



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9



1. [4 балла] Натуральные числа a , b , c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-12; 24)$, $Q(3; 24)$ и $R(15; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Пусть степень вхождения z в a, b, c это x, y, z соответственно, а степень вхождения 4 в a, b, c это k, m, l соответственно.

Поскольку, т.к. $ab = 2^{14} \cdot 7^{10}$, $bc = 2^{14} \cdot 7^{14}$ и $ac = 2^{20} \cdot 7^{37}$, то

$$\begin{cases} x+y \geq 14 \\ y+z \geq 14 \\ x+z \geq 20 \end{cases} \Rightarrow 2(x+y+z) \geq 51 \Rightarrow x+y+z \geq 26.$$

$$\begin{cases} k+m \geq 10 \\ m+l \geq 17 \\ k+l \geq 37 \end{cases} \Rightarrow 2(k+m+l) \geq 64 \Rightarrow k+m+l \geq 32, \text{ но}$$

т.к. $k+l \geq 37$, то $k+m+l \geq 37$.

Заметим, что $(x+y+z)$ - степень вхождения z в abc , а $(k+l+m)$ - степень вхождения 4 в abc , а значит $abc \geq 2^{x+y+z} \cdot 4^{k+l+m} \geq$

$\geq 2^{26} \cdot 7^{37}$. Если $a = 2^9 \cdot 7^{18}$, $b = 2^6 \cdot 7^{14}$, $c = 2^{11} \cdot 7^{18}$, то все условия выполняются и $abc = 2^{26} \cdot 7^{37}$.

Ответ: $abc = 2^{26} \cdot 7^{37}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Пусть заметим, что $a+b \equiv 0 \pmod{m}$ и $a^2+b^2-6ab \equiv 0 \pmod{m}$.
 $a^2+b^2-6ab = (a+b)^2 - 8ab \equiv -8ab \equiv 0 \pmod{m}$. Значит,
таким, что $(a, m) =: p > 1$, где (a, m) — ~~на~~
НОД чисел a и m . Заметим, что $a \equiv 0 \pmod{p}$ и
 $a+b \equiv 0 \pmod{m} \Rightarrow a+b \equiv 0 \pmod{p} \Rightarrow b \equiv 0 \pmod{p} \Rightarrow (a, b) =: p > 1$, но
такого не может быть, т.к. $\frac{a}{b}$ — несократимая
дробь. Значит $(a, m) = 1$, по тем же
самым причинам $(b, m) = 1$. Значит $(ab, m) = 1$.
А т.к. $8ab \equiv 0 \pmod{m}$ и $(ab, m) = 1$, то $8 \equiv 0 \pmod{m} \Rightarrow$
 $m \leq 8$. При ~~а~~ $a=5$ и $b=3$ $\frac{a}{b} = \frac{5}{3}$ — несократимая
и $\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2} = \frac{8}{-56} = -\frac{1}{7}$.

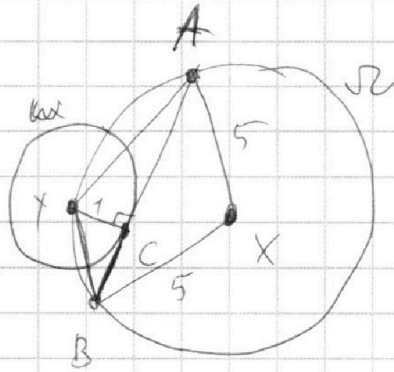
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Заметим, что если Y и X — центры окружностей ω и Ω соответственно, то $YC \perp AB$,

т.к. YC — радиус, проведенный к точке касания касательной.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МОФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{b}{a} = \frac{160 \pm 80}{150} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{80}{150} = \frac{8}{15} \quad \text{или} \quad \frac{b}{a} = \frac{240}{150} = \frac{8}{5}$$

$$\begin{cases} \frac{b}{a} = \frac{8}{15} \Rightarrow b = \frac{8}{15}a \\ a^2 - 25b^2 + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\text{или} \quad \begin{cases} \frac{b}{a} = \frac{8}{5} \Rightarrow b = \frac{8}{5}a \\ a^2 - 25b^2 + 1 = 0 \end{cases}$$

$$a^2 - 25 \cdot \frac{64}{225} a^2 + 1 = 0$$

$$a^2 - 25 \cdot \frac{64}{25} a^2 + 1 = 0$$

$$63a^2 = 1$$

$$a = \pm \frac{1}{3\sqrt{7}} \Rightarrow b = \pm \frac{8}{15\sqrt{7}}$$

~~$$a^2 - \frac{64}{9} a^2 + 1 = 0$$~~

$$a^2 - \frac{64}{9} a^2 + 1 = 0 \cdot | \cdot 9$$

~~$$9a^2 - 64a^2 + 9 = 0$$~~

~~$$D = 25 - 4 \cdot 81 = 4(25 - 81) = 4 \cdot 145 = 4 \cdot 5 \cdot 29$$~~

~~$$a = \frac{64 \pm 10\sqrt{5}}{18}$$~~

~~$$b = \frac{8}{15} \cdot \frac{64 \pm 10\sqrt{5}}{18} = \frac{2(64 \pm 10\sqrt{5})}{15 \cdot 9}$$~~

~~$$\begin{cases} b = \frac{8}{5}a \\ a^2 - 25b^2 + 1 = 0 \\ b^2 = 64 \end{cases}$$~~

$$9a^2 - 64a^2 + 9 = 0$$

$$55a^2 = 9$$

$$a^2 = \frac{9}{55} \Rightarrow a = \pm \frac{3}{\sqrt{55}} \Rightarrow b = \pm \frac{8}{5\sqrt{55}}$$

$$\text{Ответ: } a = \pm \frac{1}{3\sqrt{7}}; \quad a = \pm \frac{3}{\sqrt{55}}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Знаем $y = ax + 10b$ - общая касательная
2х окружностей. Найдем a и b , решив
2 системы.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ y = ax + 10b \end{cases} \Rightarrow (a^2 + 1)x^2 + 20abx + (100b^2 - 4) = 0.$$
$$D = 400a^2b^2 - 4(a^2 + 1)(100b^2 - 4) = 0,$$

т.к. имеет лишь одну точку пересечения.

$$400a^2b^2 - 400a^2b^2 + 16a^2 - 400b^2 + 16 = 0. \quad | : 16.$$

$$a^2 - 25b^2 + 1 = 0. \Rightarrow 1 = 25b^2 - a^2$$

$$\begin{cases} y = ax + 10b \\ (x+8)^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

$$x^2 + 16x + 64 + a^2x^2 + 20abx + 100b^2 = 1.$$

$$x^2(a^2 + 1) + x(20ab + 16) + (100b^2 + 63) = 0.$$

$$D = 400a^2b^2 + 640ab + 256 - 400a^2b^2 - 252a^2 - 400b^2 - 252 = 0.$$

$$640ab - 252a^2 - 400b^2 + 4 = 0 \quad | : 4$$

$$160ab - 63a^2 - 100b^2 + 1 = 0.$$

$$\begin{cases} 160ab - 63a^2 - 100b^2 + 1 = 0 \\ 25b^2 - a^2 = 1 \end{cases}$$

$$160ab - 63a^2 - 100b^2 + 25b^2 - a^2 = 0.$$

$$64a^2 + 75b^2 - 160ab = 0. \quad | : a^2 - y = 10b = \text{const} - \text{не касается}$$

$$45\left(\frac{b}{a}\right)^2 - 160\left(\frac{b}{a}\right) + 64 = 0.$$

$$D = 160^2 - 4 \cdot 64 \cdot 45 = 5^2 \cdot 2^8$$

обеих окружностей.



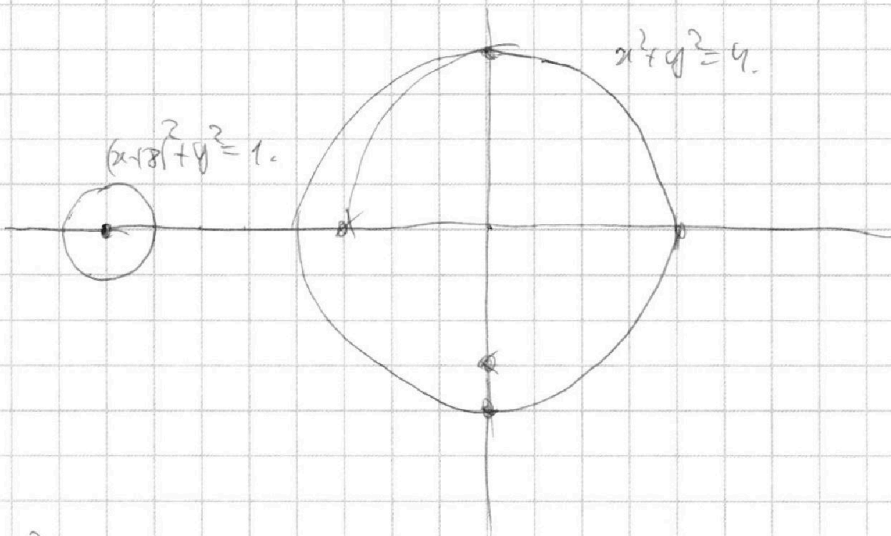
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Заметим, что $y = ax + b$ — уравнение прямой.
Если эта прямая не пересекает ни одну
из окружностей, то $(x+8)^2 + y^2 > 1$ и $x^2 + y^2 > 4$,
и $((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) > 0$. Если эта прямая
~~пересекает~~ ^{касается} окружность в ~~одной~~ ^{одной} точке, тогда
любая точка на образованной хорде
удовлетворяет условию ~~этого~~ ^{этого} неравенства,
т.к. лежит ^{внутри} ~~внутри~~ ^{снаружи} ~~снаружи~~ окружности ^и ~~и~~
вне другой. Значит ~~эта~~ ^{эта} ~~прямая~~ ^{прямая} ~~может~~
~~иметь~~ ~~ровно~~ ~~одну~~ ~~общую~~ ^{точку}. Если эта прямая
касается одной окружности и не пере-
секает ~~эту~~ ^{эту}, то y системы будет лишь одно
решение.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

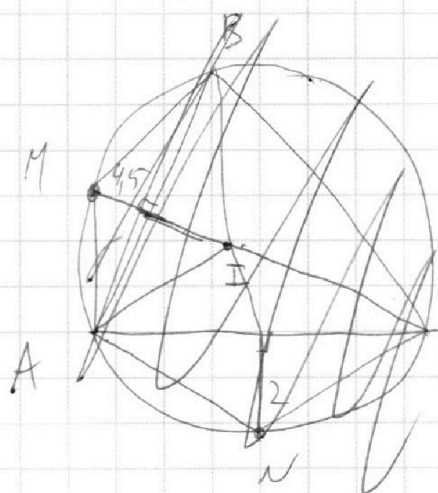
Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



I - центр вписанной окружности $\triangle ABC$.

CI - биссектриса $\sphericalangle C$

C проложит через M , т.к. равные $\sphericalangle ICB = \sphericalangle ICA$ опираются на равные дуги.

То тем же принципом BI

проложит через N . По лемме

\odot хорды $AN = NC$, $AM = MB$.

$$\sin \alpha = \frac{4,5}{AM}, \text{ по теор. синусов } \frac{AM}{\sin \alpha} = 2R.$$

$$\sin \beta = \frac{2}{CN}, \text{ по теор. синусов } \frac{CN}{\sin \beta} = 2R, \text{ где } R - \text{ радиус } \triangle ABC.$$

$$\begin{cases} CN \cdot \sin \beta = 2 \\ \frac{CN}{\sin \beta} = 2R \end{cases} \Rightarrow CN = 2R \cdot \sin \beta \Rightarrow 2R \sin^2 \beta = 2 \Rightarrow \sin^2 \beta = \frac{1}{R} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin \beta = \frac{1}{\sqrt{R}}$$

$$\begin{cases} \sin \alpha \cdot AM = 4,5 \\ AM = \sin \alpha \cdot 2R \end{cases} \Rightarrow \sin^2 \alpha \cdot 2R = 4,5 \Rightarrow \sin \alpha = \sqrt{\frac{9}{4R}} =$$

$$= \frac{3}{2\sqrt{R}} \Rightarrow \sin \alpha = 1,5 \sin \beta.$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

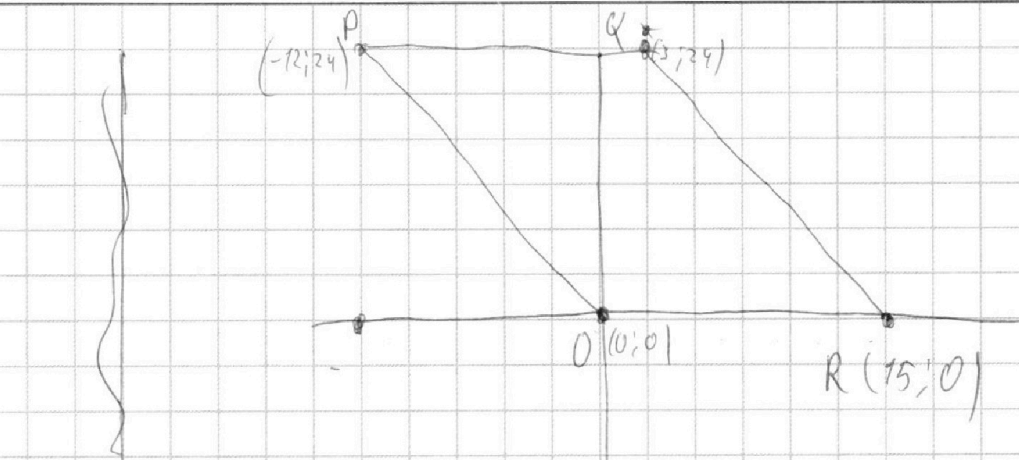
Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$A(x_1; y_1)$$

$$B(x_2; y_2)$$

$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12.$$

$$y_1, y_2 \in [0; 24].$$

$$2|x_2 - x_1| + |y_2 - y_1| = 12.$$

$$x_2 - x_1 = 0.$$

$$y_2 - y_1 = 12.$$

$$2x^2 - 5x + 3 - 2\sqrt{(2x^2 - 5x + 3)/(2x^2 + 2x + 1)}$$



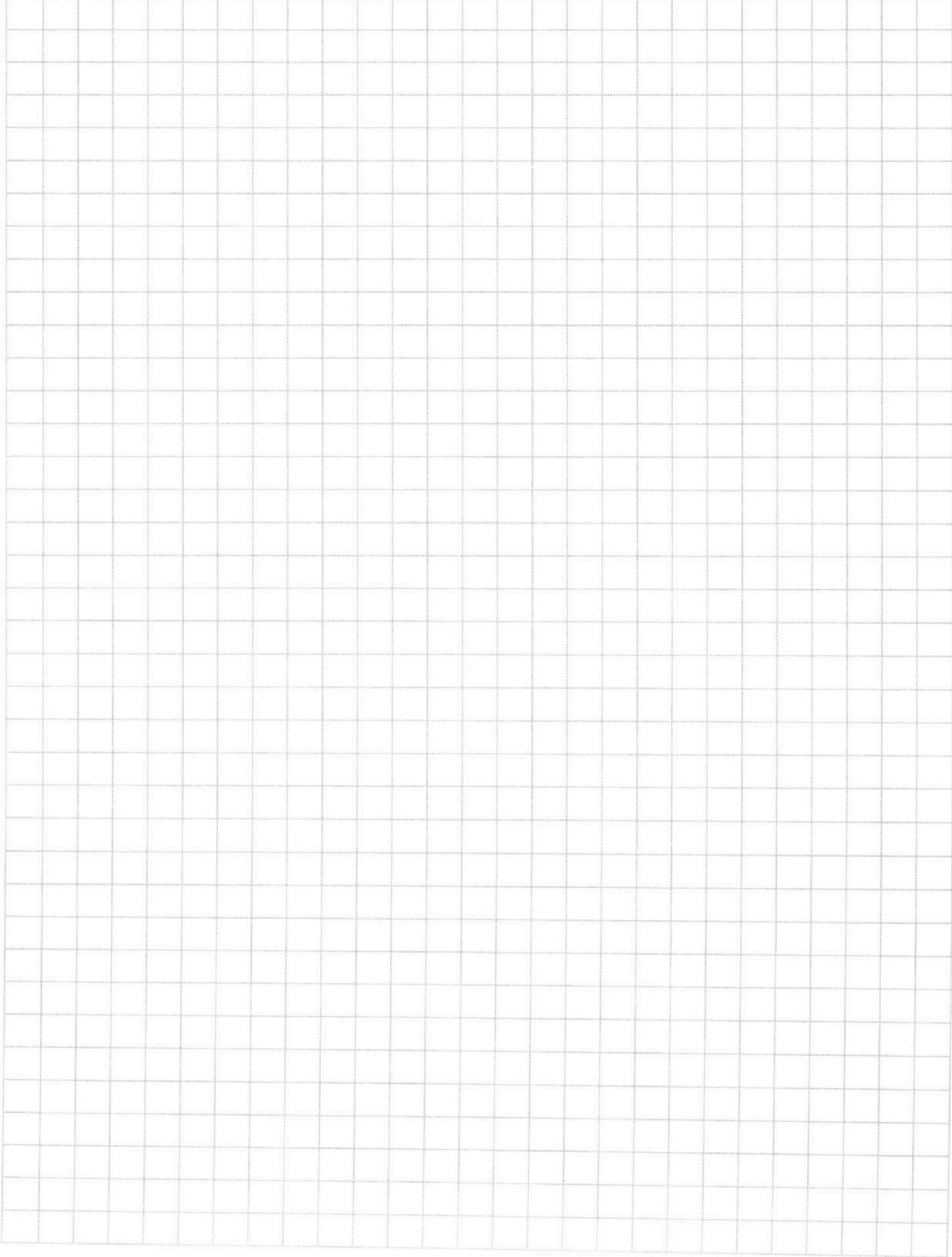
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

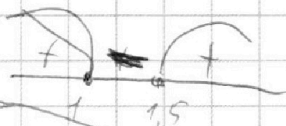
$$\begin{array}{r} -2x^2 - 5x + 3 \mid x-1 \\ 2x^2 - 2x \mid 2x-3 \\ \hline -3x+3 \end{array}$$

$$\sqrt{(x-1)(2x-3)} - \sqrt{x^2 + (x+1)^2} = 2 - 7x.$$

$$(x-1)/(2x-3) \geq 0.$$

$$(x-1)/(x-1.5) \geq 0.$$

$$x \in (-\infty; 1] \cup [1.5; +\infty)$$



$$\begin{cases} CN = 2R \\ \sin B \\ CN \cdot \sin B = 2 \end{cases}$$

$$\sqrt{(x-1)(2x-3)} = (2-7x) + \sqrt{x^2 + (x+1)^2}$$

$$\sqrt{x^2 + (x+1)^2} \geq 1.$$

$$x^2 + (x+1)^2 \geq 1.$$



$$x^2 + (x+1)^2 \geq 2(x+1)x =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$2x^2 - 5x + 3$$

$$\sqrt{2}x.$$

$$1) \quad 4x - 2 > 0.$$

$$x^2 + 2x^2 + 2x + 1 < 4x^2 - 28x + 4$$

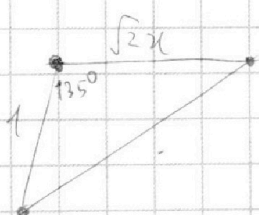
$$4x^2 - 30x + 3 > 0.$$

$$4x - 2 \leq 0.$$

$$x \leq \frac{2}{4}.$$

$$4x^2 - 28x + 4 < 2x^2 + 2x + 1$$

$$4x^2 - 30x + 3 < 0.$$



$$\sqrt{2}x + \sqrt{3}.$$

$$2x^2 + 3 - 2 \cos \beta + \sqrt{3} - \sqrt{2}x.$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$100a^2b^2 - 4a^2 + 100b^2 - 4$$

$$x^2 + y^2 = 4$$

$$400a^2b^2 + 640ab + 256$$

$$90 - \alpha - \beta + \alpha = 90 - \beta$$

$$(2+8)x^2 + y^2 = 1 \quad 40 \cdot 16 = 640$$

$$y = ax + 10b$$

$$\begin{cases} y = ax + 10b \\ (2+8)x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

$$x^2 + 16x + 16 + a^2x^2 + 20abx + 100b^2 = 1$$

$$x^2(a^2+1) + x(20ab+16) + (100b^2+63) = 0$$

32

320

≥ 0

≤ 0

$$63a^2 + 100b^2 - 160ab - 1 = 0$$

$$63a^2 + 100b^2 - 160ab + a^2 - 25b^2 = 0$$

$$64a^2 + 45b^2 - 160ab = 0 \quad /: b^2$$

$$64\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 160\left(\frac{a}{b}\right) + 45 = 0$$

$$\frac{a}{b} = t$$

$$64t^2 - 160t + 45 = 0$$

$$D = 160^2 - 4 \cdot 45 \cdot 64 = 32 \cdot 2^2 \cdot 5 - 2 \cdot 3 \cdot 5^2 = 5^2 \cdot 2^8 (4-3) = 5^2 \cdot 2^8$$

$$t = \frac{160 \pm 80}{128} = \frac{240}{128} = \frac{3 \cdot 5}{4}$$

$$\frac{80}{128} = \frac{5}{8}$$

$$\frac{160 \pm 80}{128} = \left(\frac{5}{8}, \frac{15}{8}\right)$$

325

$$\frac{160 \pm 80}{128}$$

$$\left(\frac{5}{8}, \frac{15}{8}\right)$$

$$D = 400a^2b^2 - 4(a^2+1)(100b^2-4) = 400a^2b^2 - 400a^2b^2 - 16a^2 + 400b^2 - 16 = 0$$

$$a^2 - 25b^2$$

$$a = 5b$$

$$400b^2 - 16a^2 - 16 = 0$$

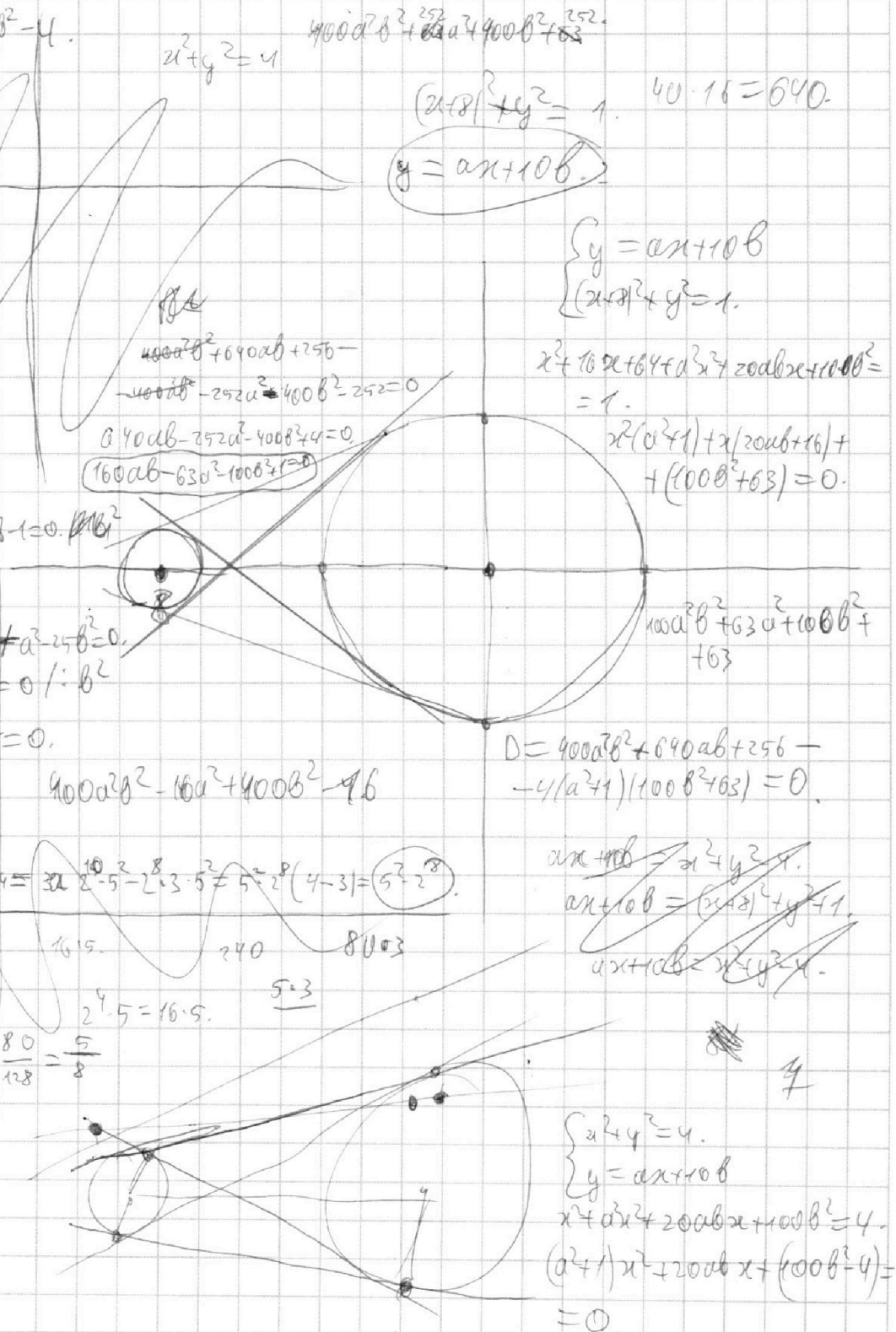
$$25b^2 - a^2 - 1 = 0$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ y = ax + 10b \end{cases}$$

$$x^2 + a^2x^2 + 20abx + 100b^2 = 4$$

$$(a^2+1)x^2 + 20abx + (100b^2-4) = 0$$

$$= 0$$





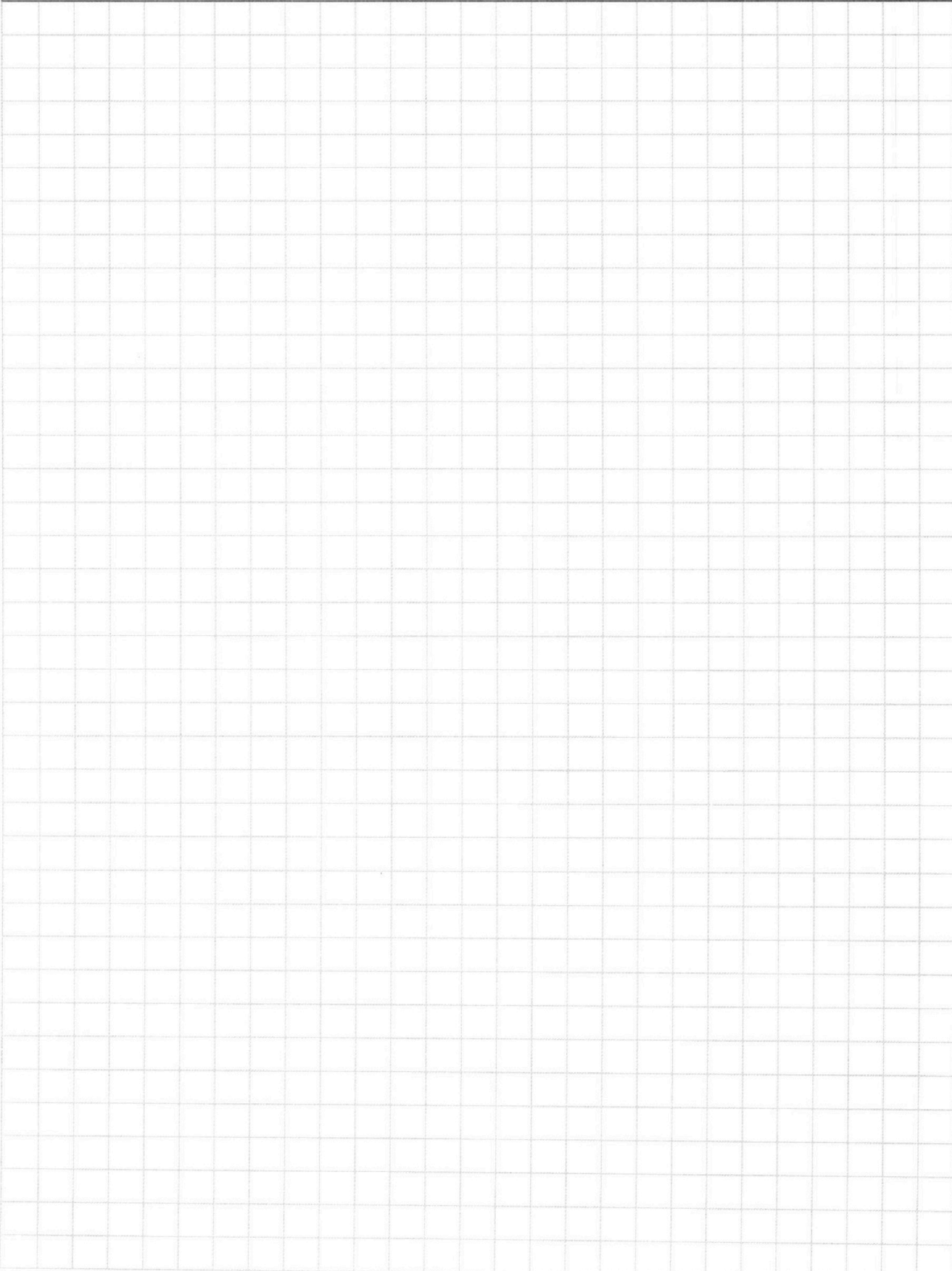
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$ab: 2^7 \cdot 7^{10}$$

$$a: 2^x$$

$$a: 7^k$$

$$bc: 2^{14} \cdot 7^{14}$$

$$b: 2^y$$

$$b: 7^m$$

$$ac: 2^{20} \cdot 7^{37}$$

$$c: 2^z$$

$$c: 7^l$$

$$abc \geq 2^{20} \cdot 7^{37} \cdot 7$$

$$x+y \geq 14$$

$$y+z \geq 14$$

$$x+z \geq 20$$

$$\rightarrow 2x+2y+2z \geq 51$$

$$2x+2y+2z \geq 52$$

$$x+y+z \geq 26$$

$$k+m \geq 10$$

$$m+l \geq 17$$

$$k+l \geq 37$$

$$k=l$$

$$64$$

$$2(k+m+l) \geq 64$$

$$k+m+l \geq 32$$

$$\begin{cases} x=10 \\ z=11 \\ y=6 \end{cases} \text{ det}$$

~~$$abc \geq 2^{20} \cdot 7^{37} \cdot 7$$~~

$$k \geq 10$$

$$l \geq 19$$

$$abc \geq 7^{37}$$

$$abc = 7^{37}$$

$$a = 2^{10} \cdot 7^{10}$$

$$b = 2^6 \cdot 7^{11}$$

$$c = 2^{11} \cdot 7^{15}$$

$$6 \cdot 15$$

$$m=0$$

$$k=19$$

$$k=18$$

$$abc = 7^{37} \cdot 2^{26}$$

$$m=8$$

$$10-34 = -56$$

наиб m.

$$a+b \equiv 0 \pmod{m}$$

$$a^2+b^2-2ab \equiv 0 \pmod{m}$$

$$a^2+b^2+2ab-2ab = (a+b)^2 - 2ab \equiv -2ab \equiv 0 \pmod{m}$$

$$\# \begin{cases} -2ab \equiv 0 \pmod{m} \\ \Rightarrow -2a(-a) \equiv 2a^2 \equiv 0 \pmod{m} \end{cases}$$

$$2ab \equiv 0 \pmod{m}$$

$$a+b \equiv 0 \pmod{m} \Rightarrow -a \equiv b \pmod{m}$$

$$\begin{cases} 2ab \equiv 0 \pmod{m} \\ a+b \equiv 0 \pmod{m} \end{cases}$$

если $(a, m) = p$

$$a+b \equiv 0 \pmod{p} \Rightarrow b \equiv 0 \pmod{p}$$

$$\begin{cases} a \equiv 0 \pmod{p} \\ b \equiv 0 \pmod{p} \end{cases} \Rightarrow (a, b) = p \neq 1 \cdot X$$

$$(a, b) = 1$$

$$(a, m) = 1 = (b, m)$$

$$(ab, m) = 1 \Rightarrow 8 \equiv m \rightarrow m \neq 8$$



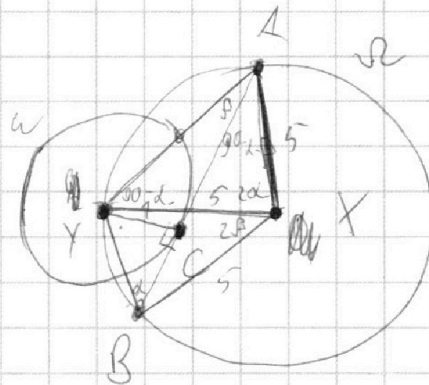
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{180-2\alpha}{2} = 90-\alpha$$

$$\frac{AC}{CB} = 2$$

$$AC = 2CB$$

$AB = ?$

$$\sin \alpha = \frac{YC}{YB} = \frac{1}{YB} \rightarrow YB = \frac{1}{\sin \alpha}$$

$$\frac{360-2\alpha-2\beta}{2} = 180-\alpha-\beta$$

$$\frac{AY}{\sin \alpha} = 10$$

$$CB = \cos \alpha \cdot YB = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \cot \alpha$$

$$AB = 8CB$$

$$\sin(90-\alpha)$$

$$S_{AYB} = \frac{AB}{2} = \frac{CB}{2} + \frac{AC}{2} = 4CB$$

$$AY = 10 \sin \alpha$$

$$\sin \alpha = \frac{1}{YB}$$

$$AY = \frac{10}{YB}$$

$$\frac{YB}{\sin \beta} = 10$$

$$S_{AYB} = \frac{AY \cdot \sin(\alpha+\beta) \cdot YB}{2} = 5 \sin(\alpha+\beta)$$

$$AY \cdot YB = 10$$

~~$CB = 2$~~

$$\frac{AB}{\sin(\alpha+\beta)} = 10$$

$$\sin(\alpha+\beta) = \frac{AB}{10}$$

$$\frac{AY}{\sin 2\alpha} = \frac{5}{\cos \alpha}$$

$$\frac{AY}{2 \sin \alpha \cos \alpha} = \frac{5}{\cos \alpha}$$

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

AY

~~$AY = 10$~~

$$\cos \alpha = \frac{CB}{YB} \quad \sin \alpha = \frac{AY}{10} \quad \sin \beta = \frac{YB}{10}$$

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{AY}{10} \cdot \frac{CB}{YB} = \frac{AY \cdot CB}{AY \cdot YB} = \frac{CB}{10}$$

$$\cos \beta = \frac{AC}{YA} = \frac{2CB \cdot YB}{10} \quad 1 - \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 2 \sin^2 \alpha$$

$$\sin \beta \cos \alpha = \frac{YB}{10} \cdot \frac{CB}{YB} = \frac{CB}{10}$$

$$AY^2 = 50 - 2 \cos 2\alpha \cdot 25 = 50(1 - \cos 2\alpha) = 50 \cdot 2 \sin^2 \alpha \rightarrow AY = 10$$