



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^9 3^{10} 5^{10}$, bc делится на $2^{14} 3^{13} 5^{13}$, ac делится на $2^{19} 3^{18} 5^{30}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой BC в точке B , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке F , а катет AC – в точке E . Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 3 : 1$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF .
3. [4 балла] Решите уравнение $5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$.
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2} (3^{11}) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-14; 42)$, $Q(6; 42)$ и $R(20; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 90 , $SA = BC = 12$.
 - а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1 .
 - б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5 .

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

МФТИ



- 1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

1)
$$\begin{cases} ab = n \cdot 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10} \\ bc = m \cdot 2^{11} \cdot 3^9 \cdot 5^{13} \\ ac = k \cdot 2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^{30} \end{cases}$$

$abc = \sqrt{a^2 b^2 c^2} = \sqrt{n \cdot m \cdot k \cdot 2^{42} \cdot 3^{41} \cdot 5^{53}}$ мы уже видели, что $n \cdot m \cdot k$ должно делиться на $3^{2k+1} \cdot 5^{2g-1}$ (т.е. число раз, которое делится более точно $(abc \in \mathbb{N})$ где $k, g \in \{0, 3, 11\}$)

где наименьшее из abc достигается при мин $n \cdot m \cdot k$

пусть a_i - количество i в числе a тогда, $(a_i : 2^{a_i}) \in \mathbb{Z}$ и k_i ("количество единиц")

тогда:

$$\begin{cases} a_2 + b_2 = 9 + n_2 \\ b_2 + c_2 = 14 + m_2 \\ a_2 + c_2 = 19 + k_2 \end{cases}$$

т.е. мы хотим мин $n \cdot m \cdot k$ где $n_2 = m_2 = k_2 = 0$

$$\begin{cases} a_1 + b_1 = 9 \\ b_1 + c_1 = 14 \\ a_1 + c_1 = 19 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 10 \\ c_1 = 14 \\ a_1 + c_1 = 19 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2c_1 = 24 \\ c_1 = 12 \\ a_2 = 19 - c_2 \end{cases}$$

или $c_2 = 12$ или $c_2 = 2$ или $c_2 = 7$

аналогично получаем c_3 :

$$\begin{cases} a_3 + b_3 = 10 \\ b_3 + c_3 = 13 \\ a_3 + c_3 = 18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_3 = 8 \\ c_3 + b_3 = 13 \\ a_3 = 18 - c_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2c_3 = 21 \\ b_3 = c_3 - 8 \\ a_3 = 18 - c_3 \end{cases}$$

лучше $c_3 = 11$ или $c_3 = 10$ или $c_3 = 13$ или $c_3 = 8$ или $c_3 = 1$ т.е. мин $n = 3$

лучше 5:

$$\begin{cases} a_5 + b_5 = 10 \\ b_5 + c_5 = 15 \\ a_5 + c_5 = 30 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_5 + c_5 + 2b_5 = 25 \\ a_5 + c_5 = 30 \\ 2b_5 = -7 \end{cases}$$

лучше $2b_5 = 0$ или $2b_5 = -7$ или $2b_5 = 0$

лучше $2b_5 = 0$ или $2b_5 = -7$ или $2b_5 = 0$

4 тогда $a_5 + c_5 = 30$ $n = 3 \cdot 5^7$

$$\begin{cases} b_5 = 0 \\ a_5 = 10 + 17 - 0 \\ c_5 = 13 - 0 \end{cases}$$

т.е. $abc = \sqrt{3 \cdot 5^7 \cdot 2^{41} \cdot 3^{41} \cdot 5^{53}} = \sqrt{2^{41} \cdot 3^{41} \cdot 5^{60}} = 2^{20} \cdot 3^{20} \cdot 5^{30}$

это же abc минимально, т.е. если мы увеличим хотя бы одно из чисел то сумма будет больше и решить не получится.

Ответ мин. $abc = 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

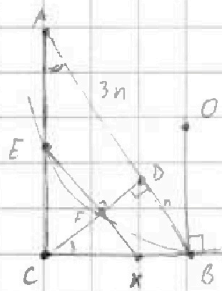
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

| | | | | | | |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№2



$AD = 3n$ $DB = n$
 $AB \parallel EF$

ДТ: продолжим EF до пересечения с BC в точке X

т.к. CD - высота к гипотенузе в прямоугольном ΔABC то $\Delta CAD \sim \Delta CDB \sim \Delta ABC \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{BD}{DC} = \frac{DC}{AD} \quad DC^2 = 3n^2 \quad DC = n\sqrt{3}$$

$$\text{tg } \angle A = \frac{BC}{AC} = \frac{\sqrt{3}n}{3n} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \angle A = 30^\circ \Rightarrow BC = \frac{1}{2}AB = 2n$$

 $AC = \frac{\sqrt{3}}{2}AB = \sqrt{3} \cdot 2n$

$$EF \parallel AB \Rightarrow \begin{cases} \angle CEF = \angle CAD = 30^\circ \\ \angle CFE = \angle CBA = 90^\circ \end{cases} \Rightarrow \Delta CEF \sim \Delta CDA \sim \Delta ABC$$

В Δ т.к. X: $XB^2 = XF \cdot XF$ $\Delta CEF \sim \Delta FX \sim \Delta CX$ (т.к. ΔCEX - т.к. $\Delta CEF \sim \Delta CX$)
мон. $\Rightarrow CF \perp EX$

$$\Delta CEX \sim \Delta CEF \sim \Delta ABC \Rightarrow \frac{AD}{DB} = \frac{EF}{FX} \Rightarrow EF = 3FX \quad EX = 4XF$$

$$XB^2 = 4XF^2; \angle DCB = \angle A = 30^\circ \Rightarrow FX = \frac{1}{2}CX \Rightarrow CX^2 = 4FX^2$$

$$XB^2 = CX^2 \quad \text{т.к. } XB, CX > 0 \Rightarrow XB = CX = \frac{1}{2}BC$$

$$X - \text{серез } BC \mid \Rightarrow EX - \text{средняя линия } \Delta ABC \Rightarrow EF = \frac{1}{2}AD = \frac{3}{2}n; \quad CF = \frac{1}{2}CD = \frac{\sqrt{3}}{2}n$$

$$S_{CEF} = \frac{3}{2}n \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}n \cdot \frac{1}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{8}n^2 \quad S_{ABC} = 2n \cdot 2\sqrt{3}n \cdot \frac{1}{2} = 2\sqrt{3}n^2$$

$$\frac{S_{ABC}}{S_{CEF}} = \frac{2\sqrt{3}n^2}{\frac{3\sqrt{3}}{8}n^2} = \frac{16}{3}$$

Ответ: $16/3$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№3

$$\arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$\arcsin(a) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$x + \frac{\pi}{2} \in [-2,5\pi, 2,5\pi]$$

$$x \in [-3\pi, 2\pi]$$

пусть $\arcsin(\cos x) = d$

$$\sin d = \cos x \Rightarrow d = \frac{\pi}{2} \pm x + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

или иначе $\sin d = \cos x \Rightarrow d = \frac{x}{5} + \frac{\pi}{10}$

$$\text{т.е. } \frac{x}{5} + \frac{\pi}{10} = \frac{\pi}{2} \pm x + 2\pi n \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$2x + \pi = 5\pi = 10x + 20\pi n \quad n \in \mathbb{Z}$$

1) $8x = -4\pi - 20\pi n$

$n=1$: $x = -3\pi$, если член n на x \rightarrow увеличим n

$$\left\{ \begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{2} - 2,5\pi n \\ n \in \mathbb{Z} \\ x \in [-3\pi, 2\pi] \end{array} \right.$$

$n=0$: $x = -\frac{\pi}{2} \in [-3\pi, 2\pi]$

$n=-1$: $x = 2\pi \in [-3\pi, 2\pi]$ если член n на x \rightarrow все, что достигнуто

второго крайнего ул. в этом случае. $x_1 \in \left\{-3\pi, -\frac{\pi}{2}, 2\pi\right\}$

2) $12x = 4\pi + 10\pi n$

$n=1$: $x = 2\pi \in [-3\pi, 2\pi]$ если член n на x \rightarrow увеличим n

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{\pi}{3} + \frac{5}{3}\pi n \\ n \in \mathbb{Z} \\ x \in [-3\pi, 2\pi] \end{array} \right.$$

$n=0$: $x = \frac{\pi}{3} \in [-3\pi, 2\pi]$

$n=-1$: $x = -\frac{4}{3}\pi \in [-3\pi, 2\pi]$

$n=-2$: $x = -3\pi \in [-3\pi, 2\pi]$ второй крайний элемент

в этом случае $x_2 \in \left\{-3\pi, -\frac{4}{3}\pi, \frac{\pi}{3}, 2\pi\right\}$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = y_1 \\ x = x_2 \end{array} \right.$$

Ответ: $\left\{-3\pi, -\frac{4}{3}\pi, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, 2\pi\right\}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

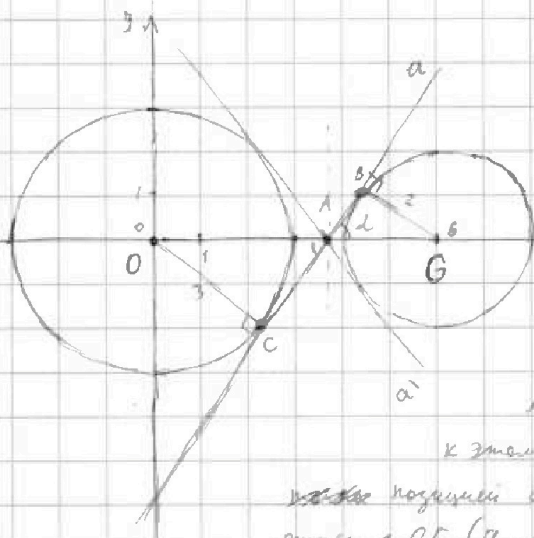


$$\sqrt{4} \begin{cases} ax + 2y - 3b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 12) = 0 \end{cases} \begin{cases} 2y = 3b - ax \\ x^2 + y^2 = 9 \\ x^2 - 12x + 36 + y^2 = 4 \end{cases} \begin{cases} y = -\frac{a}{2}x + 1,5b \\ x^2 + y^2 = 3^2 \\ (x-6)^2 + y^2 = 2^2 \end{cases}$$

Контр. график:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 3^2 \\ (x-6)^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$

для 4-х нужно, чтобы прямая, заданная $y = -\frac{a}{2}x + 1,5b$ пересекла его 4 раза



мы имеем право брать $\sqrt{4}$ в и если хотим поделить по α получаем $\rightarrow 1,5b = \sqrt{4} \cdot \cos \in \mathbb{R}$

$-\frac{a}{2}$ задает угол наклона прямой:

Фон. прямая α и большая окружность в 2 местах, тогда линия в эти точки может касаться каждой из окружностей от перпендикуляра \perp диаметру в 2-х местах, дальше решите по геометрии или к этому времени лучше с большой ≈ 1 или 0 прямой

найти касательные к каждой из окружностей в 2-х местах, дальше решите по геометрии или к этому времени лучше с большой ≈ 1 или 0 прямой

$$-\frac{a}{2} \in (\operatorname{tg} \alpha, -\operatorname{tg} \alpha)$$

$$\left. \begin{aligned} \angle OAC = \angle BAG \text{ (т.в. верш.)} \\ \angle OCA = \angle GBA = 90^\circ \end{aligned} \right\} \Rightarrow \triangle OAC \sim \triangle ABG \quad \frac{AG}{b-AG} = \frac{2}{3} \quad 3AG = 12 - 2AG \quad AG = 2,4$$

$$\sin \alpha = \frac{BG}{AG} = \frac{3,6}{2,4} = \frac{5}{6} \quad \cos \alpha = \sqrt{1 - \frac{25}{36}} = \frac{11}{12} \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{5\sqrt{11}}{11} \quad -\frac{a}{2} \in \left(-\frac{5\sqrt{11}}{11}, \frac{5\sqrt{11}}{11}\right)$$

$$a \in \left(-\frac{10\sqrt{11}}{11}, \frac{10\sqrt{11}}{11}\right)$$

Ответ $a \in \left(-\frac{10\sqrt{11}}{11}, \frac{10\sqrt{11}}{11}\right)$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 5

ограничения

$$\begin{cases} x, y > 0 \\ x \neq 1 \\ y \neq \frac{1}{5} \end{cases}$$

$$\log_3^4 x + 6 \log_3 x = \log_3 3^5 - 8$$

$$\log_3^4 x + \log_3 3(6 - 2.5) + 8 = 0$$

$$\log_3^4 x + \frac{3.5}{\log_3 x} + 8 = 0 \quad | \cdot \log_3 x \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$$

$$\log_3^5 x + 8 \log_3 x + 3.5 = 0 \quad a = \log_3 x \neq 0$$

$$f = a^5 + 8a + 3.5 \quad f' = 5a^4 + 8 > 0 \Rightarrow \text{функция возрастает} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{есть лишь 1 корень } a \text{ у } a^5 + 8a + 3.5 = 0 \text{ и ему соответствует } x$$

анализ $\log_3^4(5y) - \frac{3.5 \log_3 3}{\log_3 5y} + 8 = 0 \quad b = \log_3 5y \neq 0 \text{ и } y \neq \frac{1}{5}$

$$f = b^5 + 8b - 3.5 \cdot 0 \quad f' = 5b^4 + 8 > 0 \Rightarrow \text{лишь 1 корень } b \text{ у } y$$

1 зн. x и 1 зн. $y \Rightarrow$ если элемент зн. xy , сам он его найдет по око будет ответом

$$\begin{cases} a^4 + \frac{3.5}{a} + 8 = 0 \\ b^4 + \frac{3.5}{b} + 8 = 0 \end{cases}$$

заметьте, что если верно сам верно другое равенство и $a = -b$

$$\text{т.е. } \log_3 x = -\log_3 5y \quad \log_3 5xy = 0 \quad 5xy = 1$$

$$xy = 0.2$$

мы знаем что y равенств есть решение ~~то~~, причем элемент \Rightarrow

\Rightarrow рассуждением там случай подходит и единственно

Ответ. $xy = 0.2$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

МФТИ

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№6 Территория внутри параллелограмма окружена:

$$y = 42$$

$$y = 0$$

$$y = -3x$$

$$y = -3x + 60$$

Мы можем «расчертить» параллелограмм на квадратные ячейки.
прямые вида $y = -3x + n$, где $n \in \mathbb{Z}$ и $n \in [0; 60]$

$$\text{т.е. } A(x_1, y_1) \text{ и } B(x_1, -3x_1 + a) \quad a \in \mathbb{Z}, a \in [0; 60]$$

$$\text{и } B(x_2, y_2) \text{ и } B(x_2, -3x_2 + b) \quad b \in \mathbb{Z}, b \in [0; 60]$$

$$\text{Нам же надо: } 3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$$

$$3x_2 + y_2 - (3x_1 + y_1) = 33$$

$$3x_2 - 3x_1 + b - (-3x_1 + a) = 33$$

$$b - a = 33 \quad a, b \in \mathbb{Z} \quad a, b \in [0; 60]$$

$$b = 60 \quad a = 60 - 33 = 27$$

$$b = 59 \quad a = 59 - 33 = 26$$

...

$$b = 33 \quad a = 33 - 33 = 0 \text{ линии } b \text{ и } a \text{ не имеют точек } \Rightarrow \text{ всего пар } a-b \text{ } 28 \text{ (от } 0_{27} \text{ и } 27_{0} \text{ и } a)$$

но мы видим, что разности $b - a$ не зав. от x и y \Rightarrow количество для всех пар точек с целочисленными координатами.

ΔOP : его проекция на $Ox = 14 \in [14; 0]$ т.е. содержит 15 целых x и 14 целых y .

Каждая целочисленная точка больше 15 точек находится на линии b и a не имеют (иначе $x \notin \mathbb{Z}$). Из этих 15 целых x и 14 целых y т.к. $y = \text{целое} \cdot x \Rightarrow$ при $x \in \mathbb{Z}$ $y \in \mathbb{Z}$

т.е. на каждой $42 \geq y = -3x + n \geq 0$ $n \in \mathbb{Z}, n \in [0; 60]$ есть 15 точек, $y \in \mathbb{Z}$.

т.е. с 2 отрезков $42 \geq y = -3x + a \geq 0$ и $42 \geq y = -3x + b \geq 0$ можно взять 15 + 15 пар точек (каждой x для a линия b и a имеют одну точку; b), а пар $a-b$ есть 28

$$N_{\text{пар}} = 15 \cdot 15 \cdot 28 = 225 \cdot 4 \cdot 7 = 900 \cdot 7 = 6300 \text{ пар}$$

Ответ: 6300 пар

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
 Отметьте крестиком номер задачи,
 решение которой представлено на странице:



- 1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
 страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



3) $5 \sin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$
 $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$x + \frac{\pi}{2} \in [-2,5\pi, 2,5\pi]$

! $x \in [-3\pi, 2\pi]$

$\sin(5 \arcsin(\cos x)) = \sin(x + \frac{\pi}{2})$

d: $\sin d = \cos x$

$5d = x - \frac{\pi}{2}$

$d = \frac{x}{5} - \frac{\pi}{10}$



1) $2x + \pi = 5\pi + 10x + 20\pi n$

$8x = -4\pi - 20\pi n, n \in \mathbb{Z}$

$x = -\frac{\pi}{2} + 2,5\pi n, n \in \mathbb{Z}$

$x \in [-3\pi, 2\pi]$

$n = -1, x = -3\pi$ ✓

$n = 0, x = -\frac{\pi}{2}$ ✓

$n = 1, x = 2\pi$ ✓

$d = \frac{\pi}{5} \pm x + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$
 $5d = x + \frac{\pi}{2}$

$\frac{x}{5} - \frac{\pi}{10} = \frac{\pi}{2} \pm x + 2\pi n$

$5,2\pi$

$\frac{2\pi}{10} = \frac{\pi}{5}$

2) $2x + \pi = 5\pi + 10x + 20\pi n, n \in \mathbb{Z}$

$12x = 4\pi + 20\pi n, x = \frac{\pi}{3} + \frac{5\pi}{3}n$

$n = 1, x = 2\pi$ ✓

$n = 0, x = \frac{\pi}{3}$ ✓

$n = -1, x = -\frac{4\pi}{3}$ ✓

$n = -2, x = -3\pi$ ✓

Ответ: $\{-3\pi, -\frac{4\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, 2\pi\}$

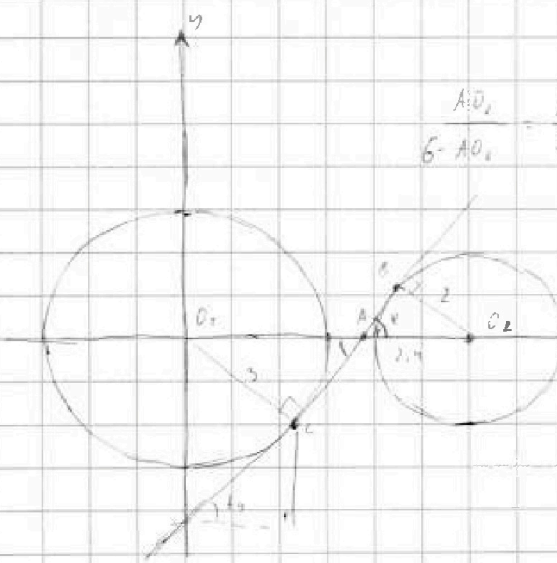
4) 4 прямые A_1, A_2, A_3, A_4

$\begin{cases} ax + 2y - 3z = 0 \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 36) = 0 \end{cases}$

$x^2 - 12x + 36 + y^2 - 9 = (x-6)^2 + y^2 - 4$

$\begin{cases} 2y = 3z - ax \\ x^2 + y^2 = 9 \\ (x-6)^2 + y^2 = 4 \end{cases}$

$y = -\frac{a}{2}x + 1,5z$



$\frac{AO_2}{O_1O_2} = \frac{2}{6}$
 $\frac{AO_2}{AO_1} = \frac{3}{3}$

$3AO_2 = 12 - 2AO_2$

$5AO_2 = 12, AO_2 = 2,4$

$\sin \varphi = \frac{2}{3} = \frac{\pi}{6}, \cos \varphi = \sqrt{1 - \frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$

$b_3 = \frac{5\sqrt{11}}{11}$

$\frac{a}{2} \in \left[-\frac{5\sqrt{11}}{11}, \frac{5\sqrt{11}}{11}\right]$

$\frac{a}{2} \in \left[-\frac{5\sqrt{11}}{11}, \frac{5\sqrt{11}}{11}\right]$

$a \in \left[-\frac{10\sqrt{11}}{11}, \frac{10\sqrt{11}}{11}\right]$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

1) $ab = n \cdot 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{12}$
 $bc = m \cdot 2^{14} \cdot 3^8 \cdot 5^{13}$
 $ac = k \cdot 2^{13} \cdot 3^{14} \cdot 5^{30}$

$\begin{cases} a_1 + b_1 \geq 9 \\ b_1 + c_1 \geq 14 \\ a_1 + c_1 \geq 19 \end{cases}$

$\begin{cases} a_2 = 9 - b_1 \\ b_1 + c_1 \geq 14 \\ 9 - b_1 + c_1 \geq 19 \end{cases}$

$\begin{cases} c_2 = 14 - b_1 \\ c_1 = 10 + b_1 \end{cases}$

$\begin{cases} a_3 - b_3 = 10 \\ b_3 + c_3 = 14 \\ a_3 + c_3 = 18 \end{cases}$

$\begin{cases} c_3 - b_3 = 3 \\ c_3 - b_3 = 17 \end{cases}$

$a_3 = 7, b_3 = 3, c_3 = 11$

$abc = \sqrt{mnk} \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$

$abc = 2^{12} \cdot 3^{22} \cdot 5^{60}$

2) $\begin{cases} a_4 + b_4 = 10 \\ b_4 + c_4 = 16 \\ a_4 + c_4 = 30 \end{cases}$

$\begin{cases} c_4 - b_4 = 20 \\ c_4 + b_4 = 14 \end{cases}$

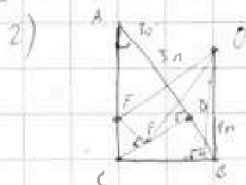
$\begin{cases} c_4 = 12 \\ b_4 = -3 \end{cases}$

$abc = 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$

$\begin{cases} a_5 + b_5 = 17 \\ b_5 + c_5 = 13 \\ a_5 + c_5 = 30 \end{cases}$

$\begin{cases} a_5 + c_5 + 7b_5 = 30 \\ a_5 + c_5 = 30 \end{cases}$

$\begin{cases} b_5 = 0 \\ a_5 = 17 \\ c_5 = 13 \end{cases}$

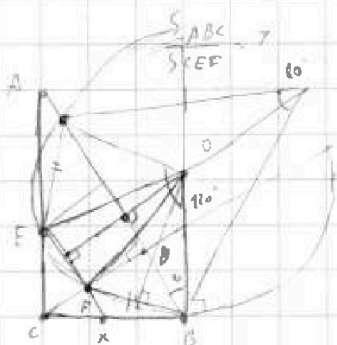


$\frac{CF}{FE} = \frac{CD}{AD} = \frac{n}{3n} = \frac{1}{3}$

$\frac{EC}{FF} = \frac{CD}{AD} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$\tan \angle A = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \angle A = 30^\circ$

$\Rightarrow CB = 2n$
 $AC = 2\sqrt{3}n$



$XB^2 = XF \cdot XF$
 $XF = 4XF$
 $XB^2 = 4XF^2$
 $CX = 2XF \quad CX^2 = 4XF^2$
 $XB^2 = CX^2$
 $\Rightarrow XB = CX > 0 \Rightarrow XB = CX \Rightarrow XF = \text{оп. длина} = 2n$

$EF = \frac{3}{4} AC = \frac{3}{4} \cdot 2\sqrt{3}n = \frac{3\sqrt{3}}{2}n$

$CF = \frac{3}{2}n \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}n$

$S_{EFC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2}n \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}n = \frac{9\sqrt{3}}{8}n^2$

$S_{ABC} = 2n \cdot 2\sqrt{3}n \cdot \frac{1}{2} = 2\sqrt{3}n^2$

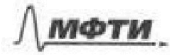
$\frac{9\sqrt{3}}{8}n^2 \cdot \frac{16}{8\sqrt{3}n^2} = \frac{16}{5}$

$\frac{9\sqrt{3}}{8}n^2 = \frac{16}{5}$

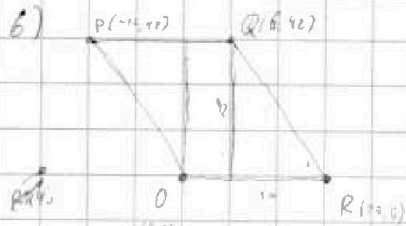
На одной странице можно оформлять только одну задачу.
 Отметьте крестиком номер задачи,
 решение которой представлено на странице:



- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
 страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$A(x_1, y_1)$$

$$B(x_2, y_2)$$

$$\text{Можно } 2x = 20$$

$$3(x_2 - x_1) + y_2 - y_1 = 33$$

$$33 = 3 - 11$$

$$4x=0 \quad 0+33 \quad 15+10$$

$$4x=1 \quad 3+30 \quad 18+15$$

$$4x=2 \quad 6+27 \quad 21+10$$

$$4x=3 \quad 9+24 \quad 24+10$$

$$4x=4 \quad 12+21 \quad 27+10$$

$$4x=5 \quad 15+18$$

$$4x=6 \quad 18+15$$

$$4x=7 \quad 21+10$$

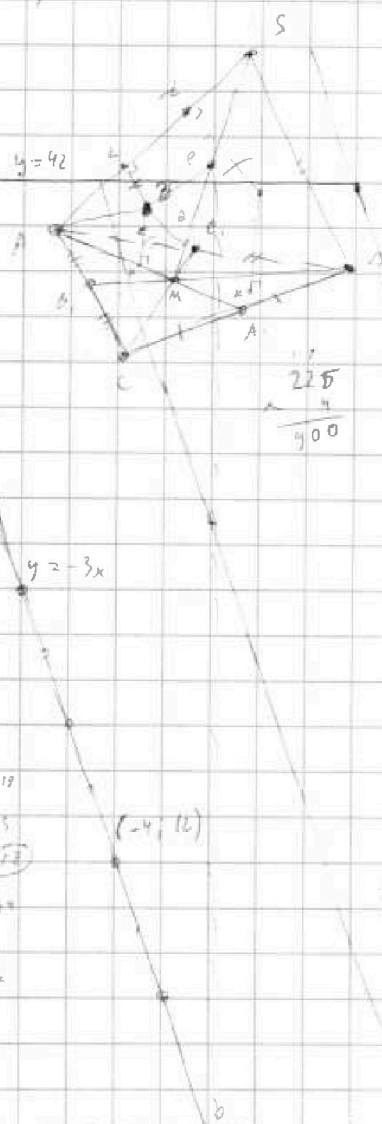
$$4x=8 \quad 24+10$$

$$4x=9 \quad 27+10$$

$$4x=10 \quad 30+10$$

| | | | |
|--------------|---------------|-----------------|---------------|
| $\Delta x=0$ | $\Delta y=33$ | $\Delta x=7$ | $\Delta y=12$ |
| $\Delta x=1$ | $\Delta y=30$ | $\Delta x=8$ | $\Delta y=9$ |
| $\Delta x=2$ | $\Delta y=27$ | $\Delta x=9$ | $\Delta y=6$ |
| $\Delta x=3$ | $\Delta y=24$ | $\Delta x=10$ | $\Delta y=3$ |
| $\Delta x=4$ | $\Delta y=21$ | $\Delta x=11$ | $\Delta y=0$ |
| $\Delta x=5$ | $\Delta y=18$ | → отсюда $3x_1$ | |
| $\Delta x=6$ | $\Delta y=15$ | | |

7)



$$SP = 12$$

$$\angle ASB = 90^\circ$$

$$SA = SB = 12$$

$$AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = ?$$

$$3x_2 + y_2 - 3x_1 - y_1 = 33$$

$$3x_2 + y_2 - (3x_1 + y_1) = 33$$

$$y = -3x + \alpha \quad \alpha \in [0; 60]$$

$$3x_2 + 3x_1 + \alpha - (3x_1 - 3x_1 + \alpha)$$

$$6 - \alpha = 33 \quad \alpha \in [0; 60]$$

$$y = -3x + 60$$

$$16 \quad 14 \in \mathbb{Z} \rightarrow 6/\alpha$$

$$60 - 27 = 33 \quad 35 - 0 = 35$$

$$27 \quad 27 \text{ при } \alpha = 6$$

$$7 \cdot 13 = 91$$

$$y = -3x - 33 \rightarrow x = 0$$

на отрезке AC

по $14 \times 30 \rightarrow 14 \times 14 \text{ см}$

$$2x - x_1 =$$

$$24 + 9$$

$$14 + 14 + 27 = 7^2 \cdot 4 \cdot 3^3$$

$$\begin{array}{r} 64 \\ 126 \\ \hline 190 \\ 1372 \\ \hline 592 \\ \hline 5 \cdot 92 \end{array}$$

Всего 929,2 см

- $4+0=4$
- $9+4=13$
- $15+4=19$
- $18+4=22$
- $22+4=26$
- $27+4=31$
- $\frac{33}{12} = \frac{11}{4}$

$$(-4, 16)$$

$$(2, 9)$$

$$y=0$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$5) \log_3^4 x + 6 \log_3 x = \log_{x^3} 27 - 8 \quad \log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{20y} (3^{11}) - 8$$

$$\begin{cases} x > 0 & y > 0 \\ x \neq 1 & y \neq \frac{1}{3} \end{cases} \quad \text{всё верно } xy = ?$$

$$\log_3^4 x = \frac{6 \log_3 x}{\log_3 x} = \frac{2.5 \log_3 x}{\log_3 x} - 8$$

$$\log_3^4 x + \frac{3.5}{\log_3 x} - 8 = 0 \quad | \cdot \log_3 x \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$$

$$\log_3^5 x + 3.5 + 8 \log_3 x = 0 \quad f = 2a^5 - 16a + 7 = 0$$

$$2 \log_3^5 x + 16 \log_3 x + 7 = 0$$

$$\log_3 x$$

$$f' = 10a^4 - 16 > 0$$

\rightarrow уравнение имеет 1 корень

$$2a^5 + 16a - 7$$

$$2a(a^4 + 8)$$

$$\frac{(8a^4 + 1)2}{11^5} \rightarrow$$

$$2 \frac{37}{32} \quad \frac{18}{1}$$

$$3 \frac{50}{11}$$

$$\log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \frac{11}{10} 5.5 \log_{5y} 3 - 8$$

$$\begin{cases} \log_3^4(5y) - 3.5 \log_{5y} 3 + 8 = 0 \\ \log_3^4(x) + 3.5 \log_{2x} 5 + 8 = 0 \end{cases}$$

$$\log_3^4(x) + 3.5 \log_{2x} 5 + 8 = 0$$

$$\log_{5y} \left(\frac{1}{\log_{5y} 3} \right) - 3.5 \log_{5y} 3 + 8 = 0$$

$$\left(\frac{1}{\log_{2x} 5} \right) + 3.5 \log_{2x} 5 + 8 = 0$$

$$0^5 - 3.5 + 8a$$

$$5a^5 + 8 > 0$$

\rightarrow уравнение имеет 1 корень

$$\log_{5y} 3$$

$$\log_3 5y = -\log_3 x$$

$$\log_3 5xy = 0$$

$$5xy = 1$$

$$xy = 0.2$$