$$\frac{160 \pm 80}{128} = \frac{5}{8} \text{ и } \frac{15}{8}$$

$$\frac{160 \pm 80}{128} = \frac{5}{8} \text{ и } \frac{15}{8}$$

$$D = 400a^2b^2 - 4(a^2+1)(100b^2-4) = 400a^2b^2 - 400a^2b^2 - 16a^2 + 400b^2 - 16 = 0$$

$$a^2 - 25b^2$$

$$a = 5b$$

$$400b^2 - 16a^2 - 16 = 0$$

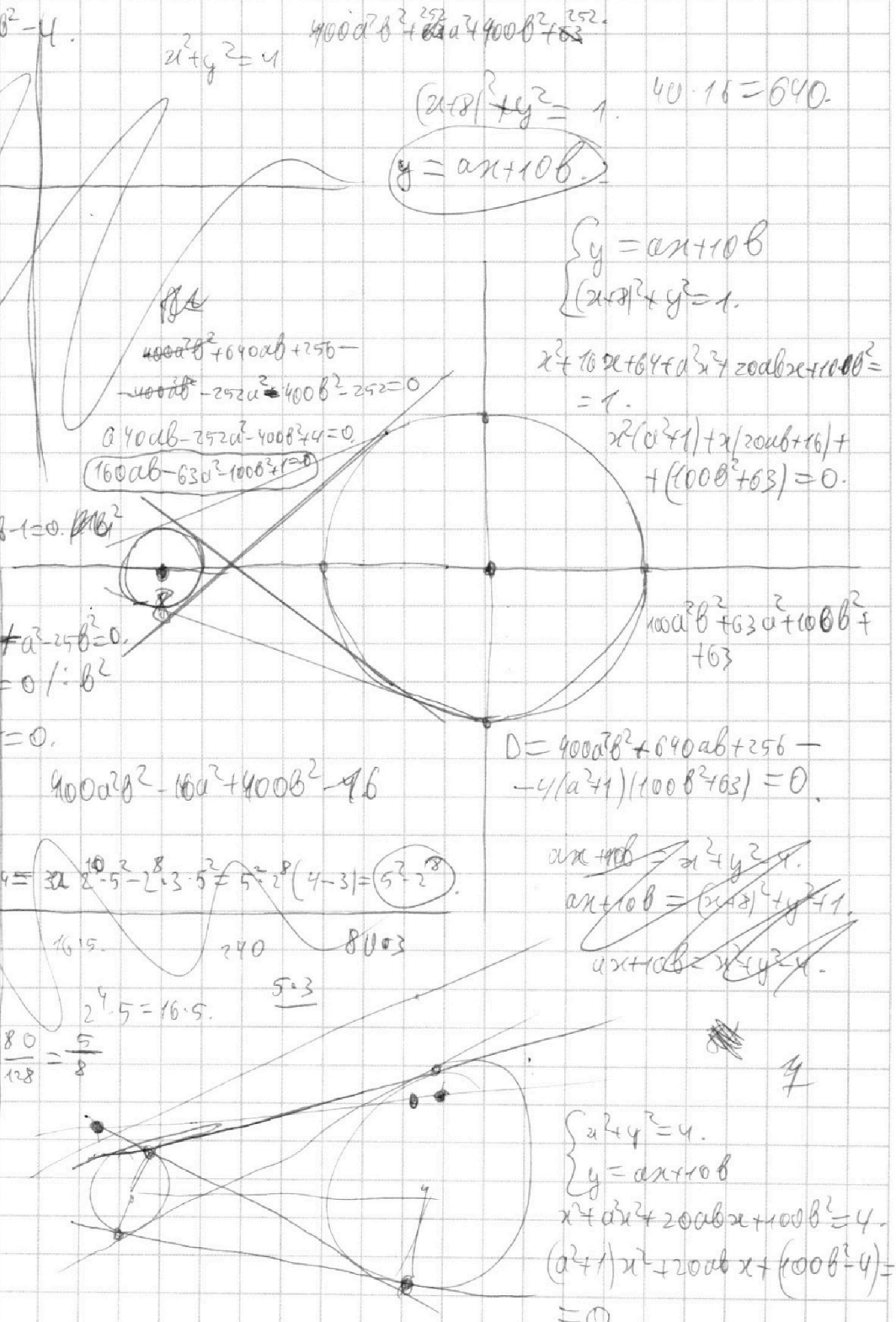
$$25b^2 - a^2 - 1 = 0$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ y = ax + 10b \end{cases}$$

$$x^2 + a^2x^2 + 20abx + 100b^2 = 4$$

$$(a^2+1)x^2 + 20abx + (100b^2-4) = 0$$

$$= 0$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$ab: 2^7 \cdot 7^{10}$$

$$a: 2^x$$

$$a: 7^k$$

$$bc: 2^{14} \cdot 7^{14}$$

$$b: 2^y$$

$$b: 7^m$$

$$ac: 2^{20} \cdot 7^{37}$$

$$c: 2^z$$

$$c: 7^l$$

$$31 + 20$$

$$abc \geq 2^{20} \cdot 7^{37} \cdot 7$$

$$x + y \geq 14$$

$$y + z \geq 14$$

$$x + z \geq 20$$

$$+ \Rightarrow 2x + 2y + 2z \geq 51$$

$$2x + 2y + 2z \geq 52$$

$$x + y + z \geq 26$$

$$k + m \geq 10$$

$$m + l \geq 17$$

$$k + l \geq 37$$

$$k = l$$

$$64$$

$$2(k + m + l) \geq 64$$

$$\begin{cases} x = 10 \\ z = 11 \\ y = 0 \end{cases} \text{ det}$$

~~$$abc \geq 2^{20} \cdot 7^{37} \cdot 7$$~~

$$k \geq 10$$

$$l \geq 19$$

$$abc \geq 7^{37}$$

$$abc = 7^{37}$$

$$a = 2^{10} \cdot 7^{10}$$

$$b = 2^0 \cdot 7^{11}$$

$$c = 2^{11} \cdot 7^{16}$$

$$6 \cdot 15$$

$$m = 0$$

$$k = 19$$

$$k = 18$$

$$abc = 7^{37} \cdot 2^{26}$$

$$m = 8$$

$$10 - 34 = -56$$

наиб m.

$$a + b \equiv 0 \pmod{m}$$

$$a^2 + b^2 - 6ab \equiv 0 \pmod{m}$$

$$a^2 + b^2 + 2ab - 8ab = (a+b)^2 - 8ab \equiv -8ab \equiv 0 \pmod{m}$$

$$\underbrace{a+b}_{a+b} = \underbrace{a+b}_{a+b} \Rightarrow a = 5, b = 3$$

$$\frac{8}{49-42+1} = \frac{8}{8} = 1$$

$$\frac{8}{25-20+9} = \frac{8}{-56} = -\frac{1}{7}$$

$$\# \begin{cases} -8ab \equiv 0 \pmod{m} \\ 8ab \equiv 0 \pmod{m} \end{cases} \Rightarrow -8a(-a) \equiv 8a^2 \equiv 0 \pmod{m}$$

$$8ab \equiv 0 \pmod{m}$$

$$a+b \equiv 0 \pmod{m} \Rightarrow -a \equiv b \pmod{m}$$

$$8ab \equiv m$$

$$a+b \equiv m$$

если  $(a, m) = p$

$$a+b \equiv 0 \pmod{p} \Rightarrow b \equiv 0 \pmod{p}$$

$$\Rightarrow (a, b) = p \neq 1, X$$

$$(a, b) = 1, (a, m) = 1 = (b, m)$$

$$(ab, m) = 1 \Rightarrow 8 \equiv m \Rightarrow m \equiv 8$$



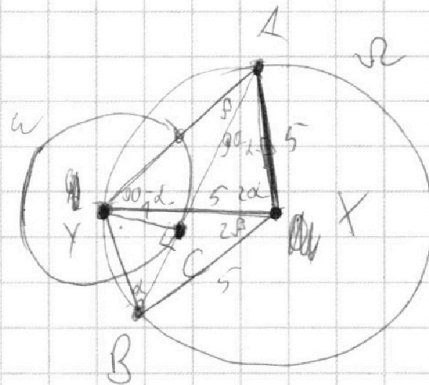
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{180 - 2\alpha}{2} = 90 - \alpha$$

$$\frac{AC}{CB} = 2$$

$$AC = 2CB$$

AB = ?

$$\sin \alpha = \frac{YC}{YB} = \frac{1}{YB} \rightarrow YB = \frac{1}{\sin \alpha}$$

$$\frac{360 - 2\alpha - 2\beta}{2} = 180 - \alpha - \beta$$

$$\frac{AY}{\sin \alpha} = 10$$

$$CB = \cos \alpha \cdot YB = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \cot \alpha$$

$$AB = 8CB$$

$$\sin(90 - \alpha)$$

$$S_{AYB} = \frac{AB}{2} = \frac{CB}{2} + \frac{AC}{2} = 4CB$$

$$AY = 10 \sin \alpha$$

$$\sin \alpha = \frac{1}{YB}$$

$$AY = \frac{10}{YB}$$

$$\frac{YB}{\sin \beta} = 10$$

$$S_{AYB} = \frac{AY \cdot \sin(\alpha + \beta) \cdot YB}{2} = 5 \sin(\alpha + \beta)$$

$$AY \cdot YB = 10$$

~~CB = 2~~

$$\frac{AB}{\sin(\alpha + \beta)} = 10$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \frac{AB}{10}$$

$$\frac{AY}{\sin 2\alpha} = \frac{5}{\cos \alpha}$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

AY

$$\frac{AY}{2 \sin \alpha \cos \alpha} = \frac{5}{\cos \alpha}$$

~~AY = 10~~

$$\cos \alpha = \frac{CB}{YB} \quad \sin \alpha = \frac{AY}{10} \quad \sin \beta = \frac{YB}{10}$$

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{AY}{10} \cdot \frac{CB}{YB} = \frac{CB}{10}$$

$$\cos \beta = \frac{AC}{YA} = \frac{2CB \cdot YB}{10} \quad 1 - \cos^2 \alpha + \sin^2 \beta = 2 \sin^2 \alpha$$

$$\sin \beta \cos \alpha = \frac{YB}{10} \cdot \frac{CB}{YB} = \frac{CB}{10}$$

$$AY^2 = 50 - 2 \cos 2\alpha \cdot 25 = 50(1 - \cos 2\alpha) = 50 \cdot 2 \sin^2 \alpha \rightarrow AY = 10$$