



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^8 3^{14} 5^{12}$, bc делится на $2^{12} 3^{20} 5^{17}$, ac делится на $2^{14} 3^{21} 5^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой BC в точке B , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке F , а катет AC – в точке E . Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 5 : 2$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF .

3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_5^4(2x) - 3 \log_{2x} 5 = \log_{8x^3} 625 - 3, \quad \text{и} \quad \log_5^4 y + 4 \log_y 5 = \log_{y^3} 0,2 - 3.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-16;80)$, $Q(2;80)$ и $R(18;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 100, $SA = BC = 16$.

а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .

б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{aligned}
 1. \quad a &= 2^8 \cdot 3^{15} \cdot 5^{12} \\
 b &= 2^{12} \cdot 3^{10} \cdot 5^{17} \\
 c &= 2^{15} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}
 \end{aligned}
 \Rightarrow \frac{a \cdot b \cdot c}{(abc)^2} = \frac{1}{2 \cdot 3}$$

где $k, m, n \in \mathbb{N}$.

$$a \cdot b \cdot c = (abc)^2 = k \cdot m \cdot n \cdot 2^{39} \cdot 3^{55} \cdot 5^{68}$$

Таким образом, найдем, чтобы в составе всех чисел k, m, n в разложении были равны, т.е. квадрат.

$$a = 2^{2x} \cdot 3^{2y} \cdot 5^{2z} \quad b = 2^{2x} \cdot 3^{2y} \cdot 5^{2z} \quad c = 2^{2x} \cdot 3^{2y} \cdot 5^{2z}$$

Тогда имеем:

$$a = 2^x \cdot 3^y \cdot 5^z$$

$$b = 2^{35+2x} \cdot 3^{55+2y} \cdot 5^{68+2z}$$

где $x, y, z \in \mathbb{Z}, x, y, z \geq 0$

$$\Rightarrow abc = 2^{12+2x} \cdot 3^{28+2y} \cdot 5^{39+2z}$$

$$\text{таким образом } a = \frac{abc}{b}, b = \frac{abc}{a}, c = \frac{abc}{a \cdot b}, \text{ т.е.}$$

abc должно быть делит на каждое из чисел a, b, c .
Т.е.

$$\begin{cases} 12+2x \geq \max(8, 12, 15) \Rightarrow x=0 \\ 28+2y \geq \max(10, 20, 21) \Rightarrow y=0 \\ 39+2z \geq \max(12, 17, 30) \Rightarrow z=5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow abc = 2^{12} \cdot 3^{28} \cdot 5^{39} \quad \text{Тогда имеем } a, b, c:$$

$$a = 2^8 \cdot 3^{15} \cdot 5^{12}, b = 2^{12} \cdot 3^{10} \cdot 5^{17}, c = 2^{15} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$$

$$\text{Ответ: } 2^{12} \cdot 3^{28} \cdot 5^{39}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

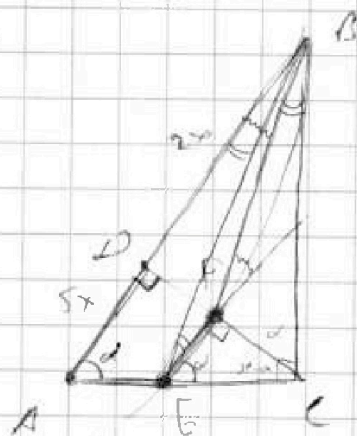
1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



2.



$$\frac{AD}{AB} = \frac{5}{1}$$

$$\frac{FC}{BC} = \frac{AE}{AB}$$

Так $AB \parallel EF \Rightarrow \angle ABE = \angle BEF$
(как внутренние).

Так как BL — касательная к окружности, то $\angle FBL = \frac{1}{2} \angle FCB$ (теорема о касательной).
то $\angle BEF = \frac{1}{2} \angle FCB$ (как внутренние углы, отрезок FB)

$\Rightarrow \angle BEF = \angle FBL$. Но $\angle BEF = \angle ABE \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle FBL = \angle ABE$. Так как $\angle BAC = \alpha \Rightarrow \angle FEC = \alpha$
(из 11). 5) $\angle ECF = 90^\circ \Rightarrow \angle FCB = \alpha$.

$\triangle AEB \sim \triangle BFC$ ($\angle ABE = \angle FBL$, $\angle BAE = \angle FCB = \alpha$)

$$\Rightarrow \frac{FC}{BC} = \frac{AE}{AB} \quad (1)$$

$$\Rightarrow \frac{FC}{BC} = \frac{AE}{AB} \Rightarrow FC = \frac{AE}{AB} \cdot BC. \text{ Так как } AD = 50,$$

$$BC = 20 \Rightarrow CD = \sqrt{AD \cdot DB} = 10\sqrt{10}. \text{ (по теореме Пифагора)}$$

$$\Rightarrow AC = 10\sqrt{35} \text{ см. Так как } \triangle ADC \sim \triangle BFC \text{ и } BC =$$

$$10\sqrt{35} \text{ (по теореме Пифагора). Из (1): } \frac{FC}{10\sqrt{35}} = \frac{AE}{10\sqrt{35}} \Rightarrow AE = \frac{2}{\sqrt{5}} FC$$

$$\text{Из того, что } \triangle ADC \sim \triangle BFC \Rightarrow \frac{AD}{BC} = \frac{DC}{FC}$$

$$\Rightarrow \frac{50}{10\sqrt{35}} = \frac{10\sqrt{10}}{FC} \Rightarrow FC = \frac{20\sqrt{10}}{\sqrt{35}} = \frac{20\sqrt{2}}{\sqrt{7}}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{\sqrt{5}} FC = \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \frac{20\sqrt{2}}{\sqrt{7}} = \frac{40\sqrt{2}}{\sqrt{35}} = \frac{40\sqrt{14}}{7}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\frac{EC}{FC} = \frac{AC}{CD} = \frac{x\sqrt{5}}{b\sqrt{10}} \Rightarrow EC = \sqrt{\frac{2}{5}} FC$
 $\Rightarrow AE = AC - EC = AC - \sqrt{\frac{2}{5}} FC$

$\frac{EC}{FC} = \frac{AC}{CD} = \frac{x\sqrt{5}}{b\sqrt{10}} \Rightarrow EC = \sqrt{\frac{2}{5}} FC$

$AE = AC - EC = AC - \sqrt{\frac{2}{5}} FC, \text{ так } AC = \frac{2}{\sqrt{5}} FC \Rightarrow$

$\Rightarrow AC - \sqrt{\frac{2}{5}} FC = \sqrt{\frac{2}{5}} FC \Rightarrow FC = \frac{AC}{\sqrt{\frac{2}{5}}} = \frac{x\sqrt{5}}{\sqrt{\frac{2}{5}}} = x\sqrt{\frac{5}{2}}$

Тогда $\triangle GFC \sim \triangle ABC$ (по тр. углам). $\Rightarrow$

$\frac{S_{ABC}}{S_{GFC}} = \left(\frac{BC}{FC}\right)^2 = \left(\frac{x\sqrt{5}}{x\sqrt{\frac{5}{2}}}\right)^2 = \frac{15}{5} = \boxed{\frac{28}{5}}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$3. \quad 10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$$

$$\text{Так как } \arcsin(y) \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right], \text{ то}$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq \pi - 2x \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{\pi}{2} \geq 2x - \pi \geq -\frac{\pi}{2}$$

$$\begin{cases} \frac{3\pi}{2} \geq 2x \geq \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{2} \geq 2x \geq \frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow x \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$$

$$\text{Таким образом, } \arcsin(\cos x) = \arcsin(\cos(\frac{\pi}{2} - x)) = \frac{\pi}{2} - \arcsin(\sin x) \text{ где } \arcsin(\sin x) = x \text{ для } x \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$$

$$\Rightarrow \arcsin(\cos x) = \frac{\pi}{2} - \arcsin(\sin x)$$

$$\arcsin(\cos x) = \frac{\pi}{2} - \arcsin(\sin x) \Rightarrow \arcsin(\cos x) = \frac{\pi}{2} - \arcsin(\sin x)$$

$$= \frac{\pi}{2} - x \text{ (где } x \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]) = \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{4}\right]$$

$$\text{Заметим: } 10 \left(\frac{\pi}{2} - x \right) = \pi - 2x$$

$$5\pi - 10x = \pi - 2x$$

$$4\pi = 8x$$

$$x = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Отв: } \boxed{x = \frac{\pi}{2}}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

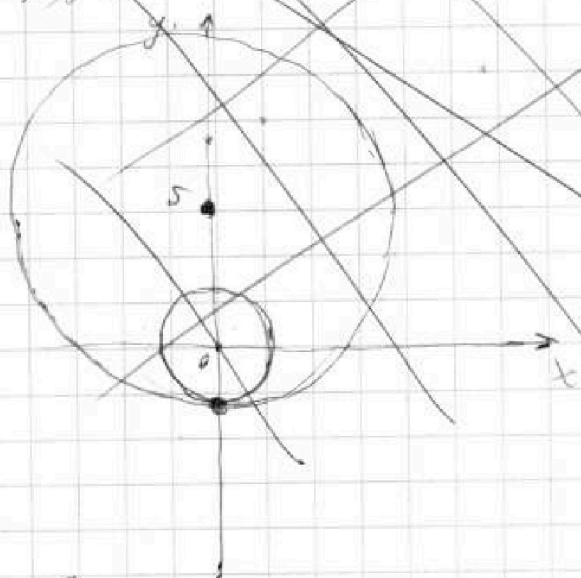


$$4. \begin{cases} ax - 3y + 5z = 0 \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 10y + 65) = 0 \end{cases}$$

Исходное уравнение равносильно:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + y^2 - 10y + 65 = 0 \Leftrightarrow x^2 + (y - 5)^2 - 100 + 65 = 0 \\ x^2 + (y - 5)^2 = 35 = 5^2 \end{cases}$$

В системе координат xy найти совокупность точек
для окружностей ω с центром в точке $(0, 0)$, $(0, 5)$
с радиусами 1 и 5 соответственно:



Решим, что окружности
касание внутреннее окружностей,
т.е. ω касание окружностей
или окружностей (5) и ω окружностей
касание внешнее ω (1)
или окружностей касание (6)

В системе координат xy найти ~~совокупность~~

точек для окружностей ω с центрами $(0, 0)$, $(0, 10)$,
радиусами 1 и 6 соответственно:

Уравнение $ax - 3y + 5z = 0$ имеет вид
 $y = \frac{a}{3}x + \frac{5}{3}z$

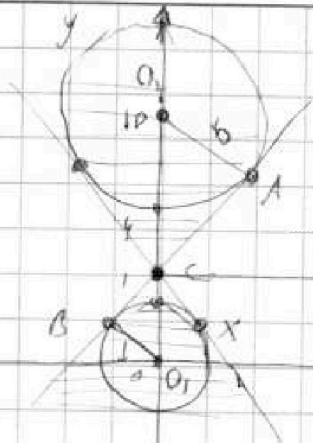
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

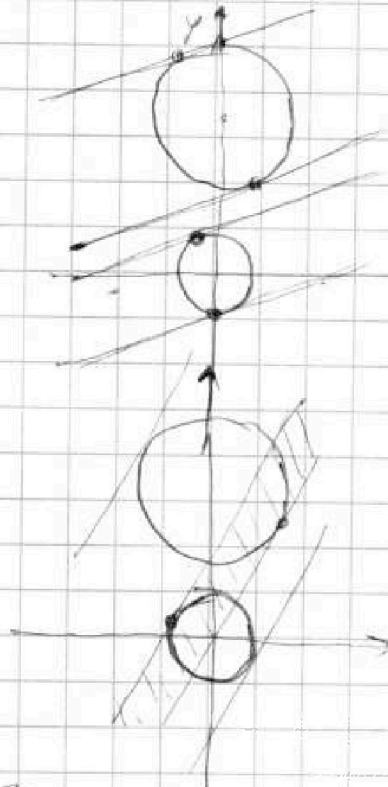
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



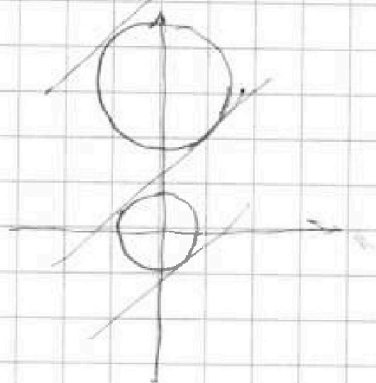
Три круга, внешне касающиеся
каждые два и пересекающиеся

Докажем, что если для
каждого A можно выбрать точку
 B , что прямые AB будут
пересекать окружности P и Q
таким, то P и Q касаются
внутри или снаружи, образуя
касательную к обеим.

Докажем, что если P и Q касаются
внутри или снаружи, то для
каждого A можно выбрать точку
 B , что прямые AB будут
пересекать окружности P и Q
таким, то P и Q касаются
внутри или снаружи, образуя
касательную к обеим.



Мы видим, что для точки A
или O_1 , или O_2 или
2 пересечения при P и Q
пересекаются внутри
3 и 4 точки пересечения
тогда при внутреннем касании
получается касательная к обеим.



Успехи наших исследований
объясняют то, что при
внутреннем касании
получается касательная к обеим.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Найти этот коэффициент. Из рисунка.

$$\frac{O_1C}{CO_2} = \frac{BO_1}{O_1A} = \frac{1}{5} \Rightarrow O_1C = \frac{1}{5} CO_2$$

$$\text{Из } O_1C + CO_2 = AO_2 = 10 \Rightarrow \frac{1}{5} CO_2 + CO_2 = 10 \Rightarrow CO_2 = \frac{5}{2} \cdot 10$$

$$CO_1 = \frac{1}{2} \cdot 10$$

Пусть $\sin \angle O_1O_2$. $\lg \angle ACH = \lg \angle O_2CA =$

$$= \frac{CO_1}{O_2A} \text{ . Из т. Пифагора } CA = \sqrt{CO_2^2 + O_2A^2} = 6 \sqrt{\frac{100}{5} - 1}$$

$$= 6 \sqrt{\frac{51}{5}} = \frac{6}{2} \sqrt{51} \Rightarrow \lg \angle ACH = \frac{\sqrt{51}}{2}$$

$$\lg \angle HCK = \lg \angle XCO_1 = \lg \angle O_1CB = \frac{BO_1}{CO_1}$$

$$\text{Из } BC = \sqrt{\frac{100}{5} - 1} = \sqrt{\frac{51}{5}} = \frac{\sqrt{51}}{2} \Rightarrow \lg \angle HCK = \frac{\sqrt{51}}{2}$$

Тогда, так как площадь треугольника $\frac{a}{2}$, то

$$\begin{cases} \frac{a}{2} < -\lg \angle HCK \\ \frac{a}{2} > \lg \angle HCA \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a}{2} < -\frac{\sqrt{51}}{2} \\ \frac{a}{2} > \frac{\sqrt{51}}{2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a \in (-\infty; -\frac{3}{2}\sqrt{51}) \cup (\frac{3}{2}\sqrt{51}; +\infty)$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



5. $\log_5^9(2x) - 3 \log_{2x} 5 = \log_{2x} 625 - 3.$

Требуется

~~$\log_5^9(2x) - 3 \log_{2x} 5$~~

$\log_5^4 y + 4 \log_y 5 = \log_{y^2} 32 - 3$

$a \Rightarrow 3: x > 0, x \neq \frac{1}{2}; y > 0; y \neq 1.$

Требуется решить:

$\log_5^9(2x) - 3 \log_{2x} 5 = \frac{\log_{2x} 625}{\log_{2x} 2x^2} - 3$

$\log_5^9(2x) - 3 \log_{2x} 5 = \frac{1}{2} \log_{2x} 5^4 - 3$

$\log_5^9(2x) - \frac{3}{\log_5 2x} = \frac{4}{3} \frac{1}{\log_5 2x} - 3$

① $\log_5^9(2x) - \frac{1}{\log_5 2x} \cdot \frac{13}{3} + 3 = 0$

Требуется решить:

$\log_5^9 y + \frac{4}{\log_5 y} + \frac{1}{3} \frac{1}{\log_5 y} + 3 = 0$

② $\log_5^9 y + \frac{13}{3} \frac{1}{\log_5 y} + 3 = 0$

Возьмем из ① ②:

$(\log_5^9(2x) - \log_5^9 y) / (\log_5^9(2x) + \log_5^9 y) = \frac{13}{3} \left(\frac{1}{\log_5 2x} + \frac{1}{\log_5 y} \right) = 0$

$(\log_5 2x + \log_5 y) / (\log_5 2x - \log_5 y) = \frac{13}{3} \frac{\log_5 2x \log_5 y}{\log_5 2x \log_5 y} = 0$

Значит $a = \log_5 2x, b = \log_5 y$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} a^4 - \frac{13}{3a} + 3 = 0 \\ b^4 + \frac{13}{3b} + 3 = 0 \end{cases} \quad a+b=2$$

Используем метод Виета:

$$(a^2 - b^2) / (a^2 + b^2) = \frac{13}{3} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) = a$$

$$(3)(a+b) / (b-a) (a^2 + b^2) = \frac{13}{3ab} \Rightarrow 0$$

Допускаем предположение, что a, b — корни уравнения:

$$x^5 + 3x - \frac{13}{3} = 0$$

$$\begin{cases} a^5 + 3a - \frac{13}{3} = 0 \\ b^5 + 3b + \frac{13}{3} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3a^5 + 9a - 13 = 0 \\ 3b^5 + 9b + 13 = 0 \end{cases}$$

$$\text{Сложим: } 3a^5 + 3b^5 + 9(a+b) = 0$$

$$3(a^5 + b^5) + 9(a+b) = 0$$

$$\begin{array}{r} a^5 + b^5 \quad | \quad a+b \\ a^5 + b^5 \quad | \quad a^5 + b^5 - a^3b + a^2b^2 - a^2b^3 \\ \hline b^5 - a^3b \\ -b^5 + a^3b \\ \hline -a^3b - a^2b^2 \\ -a^3b - a^2b^2 \\ \hline a^3b^2 - a^2b^3 \\ a^3b^2 + a^2b^3 \\ \hline -a^2b^3 - a^2b^3 \\ -a^2b^3 - a^2b^3 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$(4) (a+b) / (3/a^5 - a^3b + a^2b^2 - a^2b^3 + b^5) + 9 = a$$

Используем (3):

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\lg_5(2xy) (\lg_5(2x) + \lg_5(2y) + \lg_5^2 2 + \lg_5^2 y) - \frac{13}{3(\lg_5 2 + \lg_5 y)} = 0$$

$$\text{Пусть } a = \lg_5 2x, \quad b = \lg_5 y$$

$$\lg_5(2xy) ((a+b)(a^2+b^2) - \frac{13}{3b}) = 0$$

$$(5) (a+b) (3ab(a^2 + a^2b + ab^2 + b^3) + 13) = 0$$

Возьмем из (5):

$$(a+b) (3a(a^3 + ab + ab^2 + b^3) + 3b^3 + 13 - 3ab(a^2 + a^2b + ab^2 + b^3) - 13) = 0$$

$$\text{Приведем уравнение } 3x^5 + 9x - 13 = 0$$

$$\text{Возведем в степень } 15x^5 + 9 \neq 0 \text{ при любых } x$$

Решим уравнение $3x^5 + 9x - 13 = 0$.
Решим 1 корень. Аналогично для уравнения $3x^5 + 9x + 13 = 0$
Следовательно у нас:

$$\begin{cases} 3a^5 + 9a - 13 = 0 \\ 3b^5 + 9b + 13 = 0 \end{cases} \quad \text{Решим 1 уравнение!}$$

Из предыдущих рассуждений следует, что:

Решим (одна) $a+b=0$ и $a=-b$ (можно проверить и убедиться).

$$\text{Пусть } a = \lg_5 2x \text{ и } b = \lg_5 y, \text{ то}$$

$$a+b = \lg_5 2x \cdot y = 0 \Rightarrow 2xy = 1 \Rightarrow xy = 0,5$$

$$\text{Ответ: } 0,5$$

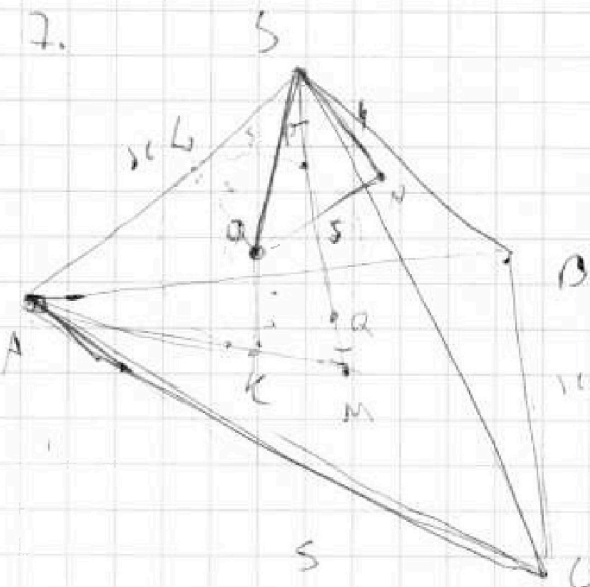
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

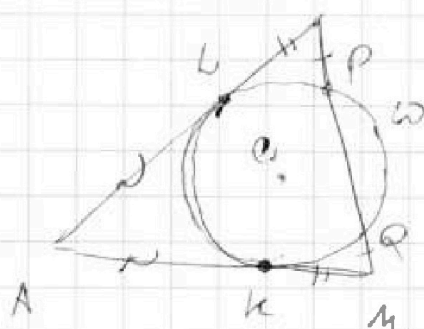
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



а) Пл. α касание
Плоскости ABC, т.е.
 $OK \perp AM$, т.е. O —
центр α
Рассмотрим ~~плоскость~~ треугольник
ASM. Точка пересечения
 α с этой плоскостью —
— отрезок LM с центром O .



Из теоремы о касании отрезков
~~касания~~ секущих:

$$LS^2 = SP \cdot SQ =$$

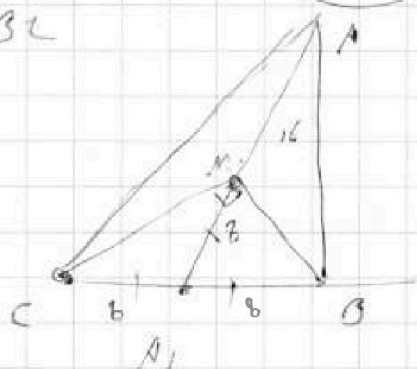
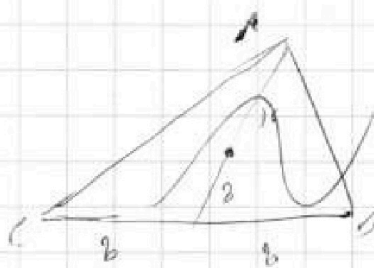
$$LM^2 = MQ \cdot MP$$

$$\text{т.к. } MQ = SP \Rightarrow LS^2 = LM^2 \Rightarrow LS = LM$$

$AL = AK$ как касательные из одной точки *

$\triangle ASM$ — равнобедр. $\Rightarrow AS = AM \Rightarrow AM = 16$

Рассмотрим $\triangle ABZ$



$CA_1 = A_1B = 8$. M — точка перес. медиан $\Rightarrow A_1M = \frac{1}{2} AM = 8$.

$\Rightarrow A_1M = CA_1 = A_1B = 8 \Rightarrow \angle CMB = 90^\circ$ Треуголь. $\triangle AA_1B$ —

$$S_{ABZ} = \frac{1}{2} AM \cdot CB \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} A_1B \cdot CB \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 16 \cdot \sin \alpha = 12 \cdot 16 \cdot \sin \alpha$$

т.к. $S_{ABZ} = 160$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\Rightarrow \sin \alpha = \frac{100}{12 \cdot 15} = \frac{25}{12 \cdot 5} = \frac{25}{60}$$

$$\Rightarrow \cos \alpha = \sqrt{\frac{52^2 - 25^2}{52^2}} = \sqrt{\frac{23 \cdot 73}{52^2}}$$

$$MB = \sqrt{2^2 + 8^2} = 2 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{17 \cdot 23}}{52}$$

$$MB = \sqrt{2^2 + 8^2} = 2 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{17 \cdot 23}}{52}$$

$$MC = \sqrt{2^2 + 8^2} = 2 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{17 \cdot 23}}{52}$$

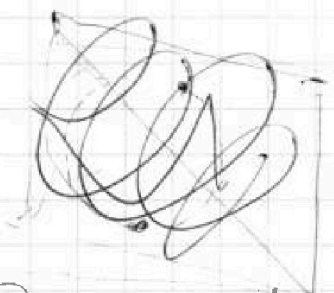
$$AB_1 \cdot C(1 - 2 \cdot \frac{2}{5} \cdot \sqrt{1 - \frac{52^2 - 25^2}{52^2}}) / 2 \cdot \frac{\sqrt{17 \cdot 23}}{52} =$$

$$= 2 \cdot \frac{2}{5} \cdot 2 \cdot \sqrt{1 - \frac{52^2 - 25^2}{52^2}} = 2 \cdot \frac{2}{5} \cdot 2 \cdot \frac{5}{52} =$$

$$= \frac{2 \cdot 2 \cdot 2}{5} \cdot 25 = 150$$

$$\Rightarrow AA_1 \cdot MB_1 \cdot CC_1 = 150 \cdot 25 = 3500$$

б)



Т.к. R — радиус SR

$P \in N_{\text{пл}} \quad ON = 5, SN = 5$

$\Rightarrow$ по теореме $OS = \sqrt{25 + 16} = \sqrt{41}$

Решим $\triangle AOS$: Т.к. $OK \perp AS \Rightarrow$

$OK = R = 5$ (т.к. R — радиус AS)

$$\Rightarrow AK = \sqrt{OS^2 - OK^2} = 5$$

$$\Rightarrow AK = 16 - 5 = 12$$

Покажем, что $AK = 12$, т.к. $AK \perp AS, AL = AK \Rightarrow$

$$AK = 12 \Rightarrow LA_1 = LA_1 - AK = 25 - 12 = 12$$

Еще можно рассмотреть $\triangle AOS$ — прямоугольный, т.к.

R — радиус ABC и SR — радиус SR

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

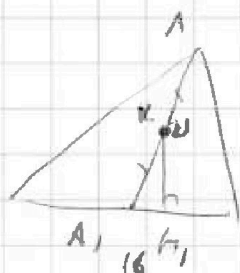
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



решение от



К от BC. Т.к. К - середина AA,

$$(AK = 12, AH = 29) \Rightarrow$$

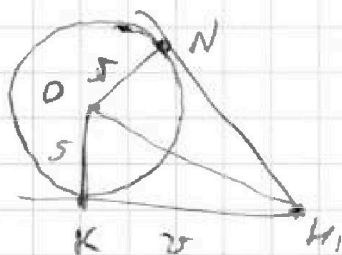
$$KH = \frac{1}{2} AH, \text{ где } KH, AH - \text{высоты}$$

из точек К и А соотв.:

$$\text{то } AH \cdot BC \cdot \frac{1}{2} = S = 100 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} AH = \frac{100}{16} = \frac{25}{4}$$

Т.к. $\angle K$ касательна ABC и STBC, т. продолжим
ее сторону HK до пересечения с BC в точке Q.



$$\angle KHQ = \frac{5}{25} = \frac{20}{25} = \frac{4}{5}$$

$$\Rightarrow \angle NHK = 2 \arctg \frac{4}{5}$$

$$\text{Ответ: } 2 \arctg \frac{4}{5}$$