



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^6 3^{13} 5^{11}$, bc делится на $2^{14} 3^{21} 5^{13}$,
+ ac делится на $2^{16} 3^{25} 5^{28}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой AC в точке A , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке E , а катет BC – в точке F . Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1,4$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF .
3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$.
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_{x^3} \frac{1}{121} - 5, \quad \text{и} \quad \log_{11}^4 (0,5y) + \log_{0,5y} 11 = \log_{0,125y^3} (11^{-13}) - 5.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-15;90)$, $Q(2;90)$ и $R(17;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 180, $SA = BC = 20$.
- а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .
- б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 6$, а радиус сферы Ω равен 8.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

ИФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№1

Давайте рассматривать каждый простой делитель
по отдельности $\deg(e)_2$ — степень вхождения

2 в e , то есть если $\deg(e)_2 = k$ то
 $e \div 2^k$, но $e \nmid 2^{k+1}$.

Хорошо, тогда заметим, что:

$$\deg(a)_2 + \deg(b)_2 \geq 6$$

$$\deg(b)_2 + \deg(c)_2 \geq 14$$

$$\deg(a)_2 + \deg(c)_2 \geq 16$$

тогда $2(\deg(a)_2 + \deg(b)_2 + \deg(c)_2) \geq 16 + 14 + 16 = 36$
то есть $abc \div 2^{18}$

Проделаем ту же операцию с 3 ИФ.

тогда для 3: $\frac{13 + 21 + 25}{2} = \frac{59}{2}$, но

мы знаем, что степень вхождения должна
быть целой, а $\deg(abc)_3 \geq \frac{59}{2}$, значит

$$\deg(abc)_3 \geq \frac{60}{2} = 30$$

$\deg(abc)_5 \geq \frac{11 + 13 + 28}{2} = \frac{52}{2} = 26$, но при этом замечаем

что $\deg(abc)_5 \geq 28$, а $\deg(a)_5 + 2\deg(b)_5 + \deg(c)_5 \geq 11 + 13 = 24$
значит не существует



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Значит $\deg(abc) \geq \frac{28+28}{2} = 28$. ($\deg(abc) \geq \deg(bc) \geq 28$).
тогда $abc: 5^{28}$, $abc: 3^{30}$, $abc: 2^{18}$,
значит $abc: 5^{28} \cdot 3^{30} \cdot 2^{18}$.
Значит минимальное $abc = 5^{28} \cdot 3^{30} \cdot 2^{18}$.

Пример на то число;

$$a = 2^4 \cdot 3^9 \cdot 5^{14}$$

$$b = 2^2 \cdot 3^4 \cdot 5^0$$

$$c = 2^{12} \cdot 3^{17} \cdot 5^{14}$$

$$\text{тогда } ab = 2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{14} : 2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{14}$$

$$bc = 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{14} : 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{13}$$

$$ac = 2^{16} \cdot 3^{26} \cdot 5^{28} : 2^{16} \cdot 3^{25} \cdot 5^{28}$$

а $abc = 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$, значит минимум достигнут

$$\text{Ответ: } abc = 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$$

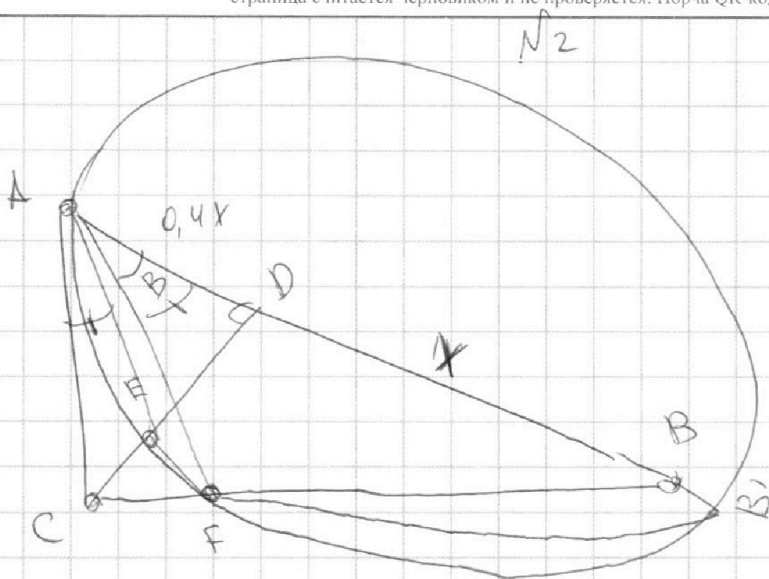
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{AB}{BD} = 1,4 \quad , \text{ пусть } BD = x, \text{ тогда } AB = 1,4x,$$

$$\text{а значит } AD = 0,4x$$

$$\triangle ADC \sim \triangle CDB \Rightarrow \frac{AD}{CD} = \frac{CD}{DB} \Rightarrow$$

$$CD = \sqrt{AD \cdot DB} = \sqrt{0,4x \cdot x} = \sqrt{0,4}x.$$

$$\angle CFE = \angle CBD \text{ из параллельности.}$$

$$\text{пусть } EF = kx,$$

$$\text{тогда } \triangle CEF \sim \triangle CDB \Rightarrow$$

$$\frac{CE}{CD} = \frac{CF}{CB} = k \text{ пусть } CB \text{ это равно } k.$$

$$\text{тогда } CE = k \cdot x \cdot \sqrt{0,4}$$

$$EF = k \cdot x$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что

$$\angle CAB = \angle FB'A + \angle BAF$$

это равно

$$\angle EAB \quad \text{т.к. } EAB'F -$$

равнобедренный

треугольник

$B'A \parallel EF$.

значит $\angle CAB = \angle EAB + \angle BAF$

$$\angle CAF = \angle EAB,$$

значит $\angle CAE = \angle BAF$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

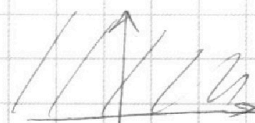
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



N3

$$\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$



$$0 \leq \arccos \leq \pi$$

$$\arccos\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) = \pi - 2x$$

$$\pi - \left(\frac{\pi}{2} - x + 2\pi n\right) = \pi - 2x$$

$$\pi - \frac{\pi}{2} + x - 2\pi n = \pi - 2x$$

$$-\frac{\pi}{2} + x - 2\pi n = \pi - 2x$$

$$x = \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi n}{3}$$

$$-\frac{\pi}{2} + \frac{5\pi n}{2}$$

$$0 \leq \frac{\pi}{2} - x + 2\pi n \leq \pi$$

$$0 \leq \frac{\pi}{2} + 2\pi n + \frac{\pi}{2} - \frac{5\pi n}{2} \leq \pi$$

$$0 \leq \pi + 2\pi n - \frac{5\pi n}{2} \leq \pi$$

$$0 \leq 1 + 2n - 2.5n \leq 1$$

$$-1 \leq -0.5n \leq 0$$

$$n = 0, 1, 2$$

$$x = -\frac{\pi}{2}, 2\pi, \frac{3\pi}{2}$$

~~$$\arccos\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 2\pi n\right) = \pi - 2x$$~~

$$\arccos\left(-\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 2\pi n\right) = \pi - 2x$$

$$-\frac{\pi}{2} + x + 2\pi n = \pi - 2x$$

$$12x = \frac{14\pi}{12} + \frac{20\pi n}{12}$$

$$x = \frac{14\pi}{12} + \frac{20\pi n}{12}$$

$$0 \leq -\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 2\pi n \leq \pi$$

$$0 \leq x - \frac{\pi}{2} + 2\pi n \leq \pi$$

$$0 \leq \frac{14\pi}{12} - \frac{\pi}{2} + \frac{20\pi n}{12} + 2\pi n \leq \pi$$

$$0 \leq 14 - 6\pi - 20\pi n + 24\pi n \leq 12\pi$$

$$0 \leq 8\pi + 4\pi n \leq 12\pi$$

$$0 \leq 8 + 4n \leq 12$$

$$-8 \leq 4n \leq 4$$

$$-2 \leq n \leq 1$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Знаки

$$n = -2, -1, 0, 1$$

$$x = \frac{14\pi}{12} - \frac{20\pi n}{12}$$

$$n = 1$$

$$\frac{14\pi}{12} - \frac{20\pi}{12} = -\frac{6\pi}{12} = -\frac{\pi}{2}$$

$$n = 0$$

$$\frac{14\pi}{12} = \frac{7\pi}{6}$$

$$n = -1$$

$$\frac{14\pi}{12} + \frac{20\pi}{12} = \frac{34\pi}{12} = \frac{17\pi}{6}$$

$$n = -2$$

$$\frac{14\pi}{12} + \frac{40\pi}{12} = \frac{54\pi}{12} = \frac{9\pi}{2}$$

Ответ:

$$x = \left[\begin{array}{c} -\frac{\pi}{2} \\ 2\pi \\ \frac{5\pi}{2} \\ \frac{17\pi}{6} \\ \frac{7\pi}{6} \end{array} \right]$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№4

посмотрим на 2 часть. Заметим,
что выражение равно 0, когда ~~оба слагаемых~~ одна
из частей равна 0.

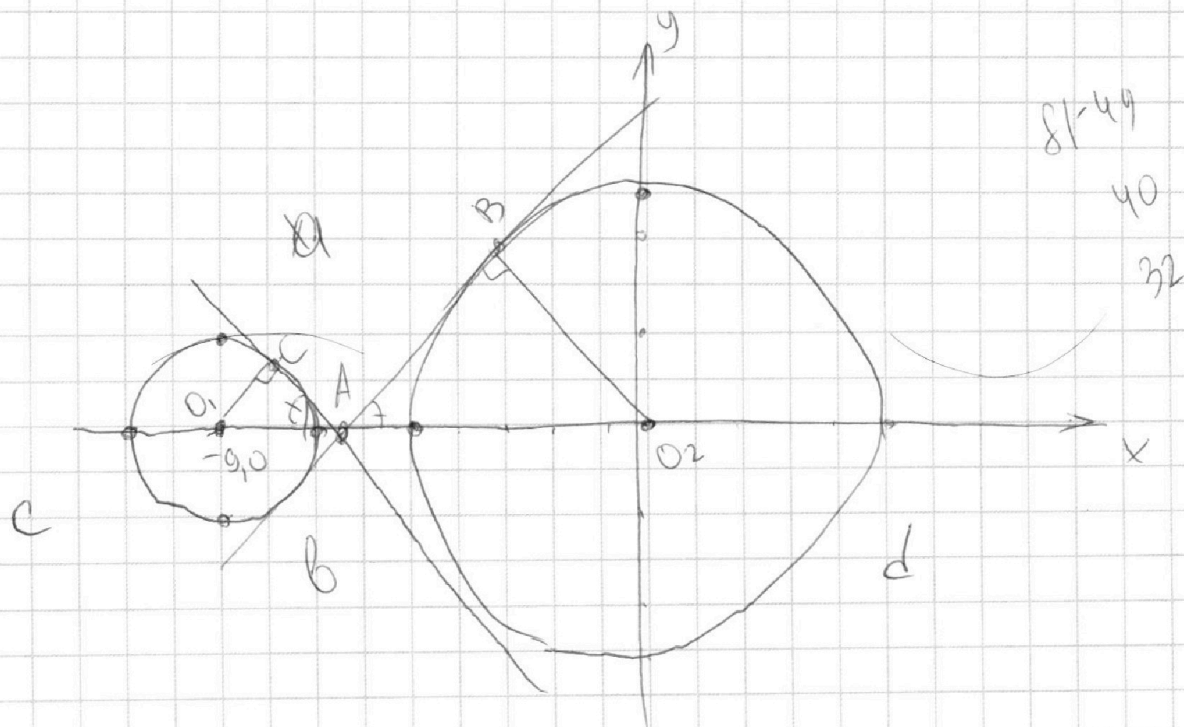
$$x^2 + y^2 - 25 = 0$$

$$x^2 + y^2 = 25$$

$$x^2 + y^2 + 18y + 77 = 0$$

$$x^2 + (y+9)^2 = 4$$

Заметим, что это окружности с радиусами
5 и 2, и с центрами $(0,0)$ $(0,-9)$ соответ-
ственно.



Заметим, что первое выражение задает прямую
 $5x + 6ay - 6 = 0 \Rightarrow 6ay = 6 - 5x \Rightarrow y = \frac{6}{6a} - \frac{5x}{6a}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

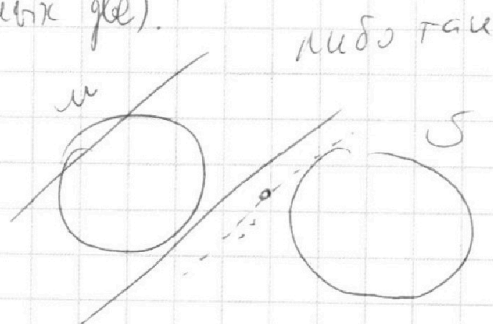
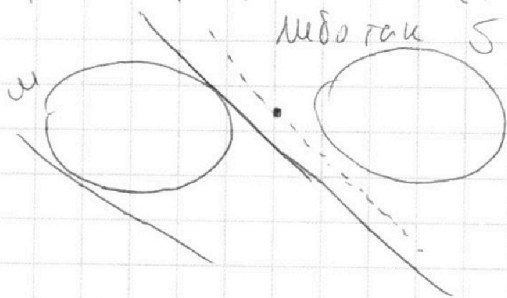
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Заметим, что прямая пересекает окружность максимум
в 2 точках, а так как должно быть и такое
пересечение, то каждую окружность наша прямая
~~прямая~~ пересекает в 2 точках. Заметим, что выбирая
наклон α , мы находим наклон прямой, а выбирая
 β , можем поднимать или опускать эту прямую до нужного
места. Давайте проверим 2 ~~внутренние~~ общие внутренние
касательные. Заметим, что если мы сдвинем нашу
прямую так, чтобы она проходила через точку A ,
и ее концы попадали в касательные a и b ,
то эта прямая ни при каком параллельном переносе
не будет пересекать обе окружности в двух точках.
Действительно, поворачивая нашу прямую так, чтобы
она касалась u . (таких прямых две).



Заметим, что окружность S будет находиться
там, где показано на рисунке.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

4. так как кривойной линией показана прямая
проходящая через A и параллельная этой касательной
мы понимаем, что на касательная касается ош. U
макс в одной точке. А значит опущая или
поднятая кривую, мы достигнем значения макс.

Б. то есть такой наклон не подойдет.

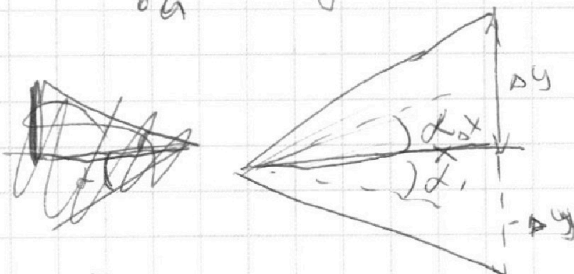
Теперь заметим, что сами концы будут лежать
внутри области C и D , то эта окружность
пересечет ош. в 2 точках/ну или подойдет

прямая, проходящая через A , т.е. она не совпадает

с ош. касательной (общ. касательная не подг. то

получ, что доказано выше), она пересекает обе
ош. только в двух точках.

при $y' = \frac{-5}{6a} = \tan \alpha$ ~~не подходит~~



$-\frac{\Delta y}{\Delta x} \leq \frac{-5}{6a} \leq \frac{\Delta y}{\Delta x}$ (вот все, что подходит)

(строгий знак, т.е. сами кас. не подг.)

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Найдем координаты A .

$\triangle ACO_1 \sim \triangle ABO_2$, значит. $(AO_1 + AO_2 = 9)$.

$$\frac{O_1C}{O_2B} = \frac{AO_1}{AO_2}$$

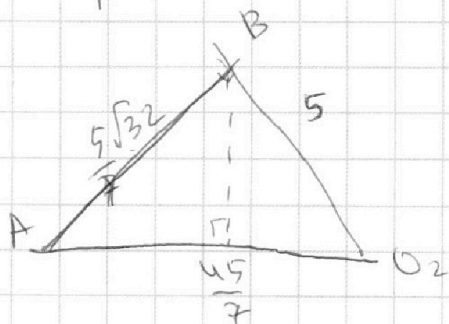
$$\frac{2}{5} = \frac{AO_1}{AO_2}$$

$$\frac{2}{5} AO_2 = \frac{4}{5} AO_1$$

$$9 = AO_2 + AO_1 = AO_2 + \frac{2}{5} AO_2 = \frac{7}{5} AO_2$$

$$\frac{45}{7} = AO_2$$

значит $A = \left(0, -\frac{45}{7}\right)$



$$AB = \sqrt{\left(\frac{45}{7}\right)^2 - 5^2} = 5 \sqrt{\frac{81}{49} - 1} = 5 \sqrt{\frac{32}{49}}$$

$$5 \sqrt{\frac{32}{49}} \cdot 5 = \frac{45}{7} \cdot h$$

$$h = \frac{5 \cdot 5 \cdot \sqrt{\frac{32}{49}}}{\frac{45}{7}} = \frac{25\sqrt{32}}{45} = \frac{5\sqrt{32}}{9}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

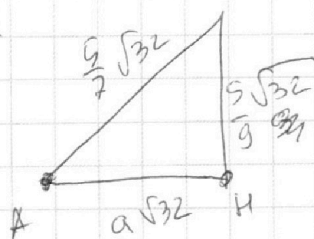
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



4)



$$a = \sqrt{\left(\frac{5}{7}\right)^2 - \left(\frac{5}{9}\right)^2} =$$

$$a = \sqrt{\frac{25}{49} - \frac{25}{81}} = 5 \sqrt{\frac{81 - 49}{81 \cdot 49}} =$$

$$\frac{5}{63} \sqrt{32}$$

$$AH = \sqrt{32} \cdot \frac{5}{63} \cdot \sqrt{32} = \frac{32 \cdot 5}{63}$$

тогда:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{5\sqrt{32}}{9}}{\frac{32 \cdot 5}{63}} = \frac{7}{63 \cdot \frac{5}{63} \cdot \sqrt{32}} = \frac{7}{\sqrt{32}}$$

$$-\frac{7}{\sqrt{32}} < -\frac{5}{6a} < \frac{7}{\sqrt{32}}$$

или

или

$$-\frac{32}{\sqrt{7}} > \frac{6a}{-5} > \frac{1}{\frac{7}{\sqrt{32}}}$$

$$-\frac{32}{\sqrt{7}} < \frac{6a}{5} < \frac{\sqrt{32}}{7}$$

$$-\frac{5\sqrt{32}}{6 \cdot 7} < a < \frac{5 \cdot \sqrt{32}}{6 \cdot 7}$$

$$-\frac{5\sqrt{8}}{21} < a < \frac{5\sqrt{8}}{21}$$

Ответ: $a = \left(-\frac{5\sqrt{8}}{21}, \frac{5\sqrt{8}}{21}\right)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$x \neq 1, x > 1 \quad \log_{11} x \neq 0 \quad 11^5 \quad 0,5y \neq 1 \quad 0,5y > 0 \quad \log_{11} 0,5y \neq 0.$$

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_{11} x = \log_{11} (11^{-2}) - 5 \quad \log_{11}^4 (0,5y) + \log_{11} 11 = \log_{11} (0,5y)^{-13} - 5$$

$$\log_{11}^4 x - \frac{6}{\log_{11} x} = -\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\log_{11} x} - 5 \quad \log_{11}^4 (0,5y) + \frac{1}{\log_{11} (0,5y)} = -\frac{13}{3} \frac{1}{\log_{11} (0,5y)} - 5$$

умножим на $3 \log_{11} x$
($\log_{11} x \neq 0$, можем)

$$3 \log_{11}^5 x - 18 = -2 - 15 \log_{11} x$$

$$3 \log_{11}^5 x + 15 \log_{11} x = 16$$

умножим на $3 \log_{11} (0,5y)$
($\log_{11} (0,5y) \neq 0$, можем)

$$3 \log_{11}^5 (0,5y) + 3 = -13 - 15 \log_{11} (0,5y)$$

$$3 \log_{11}^5 (0,5y) + 15 \log_{11} (0,5y) = -16$$

Заметим что если $\log_{11} x$ растёт то функция слева растёт, если уменьшается, то уменьшается. Значит

оба выражения имеют ^{максимум} на одном корню.

оба выражения имеют ^{максимум} на одном корню. Заметим что $a \neq 0$.

(~~то~~ $3a^5 + 15a = 3(a+k)^5 + 15(a+k)$ если $k \neq 0$. В противном случае)

значит наименьшее значение достигается равно в одной точке

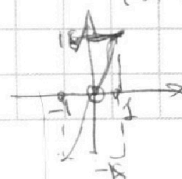
если же функция убывает если $a = 0$, но если

$a = 0$ то $3 \cdot a^5 + 15a = 0 \neq 16$, значит это не имеет решения!
и $3a^5 + 15a = 0 \neq 16$, значит a

$$\text{если } a=1 \quad 3a^5 + 15a = 3 + 15 > 18$$

$$\text{и } a=-1 \quad 3a^5 + 15a = -18 < -16$$

тогда функция такая:



значит значение 16 и -16 достигаются!

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



но заменим, что если

$$3a^5 + 15a = 16, \quad \text{то} \quad 3(-a)^5 + 15(-a) = -16.$$

значит

$$\begin{aligned} \log_{11} x &= a & \text{и} & \log_4(0,5y) = -a \\ \left\{ \begin{aligned} \log_{11} x &= \log_{11} 11^a \\ x &= 11^a \end{aligned} \right. & & \left\{ \begin{aligned} \log_4(0,5y) &= \log_{11} 11^{-a} \\ 0,5y &= 11^{-a} \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

тогда $(0,5y) \cdot x = 11^a \cdot 11^{-a} = 1$

$$xy = 2(xy \cdot 0,5) = 1 \cdot 2 = 2$$

Значит $xy=2$ для и это ср. значение.

Ответ: $xy=2$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

8/88

$$\sqrt{(25-x^2)} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(25-x^2)}$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2}$$

$$81 - 49 = 32$$

$$\begin{array}{l} a > b > c \\ b > c \\ c > a \end{array}$$

$$\frac{1}{2} \cdot (25-x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x)$$

$$\frac{1}{2} \cdot (25-x^2) \cdot -2x = -x(25-x)^{\frac{1}{2}}$$

$$\begin{array}{l} a > b > c \\ -a < -b < -c \end{array}$$

$$x^2 + (y+g)^2 = 4$$

$$g - \frac{18}{7} = \frac{63}{7} - \frac{18}{7} =$$

$$2 \rightarrow e$$

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{2}{5}$$

$$5v_1 = 2v_2$$

$$x_1 + x_2 = 9$$

$$2x_1 + 2x_2 = 18$$

$$2x_1 = 18$$

$$x_1 = \frac{18}{2}$$

$$\frac{45}{7}$$

$$\left(\frac{45}{7}, 0 \right)$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

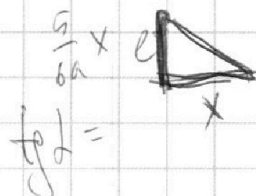
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

1) $x^2 + y^2 = 25$

2) $x^2 + (y+9)^2 = 4$



$$\frac{5}{6a}$$

$$\frac{0}{x} \leq 5$$

$$x^2 + y^2 = 25$$

$$y^2 = 25 - x^2$$

$$y = \sqrt{25 - x^2}$$

пока возмущу
 $y > 0$

$$(25 - x^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot (25 - x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x$$

$$y = \frac{5x - 6}{-6a} = \frac{6 - 5x}{6a}$$

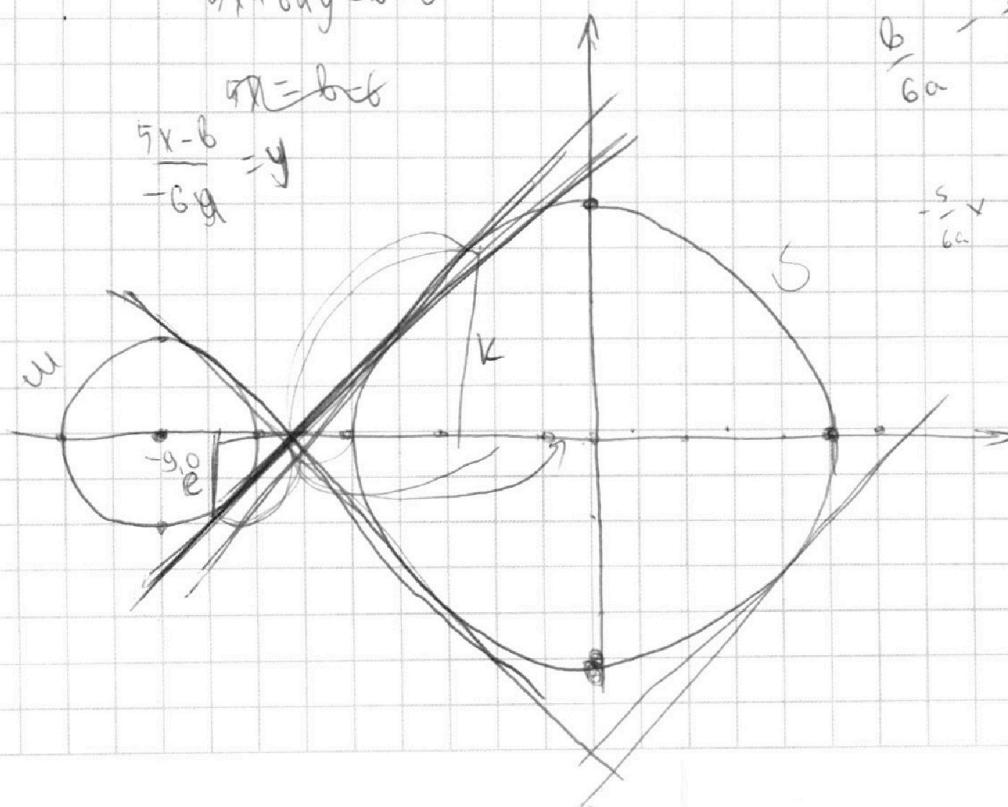
$$5x + 6ay - 6 = 0$$

$$5x - 6 = -y$$

$$\frac{5x - 6}{-6a} = y$$

$$\frac{6}{6a} - \frac{5}{6a} \cdot x$$

$$-\frac{5}{6a} \cdot x$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



2
3
4
5
6
7

$$\log_{11}^4 x + 6 \log_x 11 = \log_x^3 11^{-2} = 5$$

$$\log_{11}^4 x - \frac{6}{\log_{11} x} = -\frac{2}{3} \cdot \frac{6}{\log_{11} x} = -5$$

$$\log_{11} x = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$3 \log_{11}^5 x - 18 = -2 - 15 \log_{11} x$$

$$x^3 a =$$

$$3 \log_{11}^5 x + 15 \log_{11} x - 16 = 0$$

$$11^a = x \Rightarrow \sqrt[11]{11} = x$$

0,5

$$\log_{11} x = \log_x 11 = 1$$

$$\log_x^3 11^{-2}$$

$$\log_{2^3} 8 = \frac{1}{3} \log_2 8 = \frac{3}{3} = 1$$

$$(a^x)^y = b$$

с)

$$a^{3x} = b$$

$$\log_{11}^4 (0,5y) + \log_{(0,5y)} 11 = \log_{(0,5y)}^3 11^{-13} = 5$$

$$\begin{aligned} 0,5y &\neq 1 \\ 0,5y &> 0 \\ y &> 0 \end{aligned}$$

$$3 \log_{11}^5 (0,5y) + 3 = -13 - 15 \log_{11} x = 0$$

$$3 \log_{11}^5 (0,5y) + 15 \log_{11} (0,5y) - 16 = 0$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

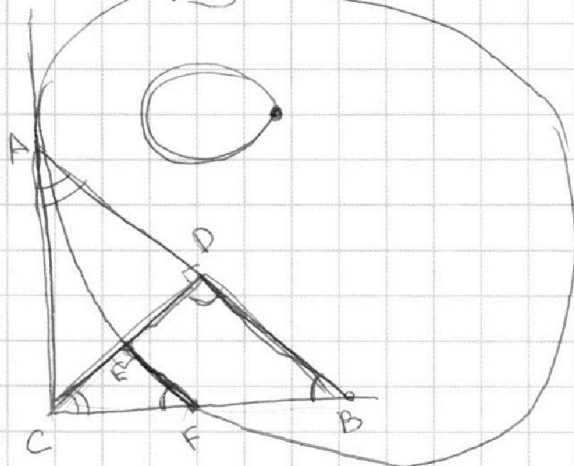
МФТИ



$$-\frac{\pi}{2} + 5\pi n$$

$$-\frac{\pi}{2}$$

$$2\pi = x$$



$AB \parallel EF$

$$\frac{AB}{BD} = 1.4$$

$\frac{ACD}{CEF}$

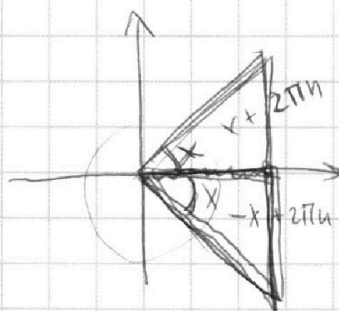
$\odot \neq 5\pi$

$$x + 2\pi n$$

$$-x + 2\pi n$$

$$10 \arccos$$

$$\arccos \cos x$$



$$10 \arccos(\cos x) = 9\pi - 2x$$

z

$$10 \arccos \left(\cos \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \right) = 9\pi - 2x$$

$$0 \leq \frac{\pi}{2} - x + 2\pi n \leq \pi$$

$$10 \left(\frac{\pi}{2} - x + 2\pi n \right) = 9\pi - 2x$$

$$5\pi - 10x + 20\pi n = 9\pi - 2x$$

$$-4\pi + 20\pi n = 8x$$

$$-\frac{\pi}{2} + \frac{20\pi n}{8} = x$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

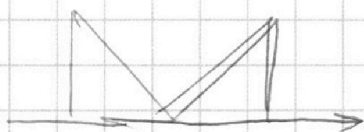
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

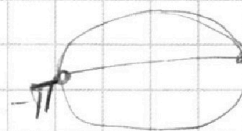
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sin x =$$

arccos



$$\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$$

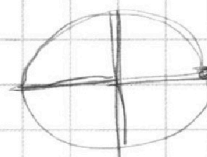


$$\arccos(-1)$$

$$x = -\frac{\pi}{2}$$

$$x = -\frac{\pi}{2}$$

$$10 \arccos\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) = 9\pi - 2x$$



$$10 \arccos\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) = 9\pi + \pi = 10\pi$$

$$10\pi = 10\pi$$

$$-\frac{\pi}{2} + \frac{9\pi}{2} = \frac{4\pi}{2} = 2\pi$$

$$\sin 2\pi = 0$$

$$\arccos 0 \quad 10 \frac{\pi}{2} = 9\pi \neq 4\pi$$

$$5\pi$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

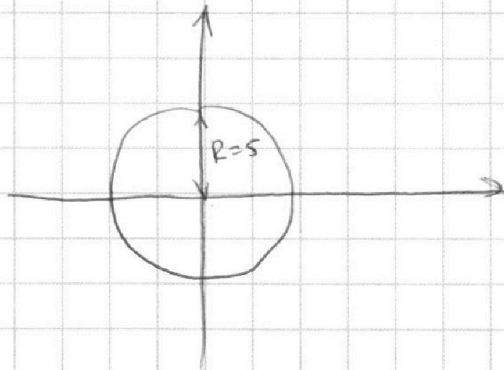
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

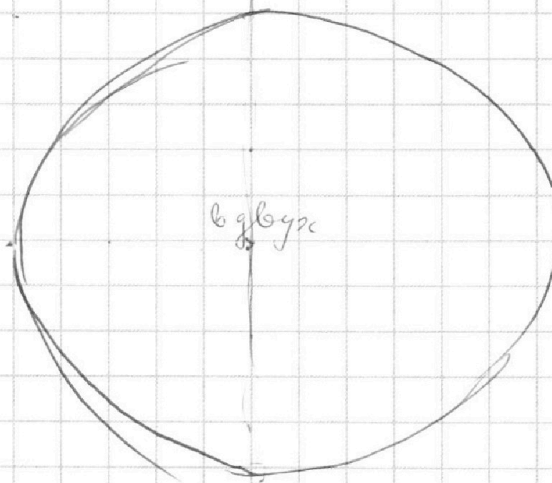
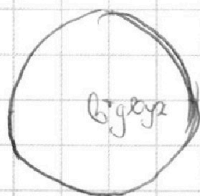
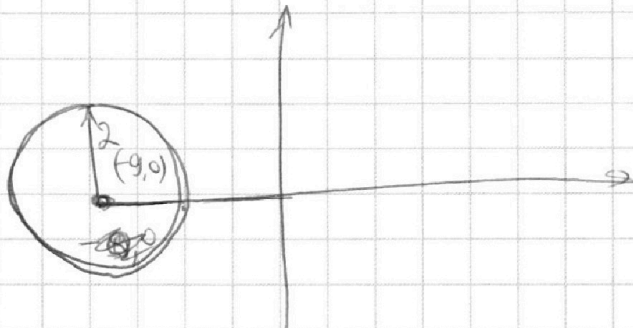
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 + y^2 = 25$$



$$x^2 + (y+9)^2 = 4$$



$$5x + 6ay - b = 0$$

$$\text{Реш } 5x - b = -6ay$$

$$y = \frac{5x - b}{6a} = \left(\frac{5}{6a}\right)x - \frac{b}{6a}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\deg(a+b) \geq 6$$

2, 4

$$-1 \leq \sin x \leq 1$$

$$\deg(b+c) \geq 14$$

arccos - функция

$$\deg(a+c) \geq 16$$

$$-\pi \leq \arccos x \leq \pi$$

$$(a+b+c) \geq 18$$

$$\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$$

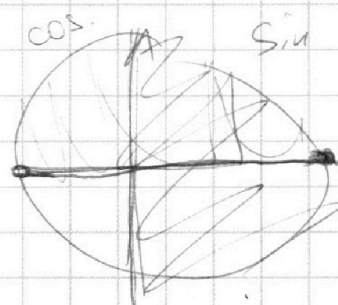
$$10 \arccos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 9\pi - 2x$$

$$10\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 9\pi - 2x$$

$$5\pi - 10x = 9\pi - 2x$$

$$-4\pi = 8x$$

$$x = -\frac{\pi}{2}$$



10π

$$\sin x = \frac{\pi}{2}$$

$$x \neq 1 \quad x > 0$$

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_{x^3} \frac{1}{121} - 5$$

$$\log_{11} x + \log_x 11 = 1$$

$$\left(\frac{1}{\log_x 11}\right)^4 - 6 \log_x 11 = \log_{x^3} 11^{-2} - 5$$

$$\log_x 11 = a$$

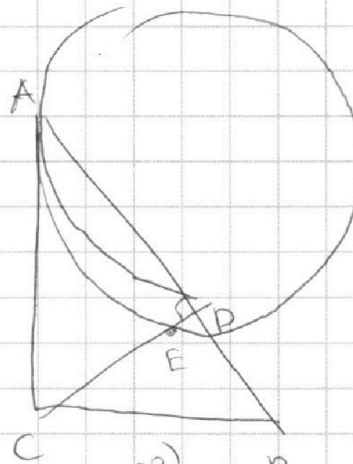
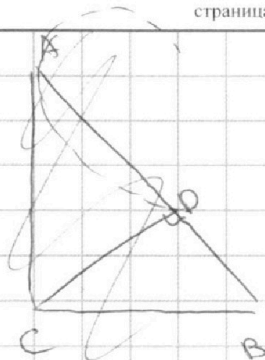
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

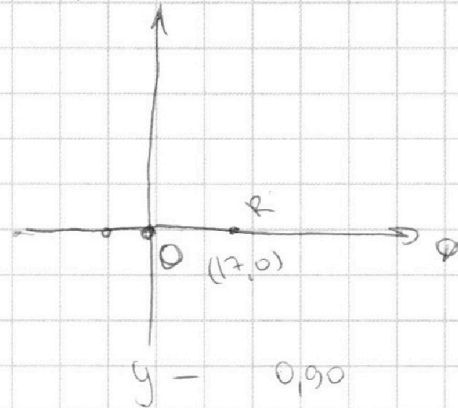
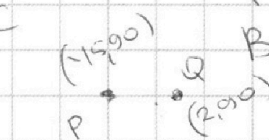
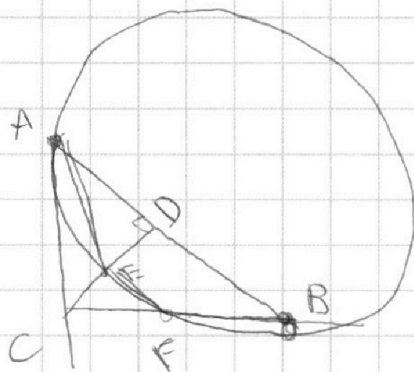
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

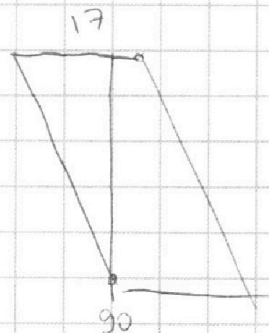
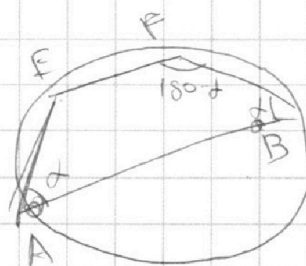


$a = c = 18$

$a = c = 18 \Rightarrow 13$



$$x = 2 - 17$$



$$h = 90$$

$$\Delta y = \max 17$$

$$-100 \leq y \leq 90$$

$$-90 \leq y \leq 90$$

$$\Delta x \leq$$

$$\begin{aligned} a^5 - 6 &= 2 - 5a \\ 3a^5 - 18 &= 2 - 5a \\ 3a^5 - 18 - 2 &= -5a \\ 3a^5 - 20 &= -5a \\ 3a^5 - 5a - 20 &= 0 \end{aligned}$$

$$3a^5 - 5a - 20 = 0$$

$$a \neq 0$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$u = -2$$

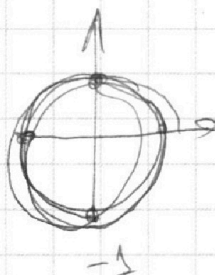
$$u = -1$$

$$u = 0$$

$$u = 1$$

$$V = \frac{14\pi}{12} - \frac{20\pi u}{12}$$

$$u = -2 \quad x = \frac{14\pi}{12} + \frac{40\pi}{12} = \frac{54}{12} = \frac{9}{2}\pi$$



$$10(-\pi) =$$

$$9\pi - \frac{7\pi}{6} \cdot 2 = 9\pi - \frac{7\pi}{3}$$

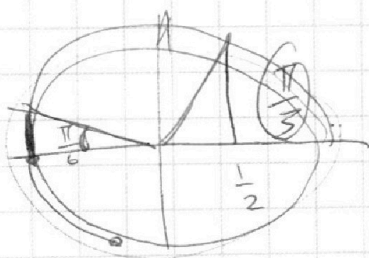
$$27\pi - 7\pi = 20\pi$$

$$x = \frac{17\pi}{6}$$

$$x = \frac{17\pi}{6}$$

$$9\pi - 2 \cdot \frac{17\pi}{6} =$$

$$\frac{27\pi - 17\pi}{3} = \frac{10\pi}{3}$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$$9\pi - 2 \cdot \frac{9\pi}{2} = 0$$

$$\arccos\left(\sin \frac{9\pi}{2}\right)$$

$$\arccos 1$$

$$9\pi - 2 \cdot 2\pi = \boxed{5\pi}$$

$$u = -2 \quad x =$$

$$\sin 2\pi$$

$$\frac{\pi}{2}$$

$$\frac{7\pi}{6} + \frac{10\pi}{3}$$

$$-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$$

$$-\frac{\pi}{2} - 2,5\pi = \boxed{-3\pi}$$

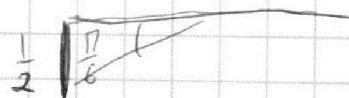
$$x = \frac{14\pi}{12} - \frac{20\pi}{12} = \boxed{\frac{14\pi}{12}}$$

$$\frac{7\pi}{6} - \frac{5\pi}{3}$$



$$\frac{2\pi}{3} \cdot 10 = \boxed{\frac{20\pi}{3}}$$

$$\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)$$



$$9u - \frac{7\pi}{6} 2 = \frac{27}{2}$$



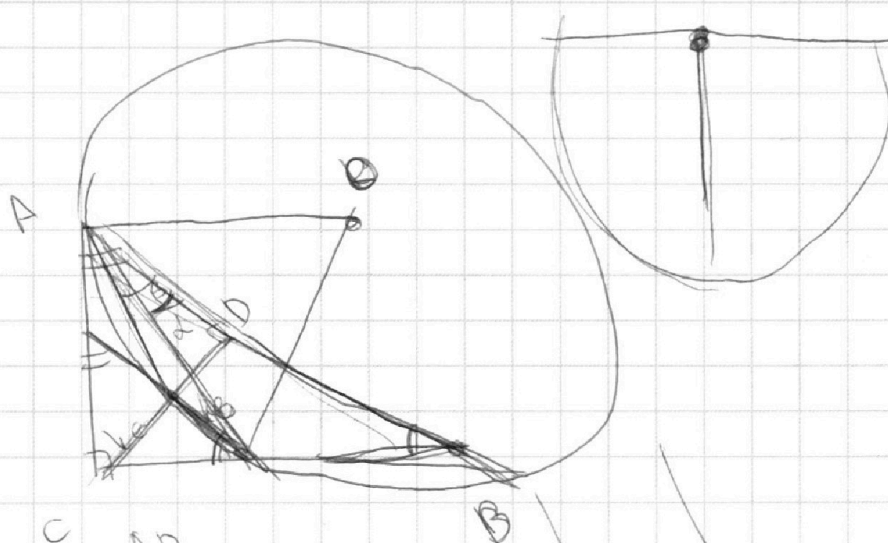
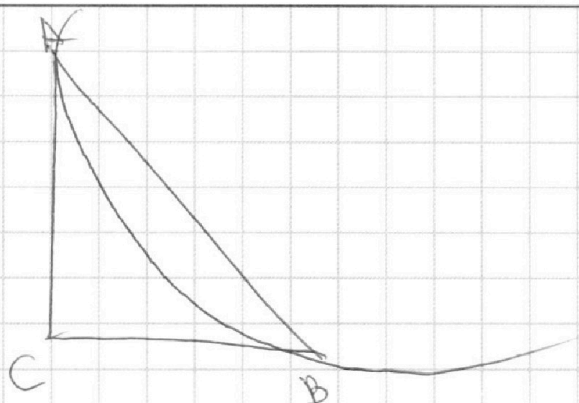
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

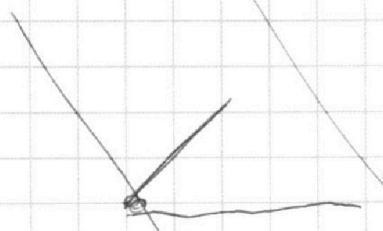
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{AD}{KE} = e$$



a, b)



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

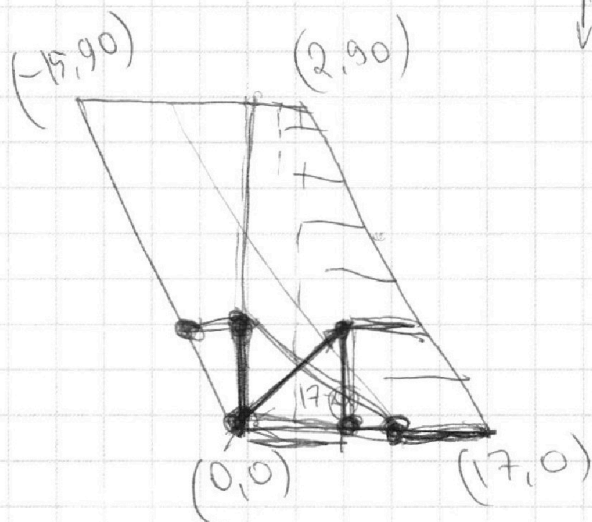


Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



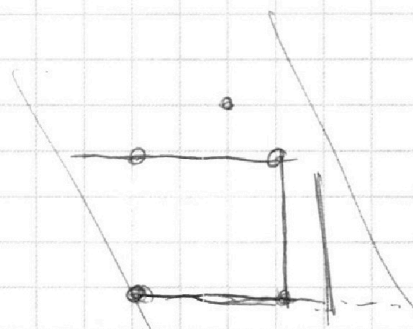
1345

2,6,7



-17

17



$$\overset{\text{max } 17}{6(x_1 - x_2)} + \overset{\text{max } 90}{(y_2 - y_1)} = 98$$

для точной суммы



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

