



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^6 3^{13} 5^{11}$, bc делится на $2^{14} 3^{21} 5^{13}$, ac делится на $2^{16} 3^{25} 5^{28}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой AC в точке A , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке E , а катет BC – в точке F . Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1,4$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF .
3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$.
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_{x^3} \frac{1}{121} - 5, \quad \text{и} \quad \log_{11}^4(0,5y) + \log_{0,5y} 11 = \log_{0,125y^3} (11^{-13}) - 5.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-15; 90)$, $Q(2; 90)$ и $R(17; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 180, $SA = BC = 20$.
 - а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .
 - б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 6$, а радиус сферы Ω равен 8.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№1

Давайте посмотрим на степени входящие чисел 2, 3, 5 в разложении на простые чисел a, b, c .

a_2, b_2, c_2 — степени входящие двойки в разложении на простые в чисел a, b, c соответственно

a_3, b_3, c_3
 a_5, b_5, c_5 — определяется аналогично

Помимо, что степени входящие двойки в $ab \neq a_2 + b_2$
и если $ab: 2^6 \Rightarrow a_2 + b_2 \geq 6$

Аналогичным образом составим уравнения:

$$\begin{cases} a_2 + b_2 \geq 6 \\ b_2 + c_2 \geq 14 \\ a_2 + c_2 \geq 16 \end{cases} \quad \begin{cases} a_3 + b_3 \geq 13 \\ b_3 + c_3 \geq 21 \\ a_3 + c_3 \geq 25 \end{cases} \quad \begin{cases} a_5 + b_5 \geq 14 \\ b_5 + c_5 \geq 13 \\ a_5 + c_5 \geq 28 \end{cases}$$

Сложим 3 кр-ва:

$$2(a_2 + b_2 + c_2) \geq 36$$

$$2(a_3 + b_3 + c_3) \geq 59$$

$$2(a_5 + b_5 + c_5) \geq 52$$

$$a_2 + b_2 + c_2 \geq 18$$

$$a_3 + b_3 + c_3 \geq 30$$

(т.к. все целые)

$$a_5 + b_5 + c_5 \geq 26$$

$$a_5 + c_5 \geq 28$$

$$a_5 + c_5 + b_5 \geq 28$$

(т.к. $b_5 \geq 0$)

$$abc : 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$$

⇐

$$abc \geq 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$$

При этом равенство достигается, если:

$$a = 2^4 \cdot 3^9 \cdot 5^{14}$$

$$ab = 2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{14}$$

$$b = 2^2 \cdot 3^4 \cdot 5^0$$

$$bc = 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{14}$$

$$c = 2^{12} \cdot 3^{14} \cdot 5^{14}$$

$$ac = 2^{16} \cdot 3^{26} \cdot 5^{28}$$

$$abc = 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$$

$$\text{Отв: } 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$$

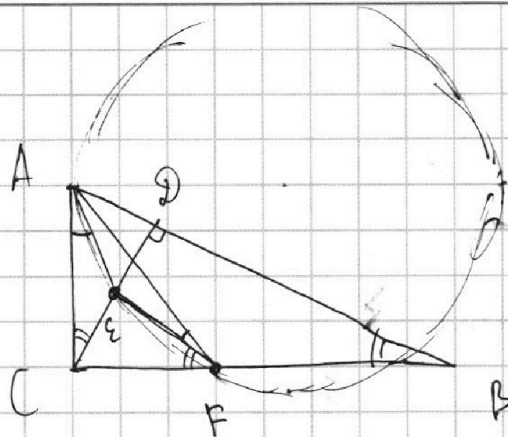
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№2

I) $\angle AFE = \angle AAE$ (угол между кас. и хордой)

II) $\angle EFC = \angle ABC$ ($EF \parallel AB$)
 $\angle ABC = \angle ACD$ (высота в пр.м. Δ дополняет $\angle DCB$ до 90°)

$$\angle EFC = \angle ACE$$

III) Рассмотрим ΔAFC . Рассмотрим окружности AFE и CFE . Заметим, что AC - общая касательная к этим двум окружностям ($\angle CFE = \angle ACE$; $\angle AFE = \angle CAE$), а EF - радиус этих двух окружностей.

Тогда EF проходит через середину AC (т.к. только у середины AC стелек откоситься к обеим окружностям будет одинаково)

EF проходит через середину AC и $\parallel AB \Rightarrow EF$ - среднее плече ΔABC .

IV) EF - среднее плече $\Delta ABC \Rightarrow EF$ - среднее плече ΔCDB

$$\frac{S_{CEF}}{S_{CDB}} = \frac{1}{4}$$

$$V) \frac{S_{CDB}}{S_{ACD}} = \frac{BD}{AD} = \frac{BD}{AB - BD} \text{ (по усл. } AB = 1,4 BD) = \frac{BD}{0,4 BD} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$$

$$S_{CDB} = 2,5 S_{ACD}$$

$$\frac{S_{ACD}}{S_{CEF}} = \frac{8}{5} = 1,6$$

$$VI) \frac{S_{CEF}}{S_{CDB}} = \frac{S_{CEF}}{2,5 S_{ACD}} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{S_{CEF}}{S_{ACD}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{5}{2} = \frac{5}{8}$$

$$\boxed{\text{Омб: } 1,6}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$$

$$\arccos(\sin x) = \frac{9}{10}\pi - \frac{2}{10}x$$

$$\cos\left(\frac{9}{10}\pi - \frac{2}{10}x\right) = \sin x$$

$$\frac{9}{10}\pi - \frac{2}{10}x + x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$$

$$\frac{8}{10}x = \left(\frac{5}{10} - \frac{9}{10}\right)\pi + 2\pi n \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$8x = -4\pi + 2\pi n$$

$$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$$

$$\text{Обл.: } -\frac{\pi}{2}; \frac{3}{2}\pi; \frac{7}{2}\pi$$

$$0 \leq \frac{9}{10}\pi - \frac{2}{10}x \leq \pi$$

$$-\frac{9}{10}\pi \leq -\frac{2}{10}x \leq \frac{1}{10}\pi$$

$$\frac{9}{10}\pi \geq \frac{2}{10}x \geq -\frac{1}{10}\pi$$

$$9\pi \geq 2x \geq -\pi$$

$$\frac{9}{2}\pi \geq x \geq -\frac{\pi}{2}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



и ч

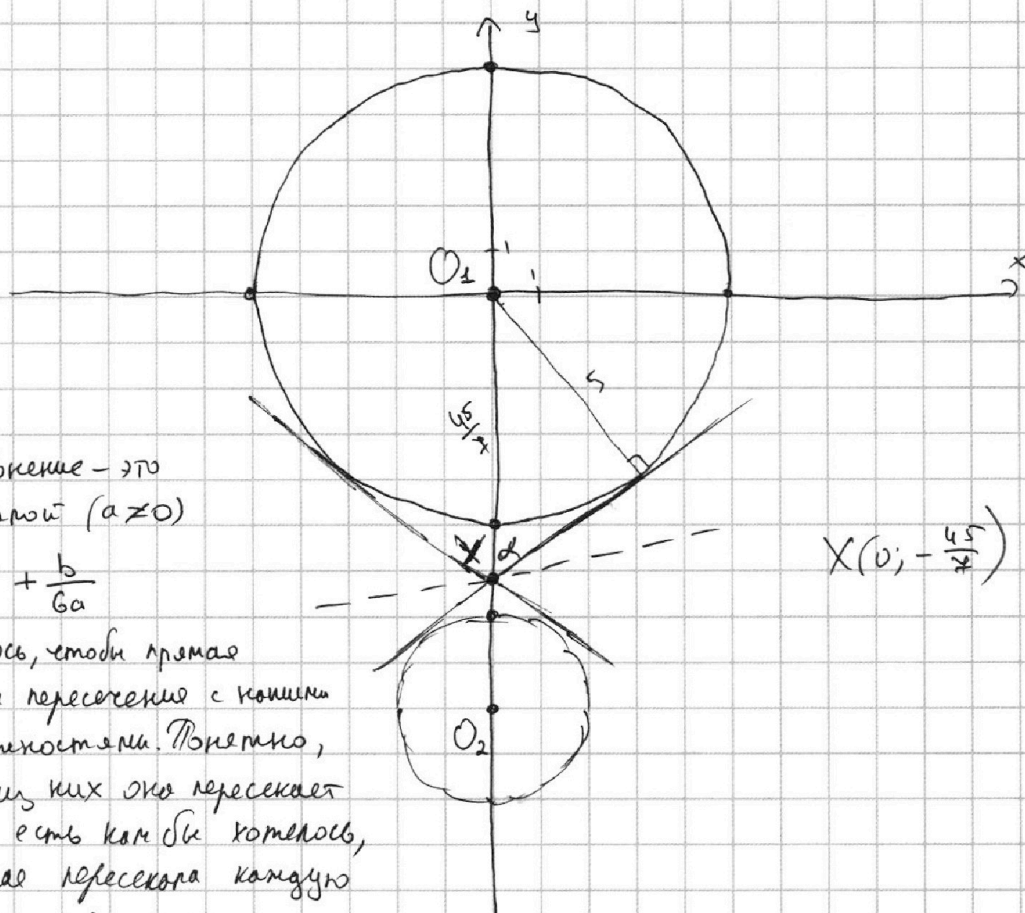
$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases}$$

Заметим, что, если $a \neq 0$, то решение $1 \Rightarrow a \neq 0$

Теперь попробуем понять как выглядит решение второго уравнения на графике:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 25 = 0 \\ x^2 + y^2 + 18y + 77 = x^2 + (y + 9)^2 - 4 = 0 \end{cases}$$

Это уравнения окружностей. Нарисуем их



А первое уравнение — это уравнение прямой ($a \neq 0$)

$$y = -\frac{5}{6a}x + \frac{b}{6a}$$

Нам бы хотелось, чтобы прямая имела 4 точки пересечения с конишкой двух окружностей. Вовсе нет, что каждую из них она пересекает ≤ 2 раз, то есть как бы хотелось, чтобы прямая пересекала каждую окружность по два раза.

Выберем b так, чтобы (я рассматриваю случай произвольного $a \neq 0$ и смотрю подойдет или нет)

$$\frac{b}{6a} = -\frac{45}{7}$$

Тогда наша прямая пройдет через точку X на рисунке

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№4 (продолжение)

Разберем два случая:

I) Наша прямая прошла между двумя касательными (как пунктирная прямая на рисунке). (или совпала с касательными) (рис. 52)

Тогда поймем, что, меняя b , я могу только сдвинуть прямую вверх или вниз, не меняя угла наклона. Но тогда, сдвигая вверх, я точно не получу точек пересечения с нижней окружностью. Аналогично, сдвигая вниз

||

Такая прямая нам не подойдет.

II) Иначе, наша прямая пересекает и верхнюю, и нижнюю окружность (именно пересекает, а не касается). То есть такие прямые нам подойдут.

PS: две общие внутренние касательные проходят через X , т.к.

$$\frac{O_1X}{O_2X} = \frac{R_1}{R_2}$$

$$\frac{\cancel{ME} \frac{45}{7}}{\frac{45}{7}} = \frac{5}{2}$$

$$\frac{45}{63-45} = \frac{5}{2}$$

$$\frac{45}{18} = \frac{5}{2}$$

То есть существует гомотетия в т. X , переводящая одну окружность в другую $\Rightarrow$ внутр. касательные проходят через X .

Осталось понять, какие прямые проходят там, где мне надо.

Тангенс угла наклона касательных равен:

$$\tan \alpha = \frac{5}{\sqrt{\frac{45^2}{49} - 25}} = \frac{5}{\sqrt{\frac{(81-49)25}{49}}} = \frac{5 \cdot 7}{\sqrt{32} \cdot 5} =$$

$$\tan (90-\alpha) = \cot \alpha = \frac{\sqrt{32}}{4} \quad (\text{другой кас. соответствует } -\frac{\sqrt{32}}{4}) = \frac{4}{\sqrt{32}}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Мне нужно, чтобы угол наклона моей прямой удовлетворял пер-ву:

① $-\frac{5}{6a} > \frac{\sqrt{32}}{7}$ $\left(-\frac{5}{6a} > 0\right)$ $-\frac{5}{6a} \neq 0$ экв.

② $-\frac{5}{6a} < -\frac{\sqrt{32}}{7}$ $\left(-\frac{5}{6a} \leq 0\right)$

③ $-\frac{5}{6a} > 0$ $6a < 0$ $\boxed{a < 0}$

$-\frac{5}{6a} > \frac{\sqrt{32}}{7}$

$\frac{5}{6a} < -\frac{\sqrt{32}}{7}$

$\frac{1}{6a} < -\frac{\sqrt{32}}{35}$

$\frac{1}{a} < -\frac{6\sqrt{32}}{35}$ $\boxed{a < 0}$

$1 < -\frac{6\sqrt{32}a}{35}$

$35 < -6\sqrt{32}a$

$\frac{35}{-6} < \sqrt{32}a$

$\boxed{a < -\frac{35}{6\sqrt{32}}}$

④ $-\frac{5}{6a} < 0$ $\boxed{a > 0}$

$-\frac{5}{6a} < -\frac{\sqrt{32}}{7}$

$\frac{5}{6a} > \frac{\sqrt{32}}{7}$

$\frac{5}{6} > \frac{\sqrt{32}a}{7}$ $\boxed{a > 0}$

$\frac{35}{6} > \sqrt{32}a$

$\boxed{\frac{35}{6\sqrt{32}} > a}$

Омб: $\left(-\frac{35}{6\sqrt{32}}; 0\right) \cup \left(0; \frac{35}{6\sqrt{32}}\right)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

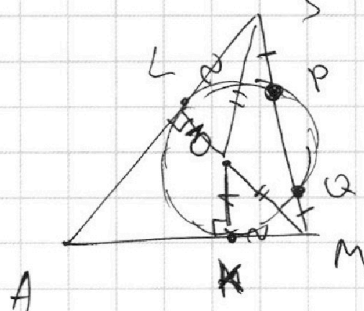
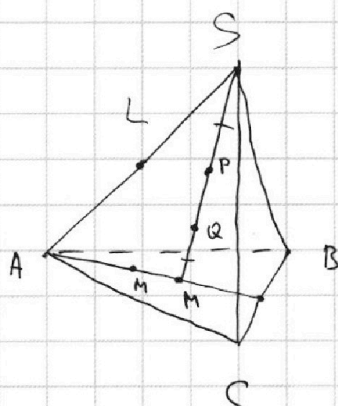
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№ 4

Рассмотрим отдельно плоскость ASM . Показано, что Ω пересекает её по окружности, при том на этой окружности лежат K, L, P, Q . Пусть O — центр этой окружности.



I) Докажем, что O равноудалена от P и $Q \Rightarrow O$ — середина PQ
 $SP = MQ$

$\Downarrow$

O — середина SM

$OS = OM$

II) L и K — точки касания Ω с AM и AS
 $\Downarrow$

$OL \perp AS; OL = OK$
 $OK \perp AM$

$\Rightarrow \triangle OKM = \triangle OLS$ (по гипотенузе и катету)

$\Downarrow$

$SL = MK$

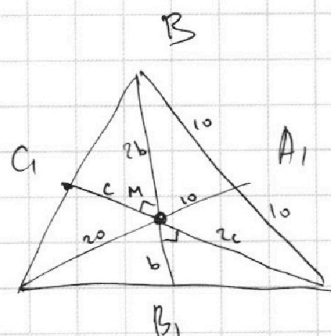
III) $AL = AK$ — отрезки касательной
 $\Downarrow$

$2O = AS = AM$

Рассмотрим плоскость ABC

$AM = 20 \Rightarrow MA_1 = \frac{20}{2} = 10$ (т.к. медиана τ — пересечение $2:1$)

$BA_1 = CA_1 = MA_1 = 10$
 $\Rightarrow \angle BMC = 90^\circ$ (медиана равна половине гипотенузы)





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

☐☐☐☐☐☐☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

14 (продолжение)

$$S_{ABC} = S_{AB_1C_1} + S_{C_1MB_1} + S_{B_1MC_1} + S_{C_1MB_1} + S_{B_1MC_1}$$

$$\text{пусть } BB_1 = 3b \\ CC_1 = 3c$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{4} S_{ABC} + \frac{bc}{2} + \frac{2bc}{2} + \frac{2bc}{2} + \frac{4bc}{2}$$

(площадь прямоугольного Δ)

$$\frac{3}{4} S_{ABC} = \frac{9bc}{2}$$

$$\frac{3}{2} S_{ABC} = 9bc$$

$$\frac{3}{2} \cdot 180 = 9bc$$

$$30 = bc$$

а) нас интересует следующее выражение:

$$AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = 30 \cdot 3b \cdot 3c = 270bc = 270 \cdot 30 =$$
$$= 8100$$

$$\boxed{0 \text{ мб} : 8100}$$

8)

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
□2
□3
□

4

☐

5

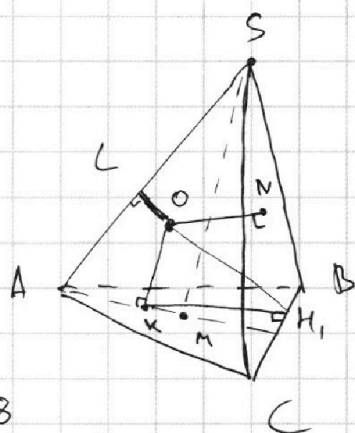
☐

6

7
☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$R=8$$

$$BC = 20 = AS$$

$$SN = 6$$

245

Сразу заметим, что O (центр Σ)
лежит на биссекторной плоскости
двугранного угла при ребре BC
(т.к. Σ касается BC и ABC)

І) $SO^2 = ON^2 + SN^2$ (т. Піфагора в $\triangle SON$)

$$SO^2 = 8^2 + 6^2$$

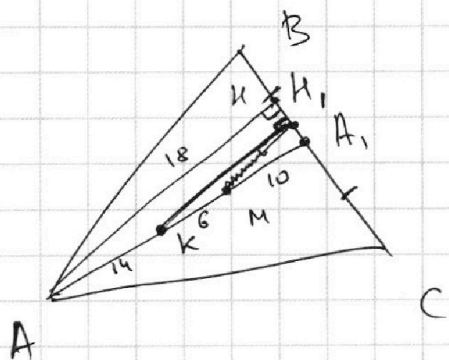
$$SO = 10$$

$$SL^2 = SO^2 - OL^2 \quad (\text{т. Пифагора в } SLO)$$

$$SL^2 = 10^2 - 8^2$$

$$SL = 6$$

Как мы уже доказали в пункте а; $SL = kM$ и $\triangle AMS$ -равнобедренный
Рассмотрим $\triangle ABC$



АИ - высота $\triangle ABC$

$$\frac{AH \cdot BC}{2} = S_{ABC}$$

$$\frac{AH \cdot 20}{2} = 180$$

$$AK = 18$$

KH_1 - перпендикуляр из K на BC

$$\triangle KHA_1 \sim \triangle AKA, (KH \perp BC \text{ и } AK \perp BC)$$

$$\frac{K_{H_1}}{A_{H_1}} = \frac{K_{A_1}}{A_{A_1}} \quad \left(\begin{array}{l} \text{по пункту а)} \\ A_{A_1} = 30 \\ A_{H_1} = 10 \\ A_M = 20 \end{array} \right)$$

$$KH_1 = \cancel{18}^3 \cdot \frac{16}{\cancel{30}_5} = \frac{48}{5}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№7 (продолжение)

K - перпендикуляр из O на ABC

KH_1 - перпендикуляр из K на BC

//

OH_1 - перпендикуляр из O на BC (по ТТП)

$$OH_1^2 = OK^2 + KH_1^2 \quad (\text{т. Пифагора } \triangle OKH_1)$$

$$OH_1^2 = 64 + \frac{48^2}{25} = \frac{64 \cdot 25 + 2^8 \cdot 3^2}{5^2} = \frac{2^6 \cdot 5^2 + 2^8 \cdot 3^2}{5^2} = \frac{2^6(25 + 36)}{5^2} =$$
$$= \frac{2^6 \cdot 61}{5^2}$$

$$OH_1 = \frac{8}{5} \sqrt{61}$$

$$\sin \angle OH_1K = \frac{OK}{OH_1} = \frac{8}{\frac{8}{5} \sqrt{61}} = \frac{5}{\sqrt{61}}$$

$$\angle OH_1K = \arcsin\left(\frac{5}{\sqrt{61}}\right)$$

Двуугольный угол, который мы ищем в два раза больше,
т.к. O лежит на биссекторной плоскости ABC и SBC

$$\text{ОТВ: } 2 \arcsin\left(\frac{5}{\sqrt{61}}\right)$$

$$\begin{aligned} 48 &= 6 \cdot 8 = \\ &= 2 \cdot 3 \cdot 2^3 = \\ &= 2^4 \cdot 3 \end{aligned}$$



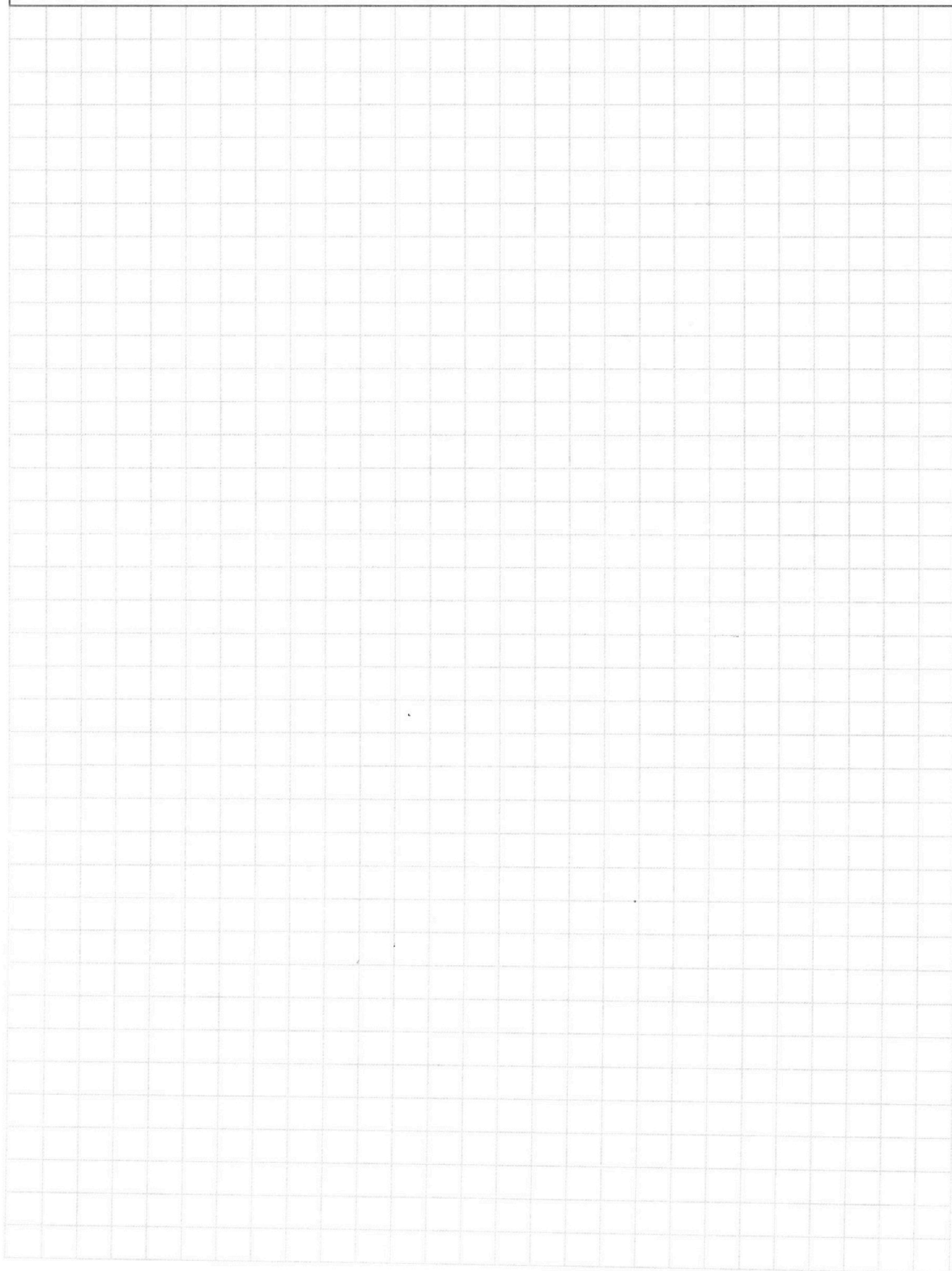
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



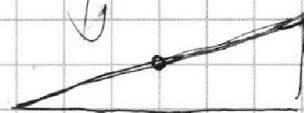
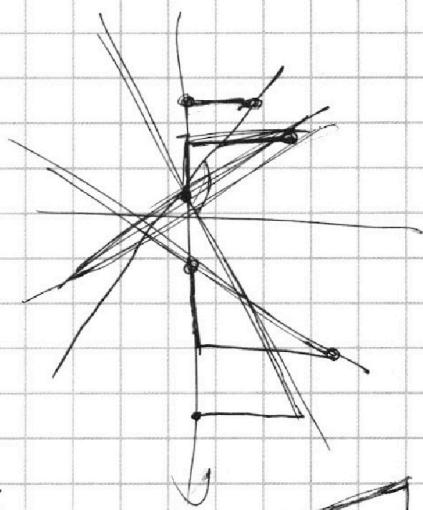
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



$$\log^4 x - 6 \log x = \log x^2 \frac{1}{121} - 5$$

$$\log_x \frac{1}{x} = \frac{\log_x 1}{\log_x x} = \frac{0}{1} = 0$$

$$-\log x = -\frac{1}{\log x}$$

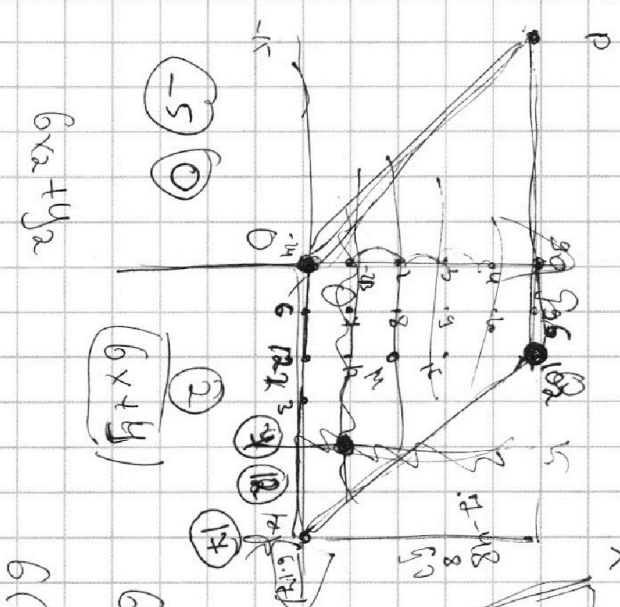
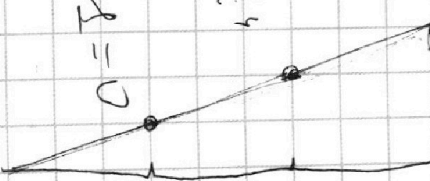
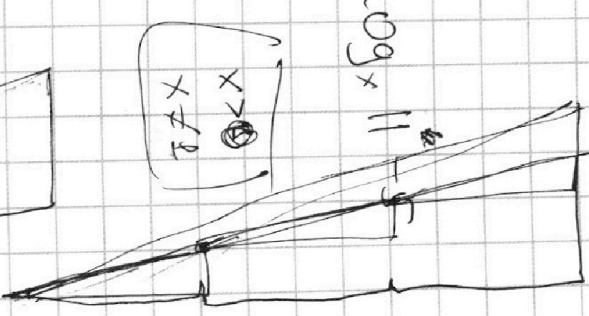
$$\sqrt{x} = \sqrt{11^2} = 11$$

$$\frac{f}{r} = 1 - 6 - 11 - 2 - 5$$

$$75 - 25 = 50$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & 4 & 7 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{r} 10 \\ 5 \overline{) 50} \\ \underline{5} \\ 0 \end{array}$$



$$6x_2 + y_2$$

$$\frac{(6 \times 10^9)}{(19.4)}$$

$$6x_2 -$$

$$6(x_2 - x_1) + y_2 - y_1 = 4x_2$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Зб, что

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 44) = 0 \end{cases}$$

$$6ay = b - 5x$$

$$y = -\frac{5}{6a}x + \frac{b}{6a}$$

$$[a=0]$$

4 реш.

$$5x - b = 0$$

$$x = \frac{b}{5}$$

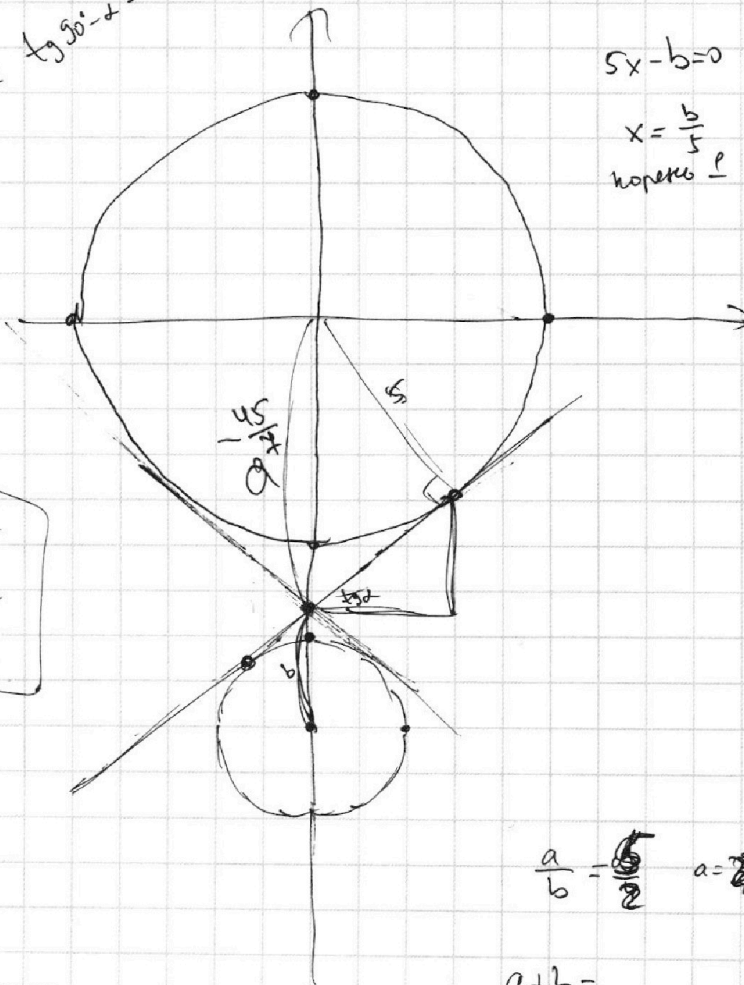
корень 1

$$x^2 + y^2 = 25$$

$$x^2 + y^2 + 2 \cdot 9y + 9^2$$

$$x^2 + (y+9)^2 = 4$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin 90^\circ - \alpha}{\cos 90^\circ - \alpha} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$



$$\frac{35}{45}$$

$$\frac{47}{35} - \frac{45}{2}$$

кас.

$$x^2 + y^2 - 25$$

$$\sqrt{\frac{45^2}{45} - 25} =$$

$$= \sqrt{\frac{81 \cdot 25 - 25 \cdot 45}{45}} = \sqrt{\frac{25(81 - 45)}{45}} = \sqrt{\frac{25 \cdot 32}{45}} = \frac{5}{3} \sqrt{12}$$

$$\frac{a}{9-a} = \frac{5}{2}$$

$$2a = 45 - 5a$$

$$7a = 45$$

$$\frac{a}{b} = \frac{5}{2} \quad a = \frac{5}{2}b$$

$$a+b=$$

$$\frac{5}{2}b + b = \frac{7}{2}b =$$

$$3,5b = 9$$

$$b = \frac{18}{7}$$

$$a = \frac{5}{2} \cdot \frac{18}{7} = \frac{45}{7}$$

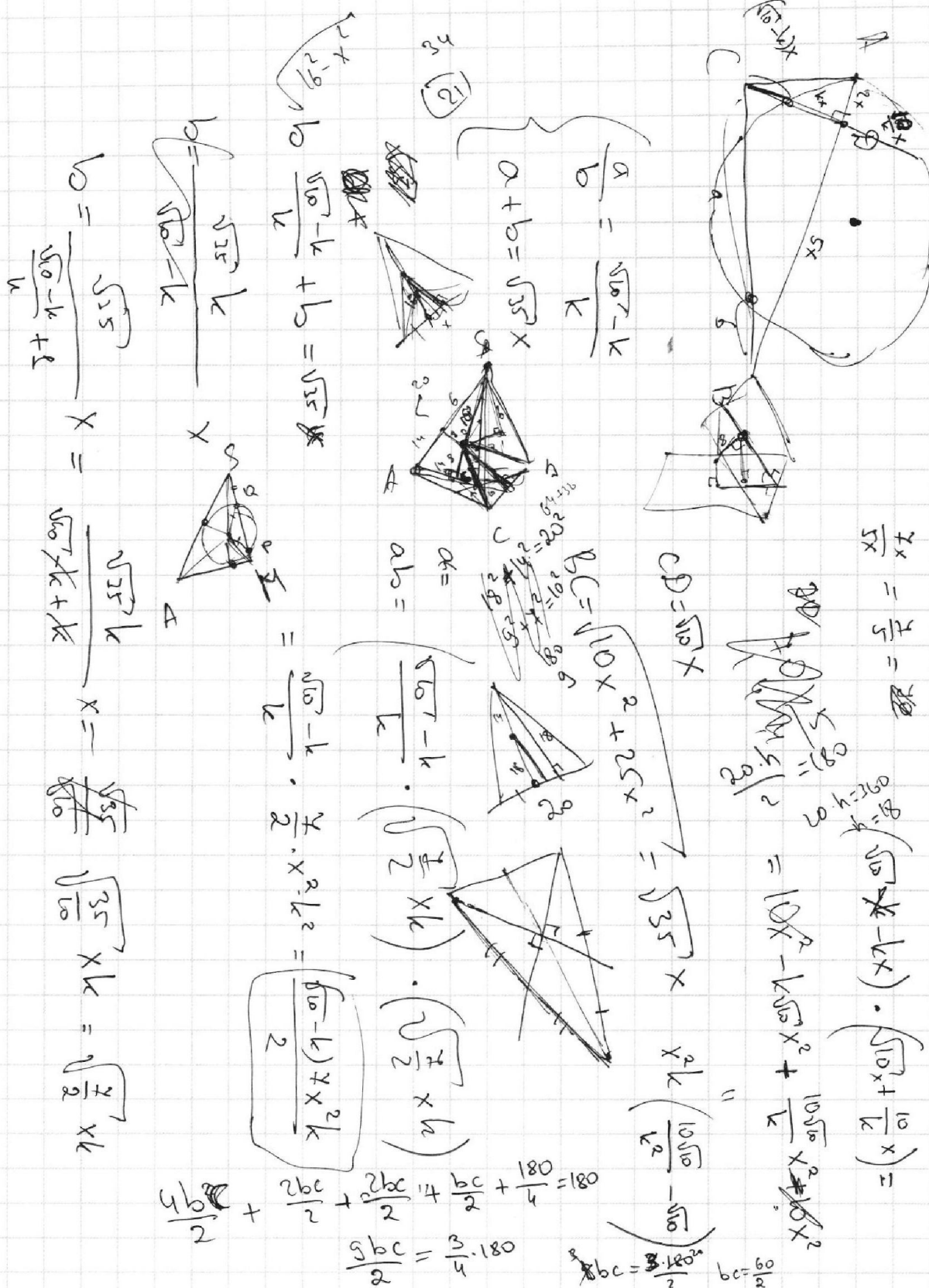
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Handwritten solution for problem 10:

10 arcsos($\sin x$) = $3\pi - 2x$ $10\pi = 10\pi$

$\arccos(\sin x) = \frac{9}{10}\pi - \frac{2}{10}x$

$\cos\left(\frac{9}{10}\pi - \frac{2}{10}x\right) = \sin x$

$\cos\left(\frac{9}{10}\pi - \frac{2}{10}x\right) = \sin x = 0$

$\cos \frac{9}{10}\pi \cdot \cos \frac{2}{10}x - \sin \frac{9}{10}\pi \cdot \sin \frac{2}{10}x - \sin x = 0$

$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

$\frac{9}{10}\pi - \frac{2}{10}x - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$ $x = \frac{\pi}{2}$

$\frac{8}{10}x = \frac{\pi}{2} - \frac{9}{10}\pi$

$\frac{8}{10}x = \pi \left(\frac{5}{10} - \frac{9}{10}\right)$

$2x = -\pi$

Unit circle diagram showing angles $\frac{9}{10}\pi$ and $\frac{5}{10}\pi$.

Triangle diagram with angles $\frac{9}{10}\pi$ and $\frac{2}{10}x$.

Angle range: $0 \leq \frac{9}{10}\pi - \frac{2}{10}x \leq \pi$

Angle range: $-\frac{9}{10}\pi \leq -\frac{2}{10}x \leq \frac{1}{10}\pi$

Angle range: $\frac{9}{10}\pi > \frac{2}{10}x \geq \frac{1}{10}\pi$

Angle range: $3\pi > 2x > -\pi$

Angle range: $\frac{9}{2}\pi > x > -\frac{\pi}{2}$

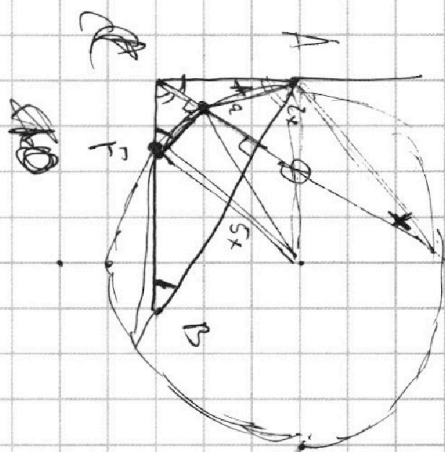
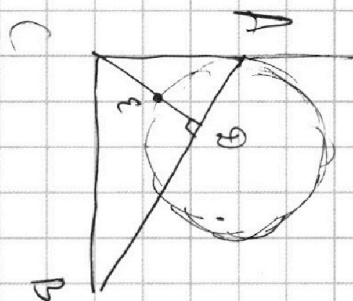
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A + B = 1,4B$$

$$H_D = 0,4 \text{ K} \theta \left(\frac{10^{10} - 10^6}{1 \text{ eV}} \right) \left(\frac{x}{2} \right)$$

$$\frac{S_{ACD}}{S_{CDE}} \left(\frac{\sqrt{10} \cdot k \sqrt{10}}{k} \right) \cdot k =$$

$$= (10\sqrt{3} - 10) \cdot 10^2 = 10^2 (10\sqrt{3} - 10)$$

$$C\Phi^2 = \sqrt{AC^2 - AD^2}$$

$$C\Phi^2 = B^2 - Bg^2$$

$$2CD^2 = AC^2 + BC^2 - AD^2 - BD^2$$

$$h^2 = AB^2 - AD^2 - BD^2$$

$$2CB^2 = AB^2 + AC^2 + 2BC \cdot AD$$

2 Ca^{2+}

$$\sqrt{3} \cdot 10 \times 2$$

$$\frac{x}{2 \times 10^2} - \frac{\sqrt{10} \cdot 10 \times 2}{2 \times 10^2}$$

$$10x \cdot 2 = 10x^2$$

$$\frac{10x}{x} = \frac{10x}{x}$$

$$G = \sqrt{10} \times$$

$$\frac{\sqrt{10} \cdot 10x^2}{x} - 10x^2 + x \sqrt{10} x^2 + 10x^2 = 10x^2 + \frac{10x^2}{x} = \left(\sqrt{10} x + \frac{10}{x} \right) (x + x - \sqrt{10}) x = \left(\sqrt{10} x + \frac{10}{x} \right) x \cdot x (1 - \sqrt{10})$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$a, b, c - \text{коэф.}$$

$$ab: 2^6 \cdot 3^{15} \cdot 5^{11}$$

$$bc: 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{13}$$

$$ac: 2^{16} \cdot 3^{25} \cdot 5^{18}$$

a_2	b_1	c_2
a_3	b_3	c_1
a_5	b_5	c_5

$$\begin{cases} a_2 + b_2 \geq 6 \\ b_2 + c_2 \geq 14 \\ a_2 + c_2 \geq 16 \end{cases} \quad \text{по } 1/3$$

$$2a_2 + 2b_2 + 2c_2 \geq 36$$

$$a_2 + b_2 + c_2 \geq 18$$

$$a_5 \neq b_5$$

$$c_5 - a_5 = 2$$

$$c_3 - a_3 = 8$$

$$c_3 = a_3 + 8$$

$$2a_5 + 8 = 28$$

$$2a_5 = 20$$

$$a_5 = 10$$

$$2a_3 + 8 = 25$$

$$2a_3 = 17$$

$$a_3 = 8$$

$$c_3 = 16$$

$$\begin{cases} a_5 = c_5 = 14 \\ b_5 = 0 \end{cases}$$

$$b_3 = 4$$

30

$$\begin{array}{r} 13 + 21 + 25 \\ \underline{34} \\ 59 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 11 + 13 + 28 = 52 \\ \underline{24} \end{array}$$

$$a_2 + b_2 = 6$$

$$b_2 + c_2 = 14$$

$$a_2 - c_2 = 8$$

$$c_2 = a_2 + 8$$

$$a_2 + a_2 + 8 = 16$$

$$2a_2 = 8$$

$$a_2 = 4$$

$$b_2 = 2$$

$$c_2 = 12$$

$$18$$