МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^8 3^{14} 5^{12}$, bc делится на $2^{12} 3^{20} 5^{17}$, ac делится на $2^{14} 3^{21} 5^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC. Окружность, касающаяся прямой BC в точке B, пересекает высоту CD, проведённую к гипотенузе, в точке F, а катет AC – в точке E. Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 5 : 2$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF.

3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_5^4(2x) - 3\log_{2x} 5 = \log_{8x^3} 625 - 3, \quad \text{и} \quad \log_5^4 y + 4\log_y 5 = \log_{y^3} 0{,}2 - 3.$$

Найдите все возможные значения произведения xy.

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-16;80)$, $Q(2;80)$ и $R(18;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K, лежащей на отрезке AM. Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q. Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 100, $SA = BC = 16$.

   а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1.

   б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N, $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
X						

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

1. Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ – ~~ст~~ степени вхождения двойки в числа a, b, c соответственно. $ab \vdots 2^8 \Rightarrow \alpha_1+\alpha_2 \geq 8$; $bc \vdots 2^{12} \Rightarrow \alpha_2+\alpha_3 \geq 12$; $ac \vdots 2^{14} \Rightarrow \alpha_3+\alpha_1 \geq 14$.

$$\left.\begin{array}{l}\alpha_1+\alpha_2 \geq 8\\ \alpha_2+\alpha_3 \geq 12\\ \alpha_1+\alpha_3 \geq 14\end{array}\right\} \Rightarrow \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 \geq \frac{8+12+14}{2} = 17.$$

Значит, abc точно делится на $2^{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3} = 2^{17}$.

Пусть $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ – степени вхождения тройки в числа a, b, c соответственно. Тогда $\beta_1+\beta_2 \geq 14$, $\beta_2+\beta_3 \geq 20$, $\beta_3+\beta_1 \geq 21 \Rightarrow \beta_1+\beta_2+\beta_3 \geq \frac{14+20+21}{2} = \frac{55}{2} = 27{,}5$; $a, b, c \in \mathbb{N}$, поэтому $\beta_1+\beta_2+\beta_3 \geq 28$ и abc делится на 3^{28}.

Наконец, $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ – степени вхождения пятерки в a, b, c соответственно. Тогда

$$\left\{\begin{array}{l}\gamma_1+\gamma_2 \geq 12\\ \gamma_2+\gamma_3 \geq 17\\ \gamma_3+\gamma_1 \geq 39\end{array}\right. \Rightarrow \gamma_1+\gamma_2+\gamma_3 \geq \frac{12+17+39}{2} = 34 \ \cancel{\text{и } abc \vdots 5^{34}}$$

~~$abc \vdots 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{34}$, поэтому $abc \geq 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{34}$~~

Однако, $\gamma_3+\gamma_1 \geq 39$, поэтому $\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3 \geq 39$ и $abc \vdots 5^{39}$.

$abc \vdots 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{39}$, поэтому $abc \geq 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{39}$

Пример: $a = 2^5 \cdot 3^8 \cdot 5^{17}$, $b = 2^3 \cdot 3^6 \cdot 5^0$, $c = 2^9 \cdot 3^{14} \cdot 5^{22}$.

$ab = 2^8 \cdot 3^{14} \cdot 5^{17} \vdots 2^8 3^{14} 5^{12}$

$bc = 2^{12} 3^{20} 5^{22} \vdots 2^{12} 3^{20} 5^{17}$, $abc = 2^{17} 3^{28} 5^{39}$

$ac = 2^{14} 3^{22} 5^{39} \vdots 2^{14} 3^{21} 5^{39}$

Ответ: $2^{17} 3^{28} 5^{39}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

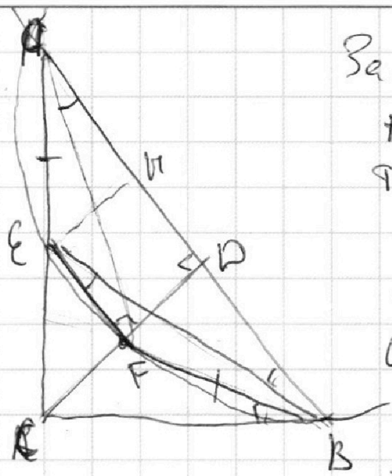
1 2 3 4 5 6 7

☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

2.



Заметим, что AEFB - равнобедренная трапеция, если $A \in$ окружности, т.к. $\cancel{\angle CAE = \angle CBE} = \angle BAF =$
$= \angle FBC = \angle EFB = \angle EBA$.

~~Доп модобо~~

Опустим перпендикуляр EH на AB. $\triangle EAH = \triangle FBD$.

Пусть $AD = 5x$, $BD = 2x = AH$. $HD = 3x = EF$.

$\angle CAB = \alpha = \angle DCB$. $CD = \sqrt{AD \cdot DB} = \sqrt{10}x$ $\quad tg\,\alpha = \frac{BD}{CD} =$

$= \frac{2}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{5}$. $\angle EBC = \angle EAB = \alpha = \angle FBD$, поэтому

$FD = BD \cdot tg\,\alpha = \frac{2 \cdot 2x}{\sqrt{10}} = \frac{4x}{\sqrt{10}}$ $\quad CF = \sqrt{10} - \frac{4}{\sqrt{10}}x =$

$= \frac{6}{\sqrt{10}}x$. $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 7x \cdot \sqrt{10}x = \frac{7\sqrt{10}}{2}x$

$S_{EFC} = \frac{1}{2} \cdot EF \cdot FC = \frac{1}{2} \cdot 3x \cdot \frac{6}{\sqrt{10}}x = \frac{9}{\sqrt{10}}x$.

$\frac{S_{ABC}}{S_{EFC}} = \frac{7\sqrt{10}}{2} \cdot \frac{\sqrt{10}}{9} = \frac{710}{18} = \frac{35}{9}$.

Теперь поймем, что A обязательно лежит на окружности:

Увеличивая радиус окружности, $\angle CFE$ растет, а уменьшая - уменьшается, поэтому для треугольника ABC существует только одна окружность удовлетворяющая условию а окружность, проходящая через A удовлетворяет условию поэтому других ответов нет

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

3. Заметим, что при $x \in [0; \pi]$,
$\arcsin(\cos x) = \underbrace{\frac{\pi}{2} - x}$. Действительно, если взять синус от обеих частей получится
$\cos x = \sin(\frac{\pi}{2} - x) = \sin\frac{\pi}{2}\cos x - \cos\frac{\pi}{2}\sin x = \cos x$.
При $x \in [\pi; 2\pi]$ $\arcsin(\cos x) =$
$= \arcsin(-\cos(x-\pi)) = \arcsin(\cos(2\pi - x))$
$2\pi - x \in [0; \pi]$, поэтому $\arcsin(\cos(2\pi - x)) =$
$= \frac{\pi}{2} - 2\pi + x = \underbrace{x - \frac{3\pi}{2}}$; $\arcsin(\cos x) =$ ~~arcsin~~
$= \arcsin(\cos(x + 2\pi))$, поэтому ~~график~~
график $10\arcsin(\cos x)$ повторяется с периодом
2π. Макс. значение $\arcsin(\cos x) = \frac{\pi}{2}$, а
минимальное $- -\frac{\pi}{2}$. Значит, макс. и мин.
значение ф-ии $10\arcsin(\cos x)$ — это $\pm 5\pi$.
Найдем x, при котором ~~2~~ $-5\pi \le \pi - 2x \le 5\pi$
$-6\pi \le -2x \le 4\pi$ ~~4~~ $3\pi \ge x \ge -2\pi$
Рассмотрим все участки $[-2\pi; -\pi]$; $[-\pi; 0]$;
$[0; \pi]$; $[\pi; 2\pi]$; $[2\pi; 3\pi]$
1) $x \in [-2\pi; -\pi]$ $10\arcsin(\cos x) = 10 \cdot (\frac{\pi}{2} - (x + 2\pi)) =$

~~$-\frac{3\pi}{2} - x = \pi - 2x$~~ ~~$= \pi - 2x$~~ ~~$x = \frac{5\pi}{2}$, подходит~~

3 (прод.) $10\left(\frac{\pi}{2}-(x+2\pi)\right)=5\pi-10x-20\pi=$

$=\pi-2x \qquad 8x=-16\pi \qquad x=-2\pi$. подходит.

2) $x\in[-\pi;0]$

$10\arcsin(\cos x)=10\left(x+2\pi-\frac{3\pi}{2}\right)=$

$=10x+5\pi=\pi-2x \qquad 12x=-4\pi \qquad x=-\frac{\pi}{3}$.
подходит.

3) $x\in[0;\pi]$

$10\arcsin(\cos x)=10\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=5\pi-10x=\pi-2x=$

$8x=4\pi \qquad x=\frac{\pi}{2}$. подходит.

4) $x\in[\pi;2\pi]$

$10\arcsin(\cos x)=10x-15\pi=\pi-2x$

$12x=16\pi \qquad x=\frac{16}{12}\pi=\frac{4}{3}\pi$ - подходит.

5) $x\in[2\pi;3\pi]$

$10(\arcsin(\cos x)=\left(\frac{\pi}{2}-(x-2\pi)\right)\cdot 10=5\pi-10x+20\pi=$

$=\pi-2x \qquad 8x=24\pi \qquad x=3\pi$, подходит.

Получаем корни: $-2\pi;\ -\frac{\pi}{3};\ \frac{\pi}{2};\ \frac{4}{3}\pi;\ 3\pi$.

Ответ: $-2\pi;\ -\frac{\pi}{3};\ \frac{\pi}{2};\ \frac{4}{3}\pi;\ 3\pi$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

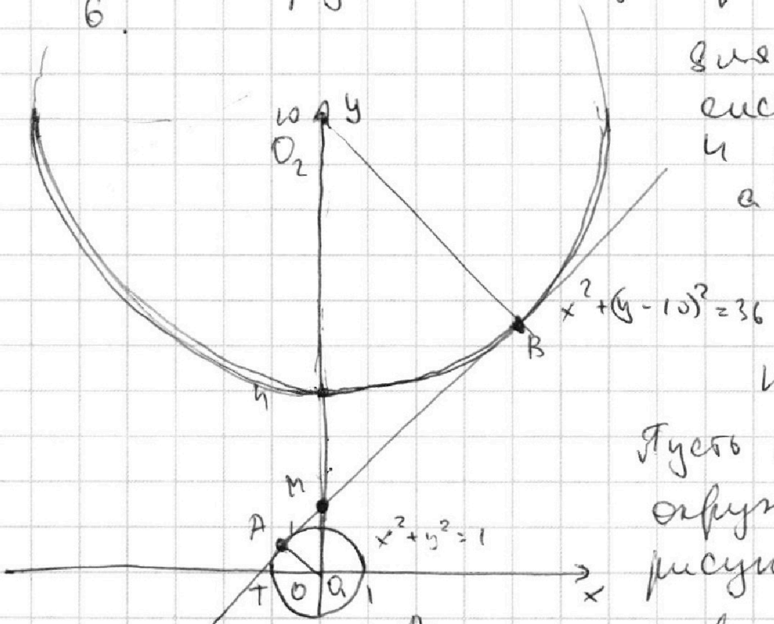
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

4. Второе уравнение равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l} x^2+y^2=1 \\ x^2+\underbrace{y^2-20y+100}_{(y-10)^2}=36 \end{array}\right.$$

Получается, решения совокупности будут лежать на окружности с центром $(0;0)$ и радиусом 1 и окружности с центром $(0,10)$ и радиусом 6.



Для того, чтобы исходная система имела 4 решения прямая $ax-3y+4b=0$ должна пересекать каждую окружность в 2 различных точках.

Пусть AB – общая касательная окружностей, как на рисунке. A, B – точки касания, M – точка пересечения AB и оси ординат, O_1 – центр единичной окружности, O_2 – центр второй окружности. Тогда $\triangle O_2BM \sim \triangle O_1AM$ с коэф. $\frac{R_1}{R_2}=6$, т.к. $\angle O_2BM=\angle O_1AM$, $\angle AMO_1=\angle O_2MB$. Тогда $O_1M=\frac{O_1O_2}{7}=\frac{10}{7}$. $M(0;\frac{10}{7})$.

Пусть T – точка пересечения AM и оси ординат.

Тогда $OT=\frac{1}{\cos\angle AO_1T}=\frac{1}{\cos\angle AMO_1}$

$\sin\angle AMO_1=\frac{1}{\frac{10}{7}}=\frac{7}{10}$, $\cos\angle AMO_1=\sqrt{1-\frac{49}{100}}=\frac{\sqrt{51}}{10}$

$OT=\frac{10}{\sqrt{51}}$ $T(-\frac{10}{\sqrt{51}};0)$. Теперь можем вычислить угловой коэффициент AB: ~~…~~ $\frac{10}{7}=\frac{10}{7}:\frac{10}{\sqrt{51}}=$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

4 (прод.) $= \frac{\sqrt{51}}{7}$. А угловой коэффициент второй общей касательной равен $-\frac{\sqrt{51}}{7}$ из симметрии. Тогда для любой прямой вида $y = kx + l$, где $k \in \left(-\infty; -\frac{\sqrt{51}}{7}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{51}}{7}; +\infty\right)$ можно подобрать значение l так что прямая пересекает окружности в 4 различных точках, а для остальных значений k нельзя.
Наша прямая: $y = \frac{ax + 4b}{3}$.

$\frac{a}{3} \in \left(-\infty; -\frac{\sqrt{51}}{7}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{51}}{7}; +\infty\right)$; $\frac{4b}{3}$ принимает все действ. значения, поэтому

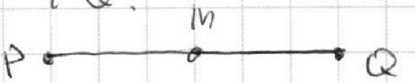
$a \in \left(-\infty; -\frac{3\sqrt{51}}{7}\right) \cup \left(\frac{3\sqrt{51}}{7}; +\infty\right)$

Ответ: $\left(-\infty; -\frac{3\sqrt{51}}{7}\right) \cup \left(\frac{3\sqrt{51}}{7}; +\infty\right)$

МФТИ

6. Зафиксируем точку (x_2, y_2). Тогда для соблюдения равенства $5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45$ точки x_1 и x_2 должны лежать на прямой $y = -5x + 5x_2 + y_2 - 45$, которая параллельна OP, т.к. OP лежит на прямой $-\frac{80}{16}x = -5x$. Точка (x_2, y_2) лежит на прямой $y = -5x + 5x_2 + y_2$, которая получена сдвигом прямой $y = -5x + 5x_2 + y_2 - 45$ на $\frac{45}{5} = 9$ ед. вправо по оси x.

На любой прямой вида $-5x + b$ содержится $1 + \text{НОД}(16, 80) = 17$ точек с целочисленными координатами если она проходит через параллелограмм и пересекает PQ и OR в точках с целочисленными координатами или 16 точек с целочисленными координатами если прямая проходит через какие-то точки с целочисленными координатами но пересекает PQ и OR в точках с нецелыми координатами. Рассмотрим PQ.



Пусть M — середина PQ. Тогда если (x_2, y_2) лежит на ~~интервале~~ ~~отрезке PM, не включая M~~ прямой вида $-5x + b$, которая не пересекает отрезок MQ, то (x_1, y_1) не сможет лежать внутри параллелограмма, т.к. нужно прямую $5x + b$ сдвинуть ~~вправо~~ влево на 9, а $PM = 9$. ~~На~~ Через отрезок MQ

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

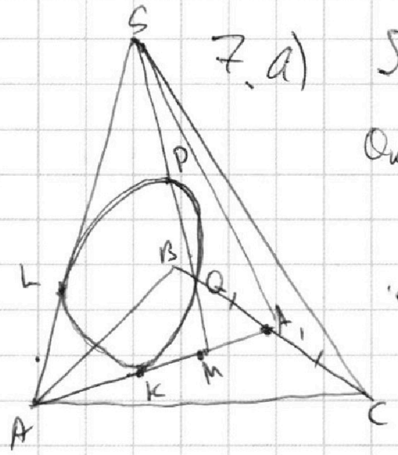
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

6 (продолж.)
можно провести 10 прямых через целочисленные точки и $9 \cdot 5 = 45$ прямых, которые пересекают MQ не в целой точке, но содержат целые точки. Для каждой из 10 прямых есть 17 способов выбрать (x_2, y_2) и для каждого из этих способов есть 17 способов выбрать (x_1, y_1). Для каждой из 45 прямых есть 16 способов выбрать (x_2, y_2) и для каждого из этих способов есть 16 способов выбрать (x_1, y_1). Тогда кол-во пар A, B равно $10 \cdot 17 \cdot 17 + 45 \cdot 16^2 = 14410$

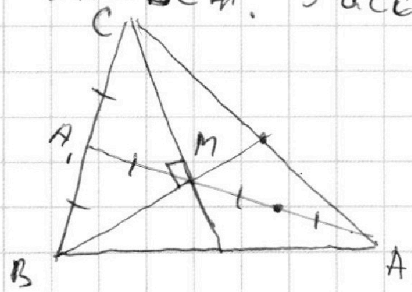
Ответ: 14410.



7. а) Рассмотрим грань SAA_1:

Окружность (LKPQ) касается SA и AA_1 в L и K,

Тогда $SL^2 = SP\cdot SQ = MP\cdot MQ = MK^2 \Rightarrow SL = MK$ $AL = AK$, т.к. AL и AK - касательные, поэтому $AM = SA = BC$. Рассмотрим $\triangle ABC$:



$A_1M = \frac{AM}{2} = \frac{BC}{2}$, поэтому $\angle CMB = 90^\circ$.

Опустим MH_M и AH_A - перпендикуляры на BC. $\frac{MA_1}{AA_1} = \frac{1}{3} = \frac{MH_M}{AH_A}$, отсюда

$$\frac{S_{BMC}}{S_{BAC}} = \frac{1}{3} \Rightarrow S_{BMC} = \frac{100}{3} = \frac{1}{2} MC\cdot BM = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}CC_1\cdot\frac{2}{3}BB_1 =$$

$$= \frac{2}{9} BB_1\cdot CC_1 \Rightarrow BB_1\cdot CC_1 = \frac{100}{3}\cdot\frac{9}{2} = 150. \quad AA_1 = \frac{3}{2}AM =$$

$$= \frac{3}{2}BC = 24 \Rightarrow AA_1\cdot BB_1\cdot CC_1 = 150\cdot 24 = 3600$$

Ответ: 3600

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$39 - 17 = 22$

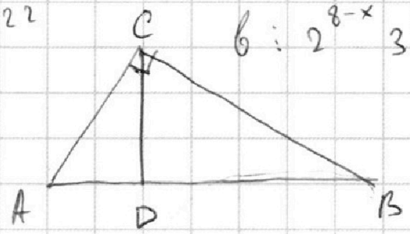
$a : 2^x 3^y 5^z$

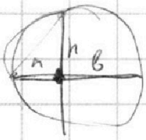
$b : 2^{8-x} 3^{14-y} 5^{12-z}$

$a = 2^5 \cdot 3^8 \cdot 5^{17}$

$b = 2^3 \cdot 3^6 \cdot 5^0$

$h^2 = ab$ $c = 2^9 \cdot 3^{14} \cdot 5^{22}$



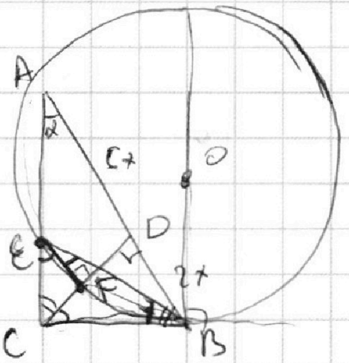


$c : 2^{14-x} 3^{21-y} 5^{39-z}$

$39 - 17 = 22$

$\frac{AD}{DB} = \frac{5}{2}$

$12 + 17$ $6+8+14 = 28$



$CO = \sqrt{10}x$

$12 + 17 = 29$ $29 + 39 = 68$ 34

$\frac{AC \cdot CB}{CF \cdot FE} - ?$

$25x^2 + 10x^2 = 35x^2$

$AC = \sqrt{35}x$

$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 27,5$

$\beta_1 = 27,5 - 20 = 7,5$

$\beta_2 = 6,5$

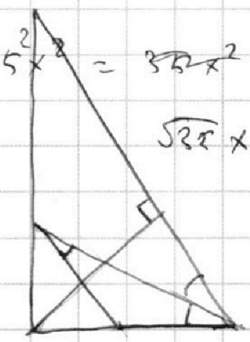
$\beta_3 = 13,5$

$tg\alpha = \frac{\sqrt{10}x}{5x} = \frac{\sqrt{10}}{5} = \frac{2}{\sqrt{10}}$

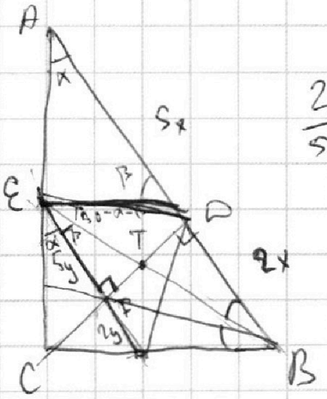
$\sin\alpha =$

$(\sqrt{10}x)^2 + 5^2x^2 = 35x^2$

$\angle CBF = \angle EFB = \angle EBA$



$\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{35}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}}$



$\frac{2x}{5y} =$

$\frac{\sqrt{10}}{2}$

$\frac{34}{2}$

$bc = 2^{\geq 22-2x} 3^{\geq 35-2y} 5^{\geq 51-2z}$

$abc \geq 2^{22-x} 3^{35-y} 5^{51-z}$

$ab : 2^8$ $a = 2^x$ $x+y \geq 8$ $x+y+z \geq 17$

$bc : 2^{12}$ $b = 2^y$ $y+z \geq 12$ $17 - 8 = 9$

$ac : 2^{14}$ $c = 2^z$ $x+z \geq 14$

$c = 2^9$ $a = 2^5$ $b = 2^3$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

a, b, c $\quad ab = x\,2^{8}3^{14}5^{12}$ $\quad a^2b^2c^2 = xyz\,2^{34}3^{55}5^{68}$

$bc = y\,2^{12}3^{20}5^{17}$ $\quad abc = \sqrt{xyz}\,2^{17}3^{\frac{55}{2}}5^{34}$

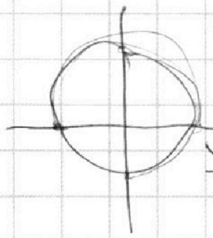
$$\begin{array}{r}12\\+17\\\hline 29\end{array}$$

$ac = z\,2^{14}3^{21}5^{39}$

$xyz \vdots 3$

$b = \sqrt{\frac{xy}{z}}\,2^{3}3^{6,5}5^{-5}$

$\frac{AE\cdot CB}{CE\cdot AB} = \frac{CT\cdot AB}{AT\cdot BC}$



$b = \sqrt{\frac{xy}{z}}\,\frac{2^3 3^6\sqrt{3}}{5^5}$

$\frac{\sqrt{14}\,AE}{7\,CE} = 7\,CT$

$10\arcsin(\cos x) = \pi - 2x$

$\arcsin(\cos\pi) = -\frac{\pi}{2}$ $\quad \pi$

$\arcsin\left(\sqrt{1-\sin^2 x}\right)$

$x\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ $\arcsin(\cos\frac{\pi}{2}) = 0$ $\quad \frac{\pi}{2}$

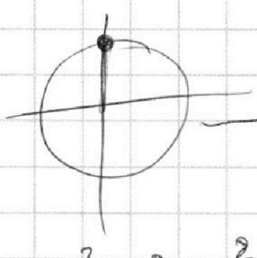
$\arcsin(\sin x) = x$

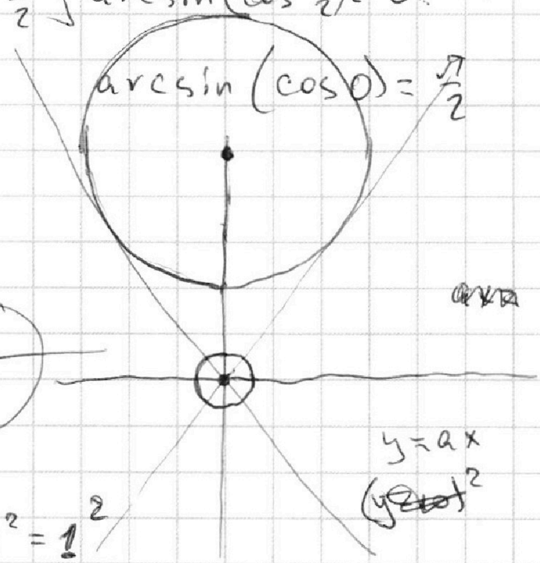
$\arcsin(\cos 0) = \frac{\pi}{2}$ $\quad 0$

$\arcsin(\cos x) = -x + \frac{\pi}{2}$

$-10x + 5\pi = \pi - 2x$

$8x = 4\pi$





$x = \frac{\pi}{2}$

$y = ax$

$ax - 3y + 4b$

$y = \frac{ax+4b}{3}$

$x^2 + y^2 = 1^2$

$x^2 + y^2 - 20y + 100 = 36$ $\quad x^2 + y^2 - 20y + 64 = 0$

$x^2 + (y-10)^2 = 6^2$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

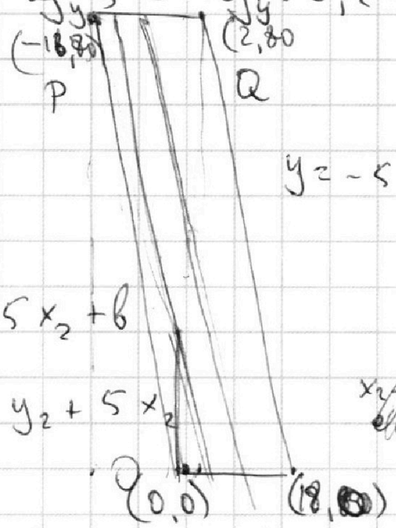
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$\log_5^4(2x) - 3\log_{2x} 5 = \log_{8x^3} 625 - 3$

$\log_5^4 y + 4\log_y 5 = \log_{y^3} 0{,}2 - 3$

$\log_3^4$



$y = -5x + y_2 + 5x_2$

$y_2 = -5x_2 + b$

$b = y_2 + 5x_2$

$x_2 \; 45, y_2$

$x_2 ; y_2$

$\log_a^2 b = \log_a b \log_a b =$

$= \log_a b^{\log_a b}$

$x_2 -$

$a^x = b^{\log_a b}$

$x = \frac{5x_2 + y_2 - 45 - y}{5}$

$x = \cancel{y_2 + 5x_2}$

$y_2 = 5x_1 + y_1 - 5x_2 + 45$

(2, 80)

$y_1 = 80$

$x_1 = -4$

$2 - x_1 = 45$

$x_1 = -43$

$y_1 = 45 - 5x_1$

$-\frac{80}{16} = 5$

$17 \times 17 = 119 + 17 = 289$

$256 \times 45 = 1280 + 1024 = 11520$

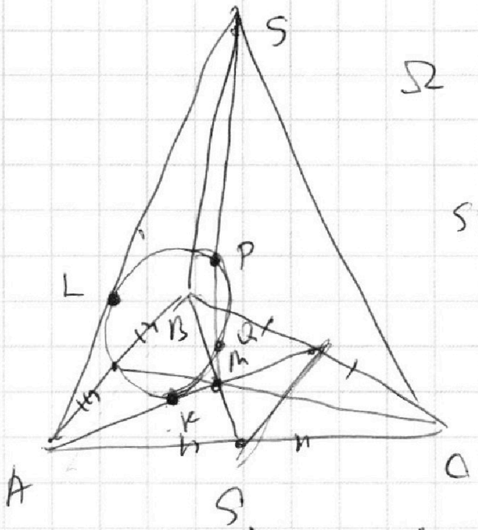
$11520 + 2890 = 14410$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

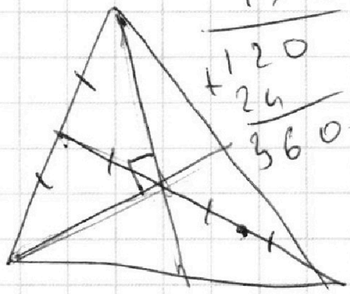
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

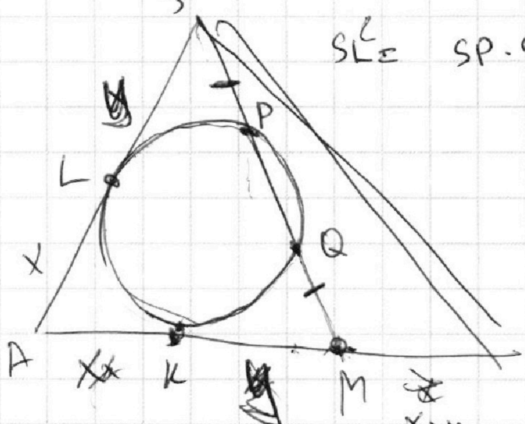


Ω

$SP = MQ$

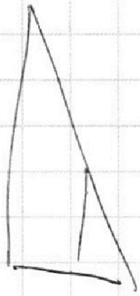


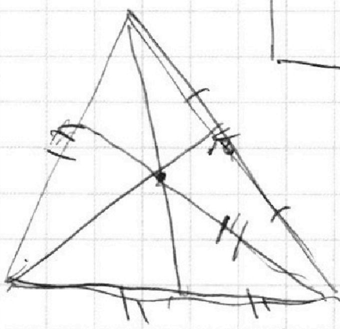
$$\begin{array}{r} \times\ 24 \\ 150 \\ \hline 120 \\ +\ 24\ \ \\ \hline 3600 \end{array}$$



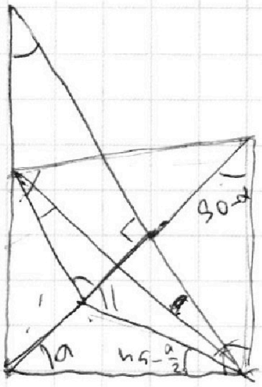
$SL^2 = SP \cdot SQ = MQ \cdot MP = x^2$

$\frac{x+y}{2}$



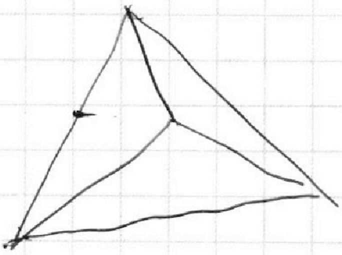


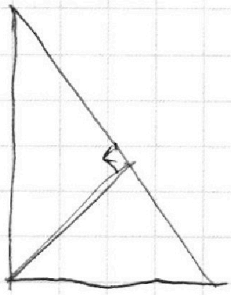
$SA = AM$



$45 + \frac{\alpha}{2}$

$45 - \frac{\alpha}{2}$ $\quad 90 - \alpha$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

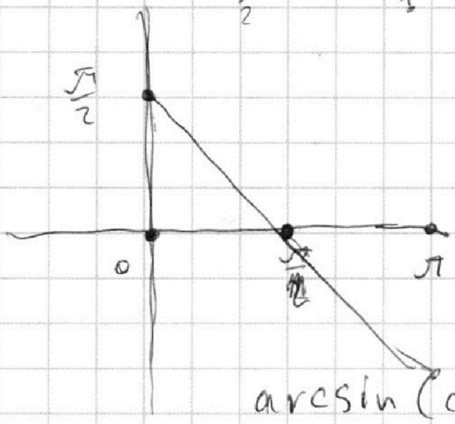
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$10 \quad \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$

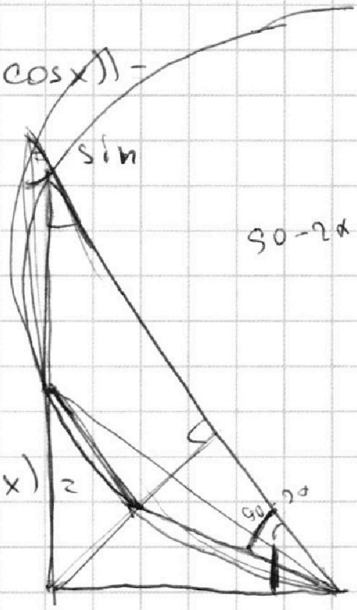
1°



$\arcsin(1 - \sin^2$

$\sin(\arcsin(\cos x)) -$

$= \cos x \quad \sin$



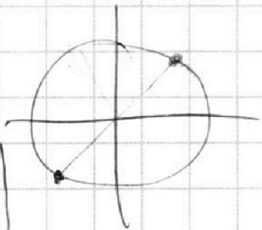
$90 - 2x$

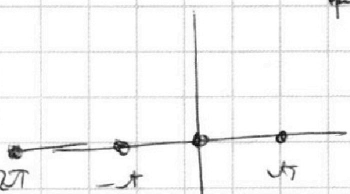
$\arcsin(\cos x) = \frac{\pi}{2} - x$

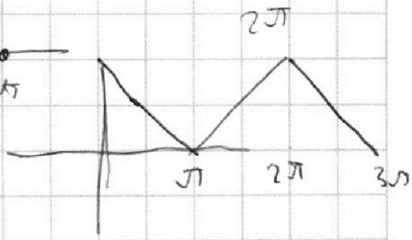
$x \in [0; \pi]$

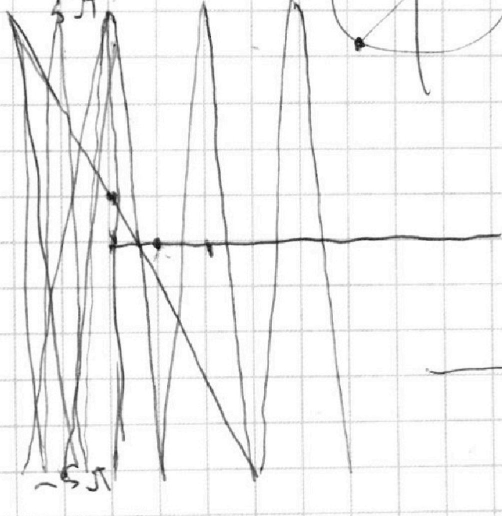
~~sin~~ $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

$\arcsin(\cos(x + \pi)) = \arcsin(-\cos x) =$









$2Б\pi - x = \pi - 2x$

$x = -26$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$\gamma_1 \le \gamma_1+\gamma_2+\gamma_3-38$

$\gamma_2+\gamma_3-38\ge 0$

$a^2bc \,\vdots\, 5^{28}$

$bc \,\vdots\, 5^{38}$

α_1 17

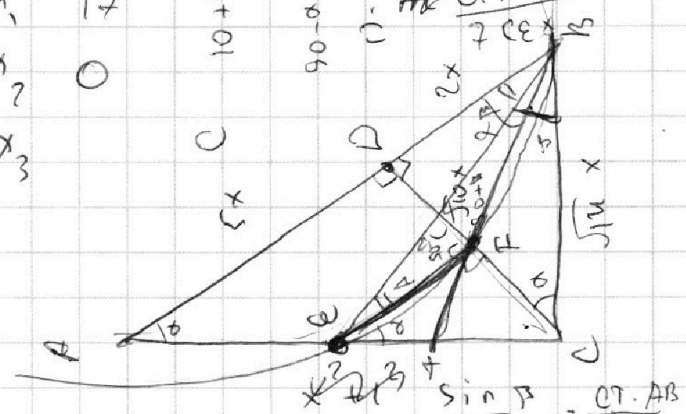
α_2 0

α_3

$BC^2=14x^2$

$AC=\sqrt{32}x$

$\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}=\frac{AE\cdot BC}{CE\cdot AB}=\frac{\sqrt{14}}{7}\frac{AE}{CE}$



$\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}=\frac{\sqrt{14}}{7}\cdot\frac{AE}{CE}$

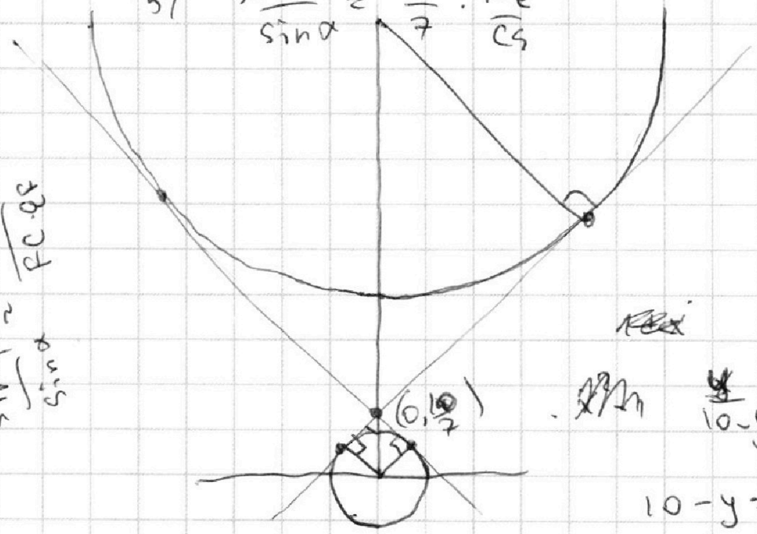
$\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}=\frac{CT\cdot AB}{TA\cdot TC}$

$x^2+y^2=1$

$x^2+y^2-1=ax+b-y$

~~$y=ax+b$~~

$\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}=\frac{BD\cdot FT}{FC\cdot BD}$



$(0;\frac{10}{7})$

$\frac{y}{10-y}=\frac{1}{6}$

$51=3\cdot 17$

$10-y=6y$

$10=7y$

$y=\frac{10}{7}$

$x=-\frac{1}{\cos\alpha}$

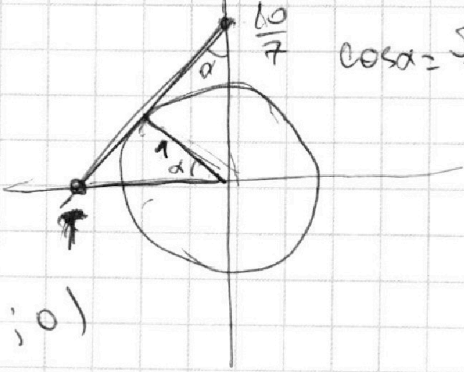
$\sin\alpha=\frac{7}{10}$

$\cos\alpha=\frac{\sqrt{51}}{10}$

$x^2+y^2-1=kx+\frac{10}{7}-y$

$y=kx+\frac{10}{7}$

$x^2-kx+y^2+y-\frac{17}{7}=0$



$T(-\frac{10}{\sqrt{51}};0)$

$a=\frac{10}{7}:\frac{10}{\sqrt{51}}=$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!