



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^9 3^{10} 5^{10}$, bc делится на $2^{14} 3^{13} 5^{13}$, ac делится на $2^{19} 3^{18} 5^{30}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой BC в точке B , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке F , а катет AC – в точке E . Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 3 : 1$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF .

3. [4 балла] Решите уравнение $5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2} (3^{11}) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-14; 42)$, $Q(6; 42)$ и $R(20; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 90, $SA = BC = 12$.

а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1 .

б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

51 $\min(a \cdot b \cdot c) = ?$

$a \cdot b : 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10}$ $b \cdot c : 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^8$ $a \cdot c : 2^{19} \cdot 3^{16} \cdot 5^{20}$

Если $a : 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10}$, то $c : 2^{10} \cdot 3^6 \cdot 5^{10}$, то $b : 2^4 \cdot 3^7 \cdot 5^1$

~~$a \cdot b \cdot c : 2^{23} \cdot 3^{23} \cdot 5^{21}$~~

$a : 2^8$, то $b : 2^6$, то $c : 2^{13} \Rightarrow a \cdot b \cdot c : 2^{22}$

Если $a : 2^7$, то $b : 2^7$, то $c : 2^{12} \Rightarrow a \cdot b \cdot c : 2^{22}$

$a : 2^6$, то $b : 2^8$, то $c : 2^{13} \Rightarrow a \cdot b \cdot c : 2^{23}$

$2^{22} - \min$

Минимум: 2^{22}

Если $a : 3^8$, то $b : 3^2$, то $c : 3^{11}$ $a \cdot b \cdot c : 3^{21}$

$a : 3^7$,

$2^{22} \cdot 3^{21} \cdot 5^{26}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

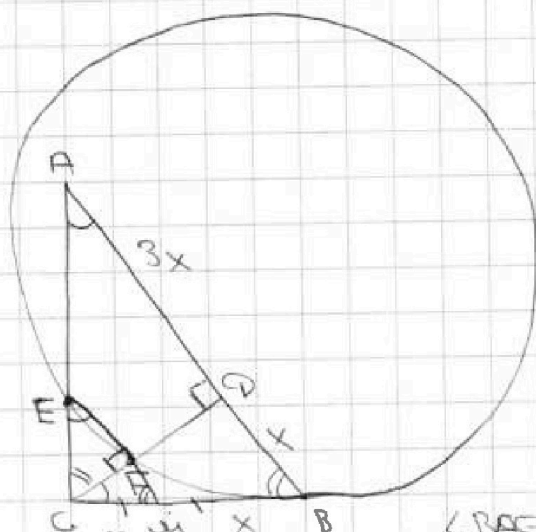
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

52



$$AB \parallel EF \quad \frac{AF}{FB} = \frac{3}{1} = \frac{3x}{x}$$

$$\frac{S_{ABC}}{S_{CEF}} = ?$$

$$CF^2 = AF \cdot FB = 3x \cdot x = 3x^2$$

$$CF = \sqrt{3}x$$

По т. Пиф. в $\triangle CFB$:

$$CB = \sqrt{3x^2 + x^2} = 2x$$

По т. Пиф. в $\triangle ABC$:

$$AC = \sqrt{16x^2 - 4x^2} = 2\sqrt{3}x$$

$$\sin \angle BAC = \frac{BC}{AB} = \frac{2x}{4x} = \frac{1}{2}$$

$$\left. \begin{aligned} \angle BAC &= 90^\circ - \angle ABC \\ \angle FCB &= 90^\circ - \angle ABC \end{aligned} \right\} \angle BAC = \angle FCB$$

$$\angle BAC = \angle MEC (\text{верт.})$$

$$\Rightarrow \sin \angle FCB = \sin \angle MEC = \frac{FM}{EM} = \frac{CM}{EM} \Rightarrow CM^2 = FM \cdot EM$$

~~Стор. в $\triangle ABC$~~

$$\sin \angle FCB = \sin \angle MEC = \frac{FM}{EM} = \frac{CM}{EM}$$

$$BM^2 = EM \cdot FM (\text{кас. и сек.})$$

$$BM = CM$$

$$\frac{AF}{CE} = \frac{MB}{CM} = 1 (\text{верт.}) \Rightarrow AE = CE = \frac{AC}{2} = \sqrt{3}x$$

$$= \frac{BC}{2} = x$$

$$\frac{CF}{FP} = \frac{CM}{MB} = 1 (\text{верт.}) \Rightarrow CF = FP = \frac{1}{2} = \frac{CF}{2} = \frac{\sqrt{3}x}{2}$$

$$\triangle CEF \sim \triangle CAP (\text{по 2 угл.}) \quad k = \frac{1}{2} \Rightarrow EF = \frac{1}{2} AP = \frac{3}{2}x$$

$$S_{CEF} = \frac{1}{2} CF \cdot EF = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}x}{2} \cdot \frac{3x}{2} = \frac{3\sqrt{3}x^2}{8}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3}x \cdot 2x = 2\sqrt{3}x^2$$

$$\frac{S_{CEF}}{S_{ABC}} = \frac{2\sqrt{3}x^2 \cdot \frac{3}{8}}{2\sqrt{3}x^2} = \frac{3}{8}$$

$$\text{Ответ: } \frac{16}{3}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Σ3

$$5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$-\frac{5\pi}{2} \leq 5 \arcsin(\cos x) \leq \frac{5\pi}{2} \Rightarrow -\frac{5\pi}{2} \leq x + \frac{\pi}{2} \leq \frac{5\pi}{2}$$

$$-3\pi \leq x \leq 3\pi$$

$$\sin(5 \arcsin(\cos x)) = \sin(x + \frac{\pi}{2})$$

$$16 \sin^5(\arcsin(\cos x)) - 14 \sin^3(\arcsin(\cos x)) - \sin(\arcsin(\cos x)) = \sin(x + \frac{\pi}{2})$$

$$16 \cos^5 x - 14 \cos^3 x - \cos x = \cos x$$

$$8 \cos^5 x - 7 \cos^3 x - \cos x = 0$$

$$\cos x (\cos x - 1)(\cos x + 1)(8 \cos^2 x + 1) = 0$$

∅

$$\cos x = 0$$

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\cos x = 1$$

$$x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\cos x = -1$$

$$x = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Учитывая ограничение, $x = \pm 3\pi, \pm \frac{5\pi}{2}, \pm 2\pi, \pm \frac{3\pi}{2}, \pm \pi, \pm \frac{\pi}{2}, 0$

Ответ: $\pm 3\pi, \pm \frac{5\pi}{2}, \pm 2\pi, \pm \frac{3\pi}{2}, \pm \pi, \pm \frac{\pi}{2}, 0$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

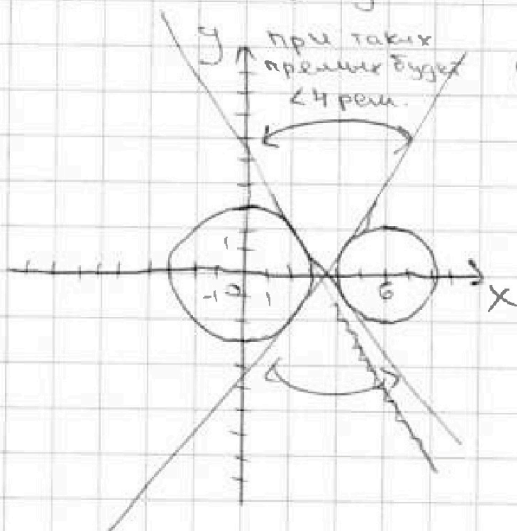
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

54

$$\begin{cases} ax+2y-3b=0 \\ (x^2+y^2-9)(x^2+y^2-12x+32)=0 \\ x^2+y^2=3^2 \quad (x-6)^2+y^2=2^2 \end{cases}$$



при таких
прямых будет
4 реш.

Нужно найти общие касан-
ия и прямых между собой
приблиз будет 4 реш.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

55 ОВЗ: $x > 0, y > 0, x \neq 1, y \neq \frac{1}{5}$

$$\log_3 x + 6 \log_3 3 = \log_3 243 - 8 \quad \log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{5y}^4(3'') - 8$$

$$8 = \log_{x^2} 243 - \log_3^4 x - 6 \log_3 3 \quad 8 = \log_{5^5}^4(3'') - \log_3^4(5y) - 2 \log_{5y} 3$$

$$\log_3^4 x + \frac{6}{\log_3 x} - \frac{5}{2 \log_3 x} + 8 = 0 \quad \log_3 x \log_3^4(5y) + \frac{2}{\log_3(5y)} - \frac{11}{2 \log_3(5y)} \log_3(5y)$$

$$\log_3^5 x + 8 \log_3 x + 3,5 = 0 \quad \log_3^5(5y) + 8 \log_3(5y) - 3,5 = 0 + 8 = 0$$

$$\log_3^5 x + \log_3^5(5y) + 8(\log_3 x + \log_3(5y)) = 0$$

$$\log_3(5xy)(\log_3^4 x - \log_3^3 x \log_3 5y + \log_3^2 x \log_3^2 5y - \log_3 x \log_3^3 5y + \log_3^4 5y) + 8 \log_3(5xy) = 0$$

$$\log_3(5xy)(\dots + 8) = 0$$

$$5xy = 1$$

$$xy = \frac{1}{5}$$

Ответ: $\frac{1}{5}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

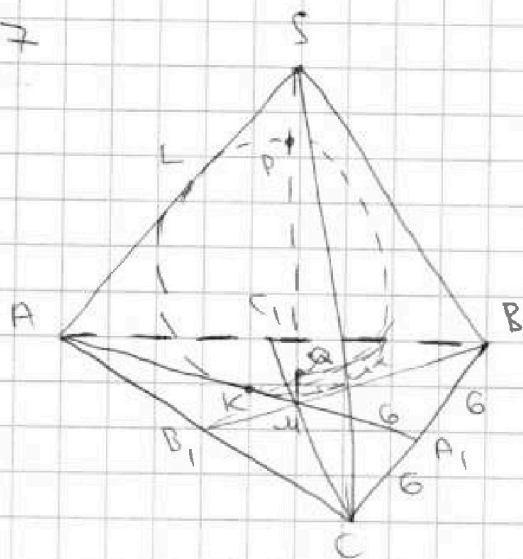
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

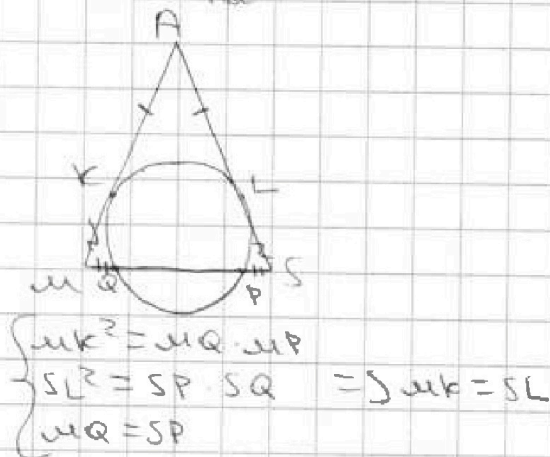
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

57

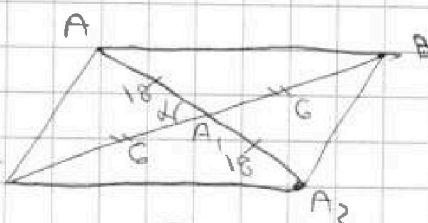


$$SP = MQ \quad S_{\text{прое}} = 90 \quad SA = BC = 12$$



$$\left. \begin{array}{l} AK = AL \text{ (касает)} \\ MK = SL \end{array} \right\} \Rightarrow AK = AS = 12 = BC \Rightarrow MA_1 = 6 \Rightarrow AA_1 = 18$$

Угловые измерения AA_1 :



$$S_{\text{ABAC}} = 2S_{\text{ABC}} = 180 = \frac{1}{2} AA_1 \cdot BC \cdot \sin \alpha$$

$$\sin \alpha = \frac{180 \cdot 2}{18 \cdot 12 \cdot 6} = \frac{5}{6}$$

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \frac{25}{36}} = \frac{\sqrt{11}}{6}$$

$$\text{Т. кос. гвл. } A_1MC: MC^2 = 36 + 36 - 2 \cdot 6 \cdot 6 \cdot \frac{\sqrt{11}}{6} = 72 - 12\sqrt{11} = 4(18 - 3\sqrt{11})$$

$$MC = 2\sqrt{18 - 3\sqrt{11}} \quad \cos \angle AA_1B = \cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha = -\frac{\sqrt{11}}{6} = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow CC_1 = 3\sqrt{18 - 3\sqrt{11}} \quad \Rightarrow \text{по т. кос. гвл. } ABM: BM = 2\sqrt{18 + 3\sqrt{11}}$$

$$\Rightarrow BB_1 = 3\sqrt{18 + 3\sqrt{11}}$$

$$AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = 162 \cdot \sqrt{324 - 99} = 162 \cdot 15 = 2430$$

Ответ: 2430

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$MC^2 = 36 + 36 - 2 \cdot 6 \cdot 6 \cdot \frac{\sqrt{11}}{4} = 72 - 12\sqrt{11} = 12(6 - \sqrt{11})$$

$$MC = 2\sqrt{18 - 3\sqrt{11}}, \quad CC_1 = 3\sqrt{18 - 3\sqrt{11}}, \quad 4(18 - 3\sqrt{11})$$

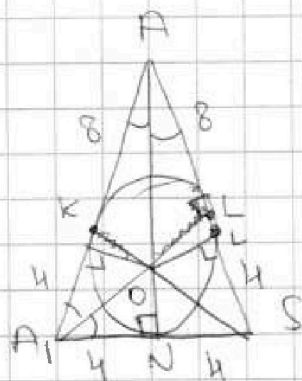
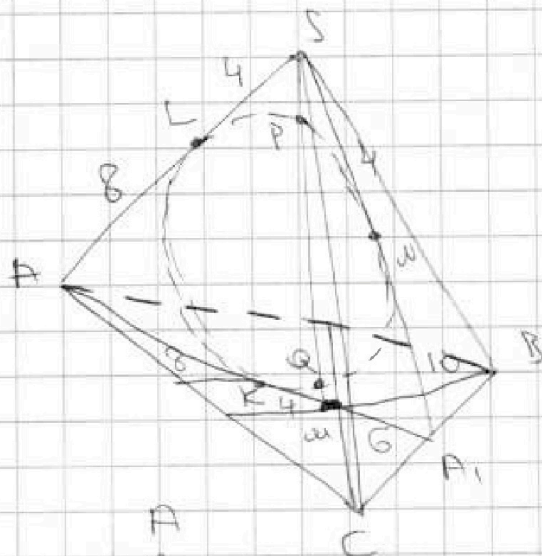
$$MB = 2\sqrt{18 + 3\sqrt{11}}, \quad BB_1 = 3\sqrt{18 + 3\sqrt{11}}, \quad AA_1 = 18$$

$$AA_1, BB_1, CC_1 = 162 \sqrt{324 - 99} = 162 \cdot 15 = 2430$$

$$\begin{array}{r} \times 18 \\ 9 \\ \hline 162 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 324 \\ - 99 \\ \hline 225 \\ \times 15 \\ 15 \\ \hline 225 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 162 \\ 15 \\ \hline 810 \\ 162 \\ \hline 2430 \end{array}$$



$$AN = \sqrt{144 - 16} = \sqrt{128} = 8\sqrt{2}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 9 = ax + 2y - 36 \\ x^2 + y^2 - 12x + 32 = ax + 2y - 36 \end{cases}$$

$$8x - 12x - 41 = 0$$

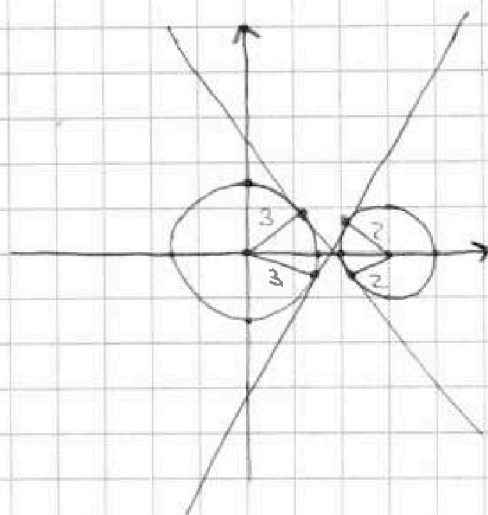
$$x = \frac{41}{12} = 3\frac{5}{12}$$

$$a^8 \quad c^{11} \quad 8^3$$

$$a^7 \quad c^{12} \quad 8^3 3$$

$$a^6 \quad c^{13} \quad 8^3 4$$

$$a^5$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи.

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\log_3^5(5y) + \log_3^5(x) + 8(\log_3(5y) + \log_3(x)) = 0$$

$$x^5 + y^5 = (x+y)(x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4)$$

$$\begin{array}{r} y^3x^2 - x^4y \\ (-x^3y^2 - x^4y) \\ \hline x^3y^2 + y^3x^2 \\ x^3y^2 + x^2y^3 \\ \hline y^3x^2 - y^2x^3 \\ y^3x^2 - y^2x^3 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x+y \\ -x^3y + x^2y^2 \\ \hline x^4 + y^4 \\ x^4 + x^3y \\ \hline y^4 - x^3y \\ y^4 - x^3y \\ \hline (-x^3y - y^3x) \\ (-x^3y - y^3x) \\ \hline y^3x^2 - y^2x^3 \\ (-y^3x^2 - y^2x^3) \\ \hline 2x^2y^3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x+y \\ -x^3y + x^2y^2 \\ \hline x^4 + y^4 \\ x^4 + x^3y \\ \hline y^4 - x^3y \\ y^4 - x^3y \\ \hline (-y^3x - x^4y) \\ (-y^3x - x^4y) \\ \hline y^3x^2 - y^2x^3 \\ (-y^3x^2 - y^2x^3) \\ \hline -y^2x^3 - y^3x^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x+y \\ -x^3y + x^2y^2 \\ \hline x^4 + y^4 \\ x^4 + x^3y \\ \hline y^4 - x^3y \\ y^4 - x^3y \\ \hline (-y^3x - x^4y) \\ (-y^3x - x^4y) \\ \hline y^3x^2 - y^2x^3 \\ (-y^3x^2 - y^2x^3) \\ \hline -y^2x^3 - y^3x^2 \end{array}$$

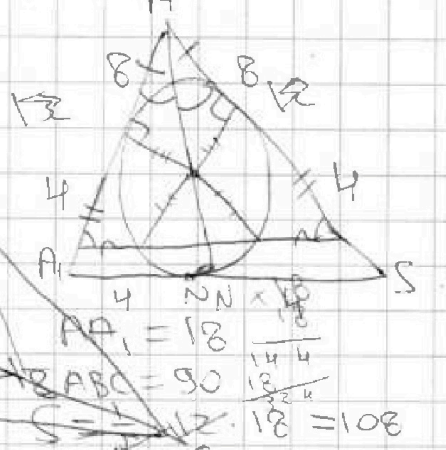
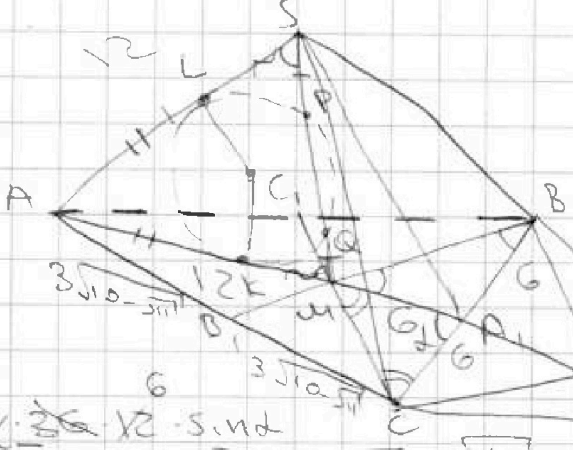
$$\begin{array}{r} x+y \\ -x^3y + x^2y^2 \\ \hline x^4 + y^4 \\ x^4 + x^3y \\ \hline y^4 - x^3y \\ y^4 - x^3y \\ \hline (-y^3x - x^4y) \\ (-y^3x - x^4y) \\ \hline y^3x^2 - y^2x^3 \\ (-y^3x^2 - y^2x^3) \\ \hline -y^2x^3 - y^3x^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x+y \\ -x^3y + x^2y^2 \\ \hline x^4 + y^4 \\ x^4 + x^3y \\ \hline y^4 - x^3y \\ y^4 - x^3y \\ \hline (-y^3x - x^4y) \\ (-y^3x - x^4y) \\ \hline y^3x^2 - y^2x^3 \\ (-y^3x^2 - y^2x^3) \\ \hline -y^2x^3 - y^3x^2 \end{array}$$

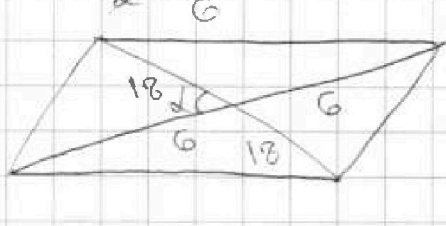
$$\begin{aligned} & (\log_3(5y) + \log_3(x)) / (\log_3^4(x) + \log_3^3x \log_3 5y + \log_3^2x \log_3^2 5y - \log_3x \log_3^3 5y + \log_3^4 5y) \\ & (\frac{1}{5} + 5) / (\frac{1}{5} + 5) \\ & \log_3(5yx) (8 + \dots) \quad \log_3x \cdot \log_3 5y (\log_3^2 x - \log_3^2 5y + \log_3x \log_3 5y) \\ & xy = \frac{1}{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \log_3^4 x + 6 \log_3 x 3 - \log_3 2413 = \log_3^4(5y) + 2 \log_3 3 - \log_3(3'') \\ & (\log_3^2 x + \log_3^2 5y) (\log_3 5xy) (\log_3 \frac{5x}{35y}) \end{aligned}$$

$$a \cdot b \cdot c = ? \quad a, b, c = 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10} \quad b, c = 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13} \quad a, c = 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30}$$



$$\begin{aligned} & 180 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 18 \cdot \sin d \\ & \sin d = \frac{1}{6} \quad \cos d = \sqrt{1 - \frac{1}{36}} = \frac{\sqrt{35}}{6} \\ & AC^2 = 324 + 36 - 2 \cdot 18 \cdot 6 \cdot \frac{\sqrt{35}}{6} \\ & AC^2 = 360 - 36\sqrt{35} \\ & AC = 6\sqrt{10 - \sqrt{35}} \\ & AB = 6\sqrt{10 + \sqrt{35}} \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

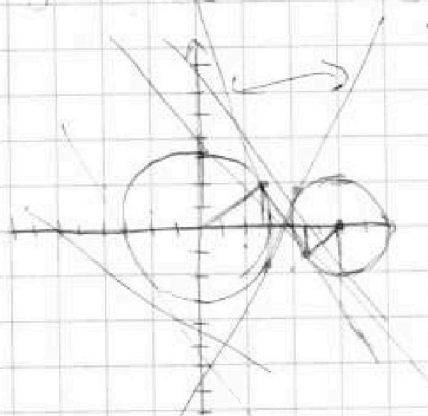
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

4) $\begin{cases} 2x + 2y - 38 = 0 \\ y = -\frac{1}{2}x + \frac{19}{2} \end{cases}$

$(x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0$

$x^2 + y^2 = 3^2 \quad (x - 6)^2 + y^2 = 2^2$



при $a = 0$

$-2 < \frac{3}{2}b < 2$

$-4 < 3b < 4$

$-\frac{4}{3} < b < \frac{4}{3}$

$x^2 + y^2 - 9 = x^2 + y^2 - 12x + 32 = 0 \Rightarrow 12x = 41$

$x = \frac{41}{12}$

$x = \frac{41}{12}$

5) $\log_3 x + 6 \log_3 3 = \log_3 243 - 8$

$0 < 3: x > 0 \quad x \neq 1 \quad y > 0 \quad y \neq 1$

$\log_3 x + \frac{6}{\log_3 x} = \frac{5}{2 \log_3 x} - 8$

$\log_3 x = \frac{1}{t} \quad \frac{6}{t} + \frac{1}{t} = \frac{5}{2t} - 8$

$\frac{7}{t} + 8 = \frac{5}{2t} - 8$

$\frac{7}{t} + 8t + 16 - \frac{5}{2} = 0$

$\frac{7}{t} + 8t + 3.5 = 0$

$2t^5 + 8t + 7 = 0$

$2 = -2t^5 - 16t$

$-2t^5 - 16t = 8t^5 + 16t$

$-2 \log_3 x - 16 \log_3 x = 8 \log_3(5y) + 16 \log_3(5y)$

$\log_3(5y) + \log_3 x + 8(\log_3 x + \log_3(5y)) = 0$

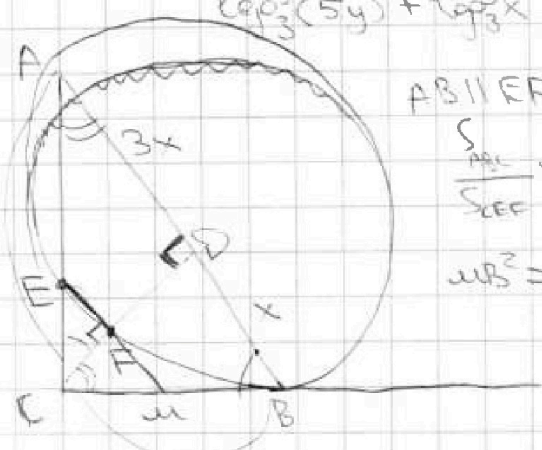
$9 \log_3(5xy) = 0$

$AB \parallel EF, \frac{AP}{PB} = \frac{3}{1}, CP^2 = 3x^2 \quad CP = \sqrt{3}x$

$\frac{S_{APC}}{S_{BPC}} = \frac{S_{APC}}{S_{BPC}} = \frac{1}{2} \cdot 4x \cdot \sqrt{3}x = 2\sqrt{3}x^2$

$S_{APC} = \frac{1}{2} \cdot 3x \cdot \sqrt{3}x = \frac{3\sqrt{3}x^2}{2}$

$MB^2 = EM \cdot FM$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$3\sin \alpha \sin 3\alpha = \sin \alpha \cos 2\alpha + \sin 2\alpha \cos \alpha = \sin \alpha (1 - 2\sin^2 \alpha) + 2\sin \alpha \cos^2 \alpha =$$

$$= \sin \alpha - 2\sin^3 \alpha + 2\sin \alpha - 2\sin^3 \alpha = 3\sin \alpha - 4\sin^3 \alpha$$

$$\sin(3\alpha + 2\alpha) = \sin 3\alpha \cos 2\alpha + \sin 2\alpha \cos 3\alpha = (3\sin \alpha - 4\sin^3 \alpha)(1 - 2\sin^2 \alpha) + 2\sin \alpha \cos^2 \alpha$$

$$3\sin \alpha - 6\sin^3 \alpha - 4\sin^3 \alpha + 8\sin^5 \alpha = 8\sin^5 \alpha - 10\sin^3 \alpha + 3\sin \alpha$$

$$2\sin \alpha \cos^2 \alpha + 6\sin \alpha \cos^2 \alpha = 8\sin \alpha (\sin^4 \alpha - 2\sin^2 \alpha + 1) - 6\sin \alpha$$

$$2\cos^2 \alpha (4\sin \alpha \cos^2 \alpha - 6\sin \alpha) = (2 - 2\sin^2 \alpha)(4\sin \alpha (1 - \sin^2 \alpha) - 6\sin \alpha) =$$

$$= (2 - 2\sin^2 \alpha)(4\sin \alpha - 4\sin^3 \alpha - 6\sin \alpha) = (2 - 2\sin^2 \alpha)(-4\sin^3 \alpha - 2\sin \alpha) =$$

$$= -8\sin^3 \alpha - 4\sin \alpha + 8\sin^5 \alpha + 4\sin^3 \alpha = 8\sin^5 \alpha - 4\sin^3 \alpha - 4\sin \alpha$$

$$8\sin^5 \alpha - 10\sin^3 \alpha + 3\sin \alpha = 8\sin^5 \alpha - 4\sin^3 \alpha - 4\sin \alpha = 16\sin^5 \alpha - 14\sin^3 \alpha - 5\sin \alpha$$

$$\sin(5\alpha) = \sin(\alpha + \frac{\pi}{2})$$

$$16\sin^5 \alpha - 14\sin^3 \alpha - 5\sin \alpha = \sin(\alpha + \frac{\pi}{2}) \quad 16\cos^5 \alpha - 14\cos^3 \alpha - \cos \alpha = \cos \alpha$$

$$16\cos^5 \alpha - 14\cos^3 \alpha - 2\cos \alpha = 0$$

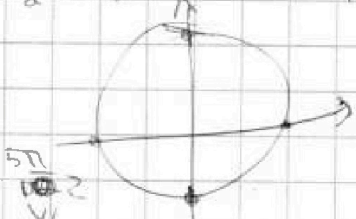
$$\cos \alpha (8\cos^4 \alpha + 7\cos^2 \alpha - 1) = 0$$

$$\cos \alpha (\cos \alpha - 1)(8\cos^3 \alpha + 8\cos^2 \alpha + \cos \alpha + 1) = 0$$

$$\cos \alpha (\cos \alpha - 1)(\cos \alpha + 1)(8\cos^2 \alpha + 1) = 0$$

$$\cos \alpha = 0 \quad \cos \alpha = 1 \quad \cos \alpha = -1$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \quad \alpha = 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \quad \alpha = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$



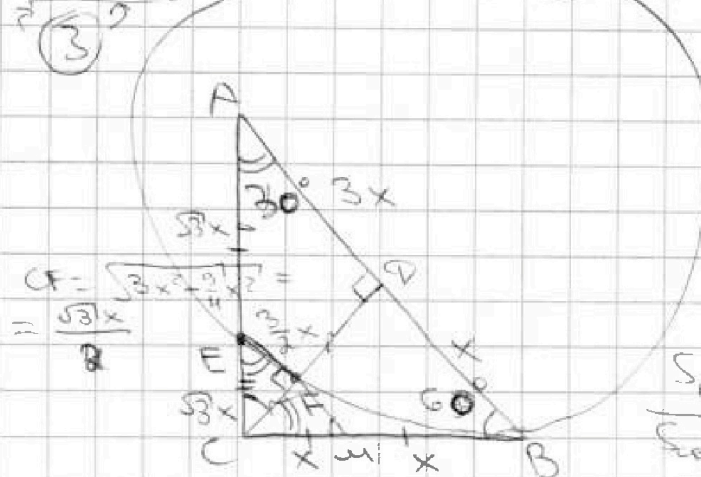
$$5\arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$-\frac{5\pi}{2} \leq x + \frac{\pi}{2} \leq \frac{5\pi}{2}$$

$$-3\pi \leq x \leq 3\pi$$

Ответ: $x = -3\pi, -2\pi, -\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2}, 2\pi, 3\pi$

3



$$CF = \sqrt{3x^2 + 3x^2} = \sqrt{18x^2} = 3\sqrt{2}x$$

$$AP = 3x \quad PB = x \quad CP = \sqrt{3}x$$

$$CB = \sqrt{x^2 + 3x^2} = 2x$$

$$CA = \sqrt{3x^2 + 3x^2} = 2\sqrt{3}x$$

$$\sin \alpha = \frac{3x}{2\sqrt{3}x} = \frac{1}{2} = \frac{FM}{EM} = \frac{CF}{CE} = \frac{FM}{EM}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 2x \cdot 2\sqrt{3}x = 2\sqrt{3}x^2 \quad BM^2 = FM \cdot EM$$

$$= 2\sqrt{3}x^2 \quad CM = BM$$

$$S_{CEF} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}x}{2} \cdot \frac{2x}{2} = \frac{\sqrt{3}x^2}{8}$$

$$\frac{S_{ABC}}{S_{CEF}} = \frac{2\sqrt{3}x^2}{\frac{\sqrt{3}x^2}{8}} = 16$$