



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^6 3^{13} 5^{11}$, bc делится на $2^{14} 3^{21} 5^{13}$, ac делится на $2^{16} 3^{25} 5^{28}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой AC в точке A , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке E , а катет BC – в точке F . Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1,4$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF .
3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$.
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_{x^3} \frac{1}{121} - 5, \quad \text{и} \quad \log_{11}^4(0,5y) + \log_{0,5y} 11 = \log_{0,125y^3} (11^{-13}) - 5.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-15;90)$, $Q(2;90)$ и $R(17;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 180, $SA = BC = 20$.
 - а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .
 - б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 6$, а радиус сферы Ω равен 8.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Решение: $a, b, c \in \mathbb{N}$

Пусть a_2 - степень вхождения 2 в число $a, a_i \in \mathbb{N}_0$

a_3 - степень вхождения 3 в число $a, a_i \in \mathbb{N}_0$

a_5 - степень вхождения 5 в число $a, a_i \in \mathbb{N}_0$

($\in \mathbb{N}$ - принадлежит натуральным, $\in \mathbb{N}_0$ - принадлежит натуральным и 0)

$b_2, b_3, b_5, c_2, c_3, c_5$ - определим аналогично

$$ab: 2^6 3^{13} 5^{11} \Rightarrow ab: 2^6 \Rightarrow a_2 + b_2 \geq 6$$

$$ab: 3^{13} \Rightarrow a_3 + b_3 \geq 13$$

$$ab: 5^{11} \Rightarrow a_5 + b_5 \geq 11$$

Аналогично $b_2 + c_2 \geq 14$

$$a_2 + c_2 \geq 16$$

$$b_3 + c_3 \geq 21$$

$$a_3 + c_3 \geq 25$$

$$b_5 + c_5 \geq 13$$

$$a_5 + c_5 \geq 28$$

Тогда $2(a_2 + b_2 + c_2) \geq 6 + 14 + 16 = 36$

$$a_2 + b_2 + c_2 \geq 18$$

Аналогично: $a_3 + b_3 + c_3 \geq 24,5$ $29,5$

$$a_3, b_3, c_3 \in \mathbb{N} \Rightarrow a_3 + b_3 + c_3 \geq 25$$
 30

$$a_5 + b_5 + c_5 \geq 26$$

Тогда $\min(abc) = 2^{18} 3^{25} 5^{26}$

$$\text{НО } \left. \begin{array}{l} a_5 + c_5 \geq 28 \\ b_5 \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow a_5 + c_5 + b_5 \geq 28 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \min(abc) = 2^{18} 3^{25} 5^{28}$$

Нам удовлетворяет число $a = 2^4 3^9 5^{12}$

$$b = 2^2 3^4$$

$$c = 2^{10} 3^{17} 5^{16}$$

Докажем, что $a_2 + b_2 + c_2 = 18$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Предположим, что это не так \Rightarrow

$$a_2 + b_2 + c_2 \leq 17$$

$$a_2 \leq 17 - b_2 - c_2$$

$$b_2 + c_2 \geq 14$$

$$-b_2 - c_2 \leq -14$$

$$17 - b_2 - c_2 \leq 3 \Rightarrow a_2 \leq 3$$

$$a_2 + b_2 + c_2 \leq 12$$

$$b_2 \leq 12 - a_2 - c_2$$

$$b_2 + c_2 \geq 16$$

$$-a_2 - c_2 \leq -16$$

$$12 - a_2 - c_2 \leq 1 \Rightarrow b_2 \leq 1$$

$\Rightarrow 4 \geq a_2 + b_2 \geq 6$ Противоречие.

Аналогично $a_3 + b_3 + c_3 \geq 25$

$$a_5 + b_5 + c_5 \geq 28$$

Ответ: $abc = 2^{18} 3^{25} 5^{28}$

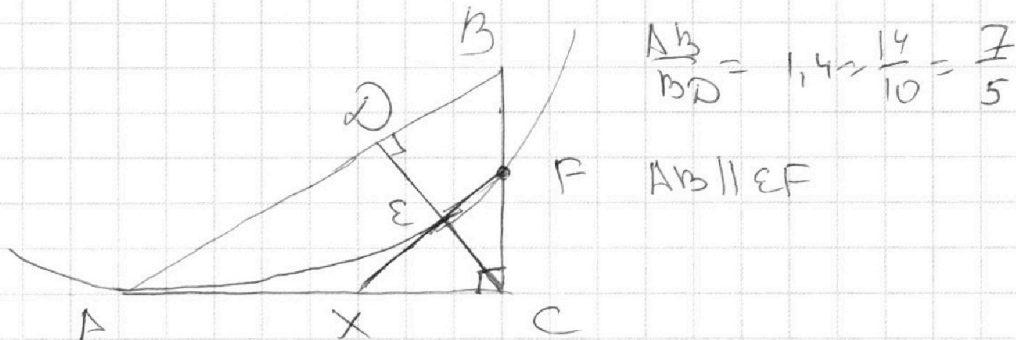
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



1) $EF \cap AC = X$ XA - кас., EF - секущая
По Δ $AX^2 = XE \cdot EF$

$XF \parallel AB \Rightarrow \Delta CEX \sim \Delta CDA$ (1)
 $\Delta CEF \sim \Delta CDB$ (2)
 $\Delta CXF \sim \Delta CAB$ (3)

$$\left. \begin{aligned} (2) : \frac{CE}{CD} = \frac{XF}{CB} = \frac{EF}{BD} \\ (3) \frac{CX}{CA} = \frac{XF}{AB} = \frac{CF}{CB} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{XF}{AB} = \frac{EF}{BD} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{XF}{EF} = \frac{AB}{BD} = \frac{2}{5} \Rightarrow EF = \frac{5}{2} XF$$

$$AX^2 = \frac{5}{2} XF^2 \Rightarrow AX = \sqrt{\frac{5}{2}} XF$$

$$2) \frac{AD}{AB} = \frac{AB - DB}{AB} = 1 - \frac{DB}{AB} = 1 - \frac{5}{7} = \frac{2}{7} \Rightarrow AD = \frac{2}{7} AB$$

$$\Delta CAB - \Delta_{90^\circ} - CD \perp AB \Rightarrow \\ \Rightarrow AC^2 = AD \cdot AB = \frac{2}{7} AB^2 \Rightarrow AC = \sqrt{\frac{2}{7}} AB$$

$$3) (3) \frac{CX}{CA} = \frac{XF}{AB}$$

$$\frac{XF}{AB} = \frac{CA - AX}{CA} = 1 - \frac{AX}{CA} \Rightarrow 1 = \frac{XF}{AB} + \frac{AX}{CA}$$

см. на след. стр.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$1 = \frac{XF}{AB} + \frac{\sqrt{\frac{5}{7}} XF}{\sqrt{2} AB} = \frac{XF}{AB} + \frac{\sqrt{10} XF}{2 AB} \Rightarrow \frac{XF}{AB} = \frac{2}{2 + \sqrt{10}}$$

4) $AB \parallel EF$, $CD \perp AB \Rightarrow CD \perp EF \Rightarrow \angle CEF = 90^\circ$

$$\frac{S_{\Delta CD}}{S_{\Delta CEF}} = \frac{AD \cdot DC}{EF \cdot CE} = \frac{AD \cdot BD}{EF^2} = \frac{\frac{5}{7} AB \cdot \frac{2}{7} AB}{\frac{25}{49} XF^2} =$$

$$= \frac{2}{5} \left(\frac{AB}{XF} \right)^2 = \frac{2}{5} \cdot 2^2 = \frac{4 + 10 + 4\sqrt{10}}{10} = \frac{14 + 4\sqrt{10}}{10} = \frac{7 + 2\sqrt{10}}{5}$$

Ответ: $\frac{S_{\Delta CD}}{S_{\Delta CEF}} = \frac{7 + 2\sqrt{10}}{5}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача 3

$$10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$$

$$\arccos(\sin x) = \frac{9\pi - 2x}{10}$$

$$0 \leq \arccos(\sin x) \leq \pi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 \leq \frac{9\pi - 2x}{10} \leq \pi$$

$$0 \leq 9\pi - 2x \leq 10\pi$$

$$-9\pi \leq -2x \leq \pi$$

$$\frac{9\pi}{2} \geq x \geq -\frac{\pi}{2}$$

$$\cos(\arccos(\sin x)) = \cos\left(\frac{9\pi - 2x}{10}\right)$$

$$\sin x - \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{9\pi - 2x}{10}\right) = 0$$

$$\sin x - \sin\left(\frac{x - 2\pi}{5}\right) = 0$$

$$\frac{x - 2\pi}{5} = t \Rightarrow x = 5t + 2\pi$$

$$\sin(5t + 2\pi) - \sin t = 0$$

$$\sin 5t - \sin t = 0$$

$$\sin(3t + 2t) - \sin(3t - 2t) = 0$$

$$\sin 3t \cos 2t + \sin 2t \cos 3t - \sin 3t \cos 2t + \sin 2t \cos 3t = 0$$

$$2 \sin 2t \cos 3t = 0$$

$$\sin 2t = 0$$

$$2t = \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$t = \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{x - 2\pi}{5} = \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{5\pi n}{2} + 2\pi, n \in \mathbb{Z}$$

$$\cos 3t = 0$$

$$3t = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$t = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{x - 2\pi}{5} = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi + \frac{5\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{9\pi}{2} \geq \frac{5\pi n}{2} + 2\pi \geq -\frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}$$

$$9\pi \geq 5\pi n + 4\pi \geq -\pi, n \in \mathbb{Z}$$

$$5\pi \geq 5\pi n \geq -5\pi, n \in \mathbb{Z}$$

$$1 \geq n \geq -1, n \in \mathbb{Z} \Rightarrow n = -1; 0; 1$$

$$n = -1 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{2}$$

$$n = 0 \Rightarrow x = 2\pi$$

$$n = 1 \Rightarrow x = \frac{9\pi}{2}$$

$$\frac{9\pi}{2} \geq 2\pi + \frac{5\pi}{6} + \frac{5\pi k}{3} \geq -\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

$$27\pi \geq 12\pi + 5\pi + 10\pi k \geq -3\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$10\pi \geq 10\pi k \geq -20\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$1 \geq k \geq -2, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow k = -2; -1; 0; 1$$

$$k = -2 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{2}$$

$$k = -1 \Rightarrow x = \frac{7\pi}{6}$$

$$k = 0 \Rightarrow x = 2\pi$$

$$k = 1 \Rightarrow x = \frac{17\pi}{6}$$

$$\text{Ответ: } x = -\frac{\pi}{2}; \frac{7\pi}{6}; 2\pi; \frac{17\pi}{6}; \frac{9\pi}{2}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



ii) $a \neq 0$

$500 : a > 0$ (где $a < 0$ аналогично)

$$5x + 6ay - b = 0$$

$$6ay = -5x + b$$

$$y = \frac{-5x + b}{6a}$$

Заметим, что b не влияет на угол наклона
прямой, а только a

Проведем общую внутреннюю касательную
к внешним окружностям

Пусть она касается (2) в г. B, (3) в г. C
и O_y в точке A

$$\text{Центр}(2) - O \quad \text{Центр}(3) - O_1$$

$$\triangle BOA \sim \triangle CO_1A \quad (\angle OBA = \angle CO_1A = 90^\circ \\ \angle OAB = \angle O_1AC \text{ (верш)})$$

$$\frac{OA}{AO_1} = \frac{BO}{CO_1} = \frac{5}{2}$$

$$\frac{OA}{O_1O} = \frac{5}{2}$$

$$O_1O = 9 \Rightarrow 2OA = 45 - 5OA$$

$$3OA = 45 \Rightarrow AO = \frac{45}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A(0; -\frac{45}{3})$$

$$y_{кас} = kx + c$$

$$k < 0$$

$$\Delta \in y_{кас} \Rightarrow$$

$$c = -\frac{45}{3}$$

$$y_{кас} = kx - \frac{45}{3}$$

$$(2): x^2 + (kx - \frac{45}{3})^2 = 25$$

$$x^2 + k^2x^2 - \frac{90}{3}kx + \frac{45^2}{3^2} = 25$$

$$(1+k^2)x^2 - \frac{90}{3}kx + \frac{45^2 - 35^2}{3^2} = 0$$

см. по след. с 2/3

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

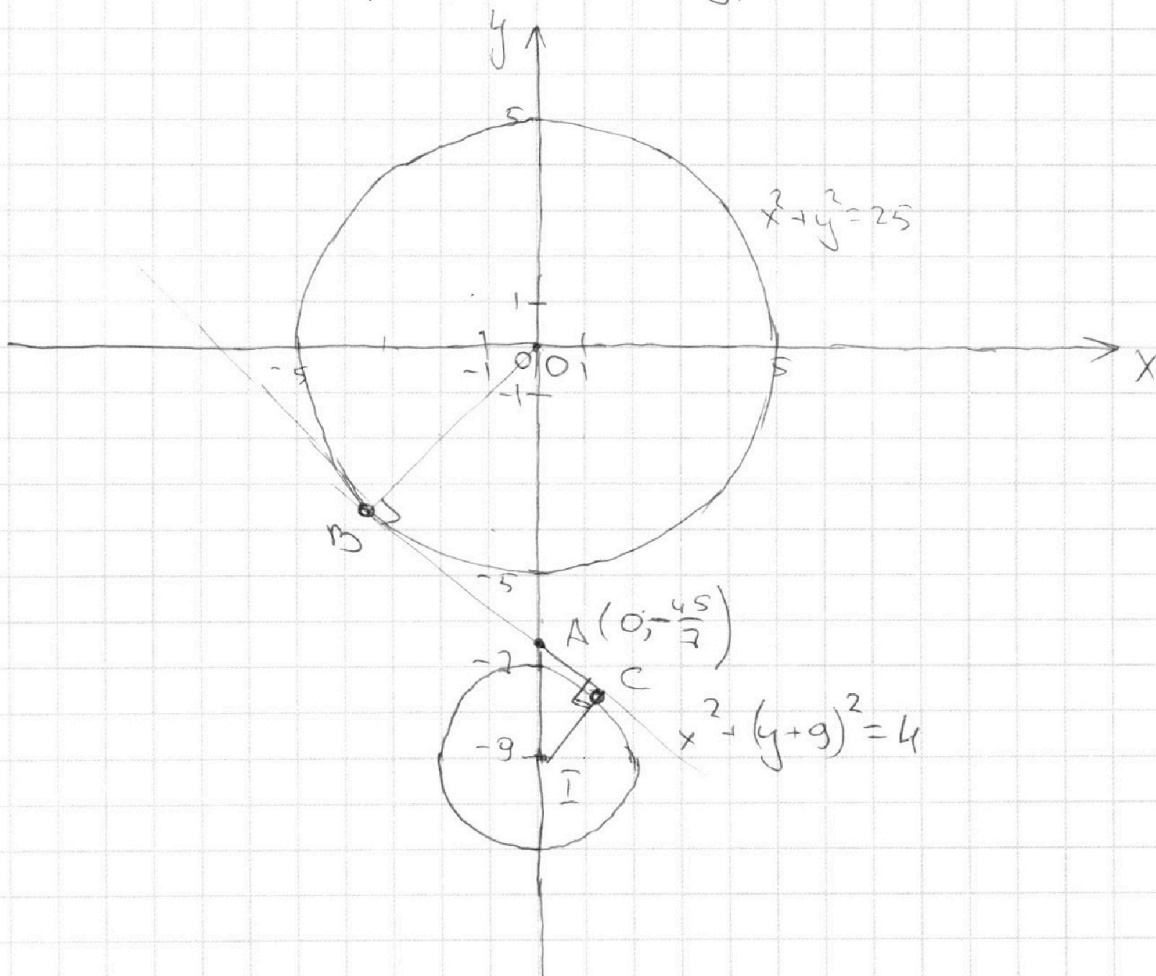
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x + 6ay - b = 0 & (1) \\ x^2 + y^2 = 25 & (2) \\ x^2 + (y+9)^2 = 4 & (3) \end{cases}$$

Построим графики этих уравнений



1) $a=0$ (1) $5x - b = 0$
При $b=0$ $x=0$ пересекать окружности
в 4 точках \Rightarrow 4 решения

см. на след. сгр

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



касательная \Rightarrow одно решение должно иметь
уравнение $\Rightarrow D=0 \Rightarrow D_1=0$

$$D_1 = \frac{45^2}{7^2} k^2 - \frac{45^2 - 35^2}{7^2} (1+k^2) = 0$$

$$45^2 k^2 - (45^2 - 35^2)(1+k^2) = 0$$

$$9^2 k^2 - (9^2 - 7^2)(1+k^2) = 0$$

$$81 k^2 - 32(1+k^2) = 0$$

$$81 k^2 - 32 k^2 = 32$$

$$49 k^2 = 32$$

$$k^2 = \frac{32}{49} \Rightarrow k = -\frac{4\sqrt{2}}{7} \quad (\text{т.к. } k < 0)$$

При $k = -\frac{4\sqrt{2}}{7}$ $c \in (-\infty; +\infty) \Rightarrow$
прямая будет пересекать всего график (2) и (3)
не более чем два раза

При $k \in (-\infty; -\frac{4\sqrt{2}}{7})$ $c \in (-\infty; +\infty)$ прямая
будет пересекать график (2) и (3) в двух
различных точках

При $k \in (-\frac{4\sqrt{2}}{7}; 0)$ $c \in (-\infty; +\infty)$ прямая
будет пересекать график (2) и (3) не более чем
в двух точках.

$$k \in \left(-\frac{4\sqrt{2}}{7}; 0\right) \quad \left(-\infty; -\frac{4\sqrt{2}}{7}\right)$$

$$k < -\frac{4\sqrt{2}}{7}$$

$$-\frac{5}{6a} < -\frac{4\sqrt{2}}{7}$$

$$\frac{1}{a} > \frac{24\sqrt{2}}{35} \Rightarrow 0 < a < \frac{35}{24\sqrt{2}}$$

$$a \in \left(-\frac{35}{24\sqrt{2}}; \frac{35}{24\sqrt{2}}\right) \Leftrightarrow a \in \left(-\frac{35\sqrt{2}}{48}; \frac{35\sqrt{2}}{48}\right)$$

(аналогично для $a < 0$)

$$\text{Ответ: } a \in \left(-\frac{35\sqrt{2}}{48}; \frac{35\sqrt{2}}{48}\right)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 5

1) Пусть $\log_{11} x = a$
 $\log_{11} (0,5y) = b$

$$a+b = \log_{11} x + \log_{11} (0,5y) = \log_{11} (0,5xy) \Rightarrow$$

$$0,5xy = 11^{a+b} \Rightarrow xy = 2 \cdot 11^{a+b}$$

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_{11} x = \log_{11} x^3 \cdot \frac{1}{121} = -5$$

$$\log_{11}^4 x - \frac{6}{\log_{11} x} + \frac{2}{3 \log_{11} x} = -5$$

$$a^4 - \frac{6}{a} + \frac{2}{3a} = -5$$

$$a^4 - \frac{16}{3a} = -5$$

$$\log_{11}^4 (0,5y) + \log_{11} (0,5y) = \log_{11} (0,125y^3) = -5$$

$$\log_{11}^4 (0,5y) + \frac{1}{\log_{11} (0,5y)} + \frac{13}{3 \log_{11} (0,5y)} = -5$$

$$b^4 + \frac{1}{b} + \frac{13}{3b} = -5$$

$$b^4 + \frac{16}{3b} = -5$$

$$2) \quad a^4 - \frac{16}{3a} = -5 \quad \frac{3a^5 + 15a - 16}{3a} = 0$$

$$f(a) = \frac{3a^5 + 15a - 16}{3a}$$

$$f'(a) = \frac{1}{3} \left(\frac{(15a^4 + 15) \cdot a - (3a^5 + 15a - 16)}{a^2} \right) =$$
$$= \frac{15a^5 + 15a - 3a^5 - 15a + 16}{3a^2} = \frac{12a^5 + 16}{3a^2}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$f'(a) = 0 \quad a = -\sqrt[5]{\frac{4}{3}}$$

A sign chart for the derivative $f'(a)$ is shown on a horizontal axis. The axis has a point marked $-\sqrt[5]{\frac{4}{3}}$ and a point marked 0 . To the left of $-\sqrt[5]{\frac{4}{3}}$, the sign is negative ($-$). Between $-\sqrt[5]{\frac{4}{3}}$ and 0 , the sign is positive ($+$). To the right of 0 , the sign is positive ($+$). Arrows point from the sign regions towards the axis. The horizontal axis is labeled $f'(a)$ at the right end.

$$\text{При } a < 0 \quad \left. \begin{array}{l} a^4 > 0 \\ -\frac{16}{3a} > 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} a^4 - \frac{16}{3a} > 0 \\ a^4 - \frac{16}{3a} + 5 > 0 \end{array}$$

При $a > 0$ $f'(a) > 0 \Rightarrow$
 $f(a)$ $a > 0$ не более одного корня

$$f(0,1) < 0 \quad f(1) > 0 \Rightarrow \text{корень есть}$$

$$g(b) = b^4 + \frac{16}{3b} + 5 \quad b = -a$$

$$g(-a) = a^4 - \frac{16}{3a} + 5 \quad \text{те же рассуждения}$$

Если x_1 - корень $f(a)$, то $-x_1$ корень $g(b)$

$$\text{ Действительно } f(x_1) = x_1^4 - \frac{16}{3x_1} + 5 = 0$$

$$g(-x_1) = x_1^4 - \frac{16}{3x_1} + 5 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a + b = x_1 - x_1 = 0 \Rightarrow$$

$$xy = 2 \cdot 11^0 = 2$$

$$\text{Ответ: } xy = 2$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

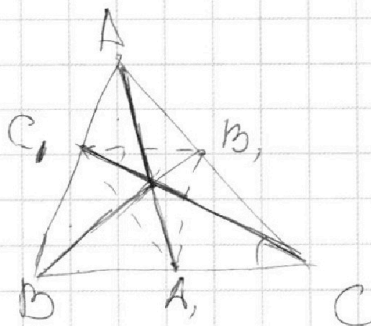
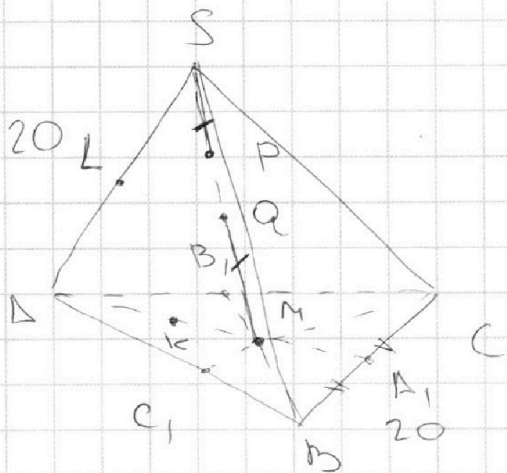
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

 МФТИ



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$(-15, 90)$ $(2, 90)$ $(12, 0)$
 80 16 20
 90°
 $36^5 + 15b + 16$ $a + b + c \leq 17$ $a^2 = \frac{16}{12}$
 $17 - b + c \leq 16$ $f(x)$ $f(1) = -0,1$ $f(-2) > 0$ $0,1$
 $AA_1, BB_1, CC_1 = a \leq 12 - (b - c)$ $a \leq 1$
 $AA_1, BB_1, \frac{9}{2} \sin \alpha$
 $BC \cdot CC_1 \cdot \sin \alpha = 90$ $4 - \frac{6}{7} + \frac{2}{3} + 15 = 0$ $5\sqrt{4}$
 $CC_1 \sin \alpha = \frac{9}{2}$ $\frac{15 - 16}{36}$ $\frac{16}{0,3}$
 $(15b^4 + 15)b - 3b^2 - 15b - 16$ $f(1) > 0$ $f(-1) > 0$ $f(-2) > 0$
 $15b^5 + 15b - 3b^5 - 15b - 16$ $12 + 15\sqrt{4} - 16$ $15\sqrt{4} - 12$
 $12b^5 = 16$ $b = \frac{16}{15\sqrt{4}}$
 $5 + 5 - \frac{15}{3} + 15 - 16$ $15 = 4$
 $4 + 5 - 16$ $15 = 4$
 $15 = 4$ $\frac{4 - 16}{3\sqrt{4}} = \frac{-12}{3}$

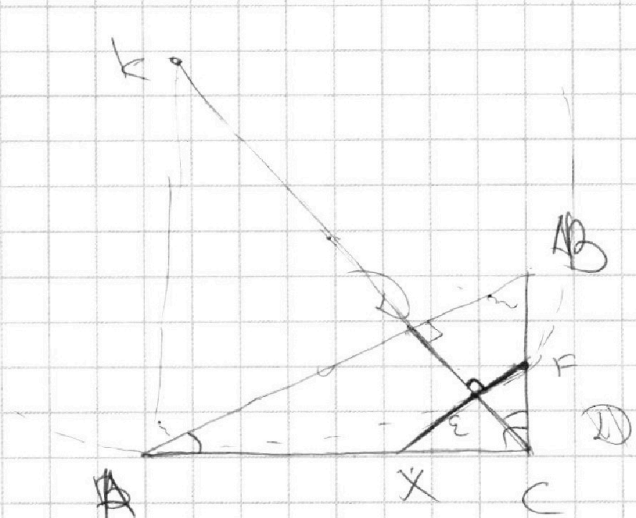
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{XE}{XF} = \frac{AB}{BD} = 1,4$$

$$XE = \frac{XF}{1,4}$$

$$\frac{5}{3} XF$$

$$\frac{18}{34}$$

$$\frac{23}{34}$$

$$CE \cdot CK = AC^2$$

$$AD \cdot DB = ED \cdot DK$$

$$\frac{EF}{BD} = \frac{CE}{CD} = \frac{CF}{CB} = \frac{1,4 EF}{AB}$$

$$AD \cdot DB = CD^2$$

$$\frac{AD}{AB} = AB - 1$$

$$\frac{AD \cdot DC}{EF \cdot EC} = \frac{AD \cdot AC}{CF \cdot CE} = \frac{AC \cdot CD}{EF \cdot CF}$$

$$1 - \frac{10}{14}$$

$$\frac{2}{7}$$

$$CD^2 = ED \cdot DK = (CK - CD)(CD - CE) \cdot \frac{AB}{AD} =$$

$$XF = \frac{CE^2}{AD \cdot DB} = \frac{CE^2}{CE^2}$$

$$\frac{OD}{DC} = \frac{AD}{DB}$$

$$AX = \sqrt{\frac{5}{2}}$$

$$OD \cdot DC = AD^2$$

$$AC^2 = AB \cdot AD = \frac{2}{3} AB^2$$

$$AX^2 = XE \cdot XF$$

$$AC^2 = \frac{2}{3} AB^2$$

$$\frac{XF + \sqrt{\frac{5}{2}} XF}{AB} = \frac{\sqrt{\frac{5}{2}} AB}{\sqrt{\frac{5}{2}} AB}$$

$$AX^2 = \frac{5}{3} XF^2$$

$$\frac{CX}{AC} = \frac{XF}{AB}$$

$$\frac{XF}{AB} = \frac{2\sqrt{5}}{2} \frac{\sqrt{10}}{2}$$

$$\frac{AC - AX}{AC} = \frac{XF}{AB}$$

$$1 = \frac{XF}{AB} + \frac{AX}{AC} \quad \frac{2}{2 + \sqrt{10}}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$ab: 2^6 3^{13} 5^{11}$
 $bc: 2^{14} 3^{21} 5^{13}$
 $ac: 2^{16} 3^{25} 5^{28}$

$a+b=6$
 $b+c=14$
 $a+c=16$

$a=12$
 $b=2$
 $a=4$
 $c=10$

$a=12$
 $b=2$
 $a=4$
 $c=10$

$a \leq 3$
 $b \leq 1$
 $(5b^4 + 15) \cdot 3b - 3(b^5 + 15b + 16)$
 $9b^2$

$a+b+c = \min$
 $a+b+c \geq 18$

$4b - 2b(b^5 - 1)$
 $4b^5 - 2b^2 + 8b$
 $2b^6 + 8b$

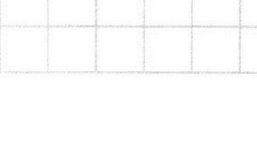
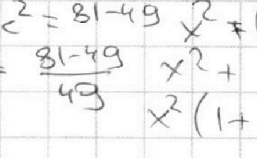
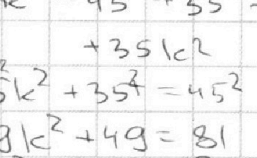
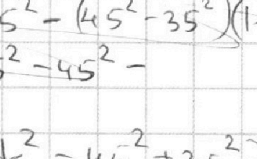
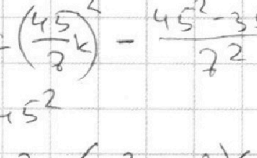
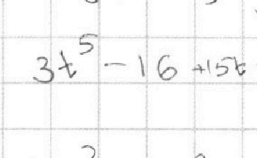
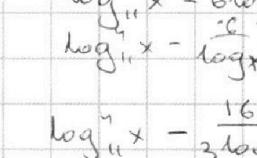
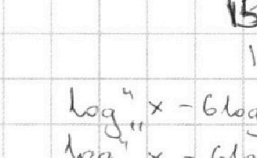
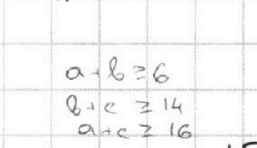
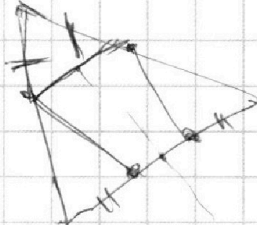
$15b^5 + 45b - 3b^5 - 45b - 48$
 $12b^5 = 48$

$a+b+c < 18$
 $12b^5 = 48$

$a+b+c \geq 18$
 $12b^5 = 48$

$3b^5 - 16 + 15b = 0$
 $3b^5 + 15b - 16 = 0$

$a+b+c \geq 30$



$\log_{11}^4 x - 6 \log_{11} x = \frac{1}{3} \log_{11} x - 5$
 $\log_{11}^4 x - 6 \log_{11} x + \frac{2}{3} \log_{11} x + 5 = 0$
 $\log_{11}^4 x - \log_{11}^2 x + \frac{2}{3} \log_{11} x + 5 = 0$
 $\log_{11}^4 x - \frac{16}{3} \log_{11} x - 5 = 0$

$3t^5 - 16 + 15t = 0$
 $3t^5 + 15t - 16 = 0$

$b=4$
 $a \geq 9$

$45k^2 - 45^2 + 35^2 = 45k^2 + 35k^2$
 $35^2 k^2 + 35^2 = 45^2$
 $79k^2 + 49 = 81$
 $49k^2 = 81 - 49$
 $k^2 = \frac{81-49}{49}$

$x^2 + k^2 x^2 - \frac{90}{7} kx + \frac{45^2}{7} = 25$
 $x^2 (1+k^2) - \frac{90}{7} kx + \frac{45^2 - 35^2}{7} = 0$

Δ_{ACD}
 ΔCEF

$k = \frac{32}{49}$
 $\sim 25 | k = -\frac{4}{2} \sqrt{2}$

$\frac{4}{3} \left(\frac{b^5 - 4}{b^2} \right)$

$y = -15x + 17$
 $y = -15x$
 $\frac{a_1 b_1}{b_2} = \frac{1 \cdot 14}{10} = \frac{14}{10} = \frac{7}{5}$

$3b^5 - 16 + 15b = 0$
 $3b^5 + 15b - 16 = 0$

$b=4$
 $a \geq 9$

$45k^2 - 45^2 + 35^2 = 45k^2 + 35k^2$
 $35^2 k^2 + 35^2 = 45^2$
 $79k^2 + 49 = 81$
 $49k^2 = 81 - 49$
 $k^2 = \frac{81-49}{49}$

$x^2 + k^2 x^2 - \frac{90}{7} kx + \frac{45^2}{7} = 25$
 $x^2 (1+k^2) - \frac{90}{7} kx + \frac{45^2 - 35^2}{7} = 0$

Δ_{ACD}
 ΔCEF

$k = \frac{32}{49}$
 $\sim 25 | k = -\frac{4}{2} \sqrt{2}$

$\frac{4}{3} \left(\frac{b^5 - 4}{b^2} \right)$

$y = -15x + 17$
 $y = -15x$
 $\frac{a_1 b_1}{b_2} = \frac{1 \cdot 14}{10} = \frac{14}{10} = \frac{7}{5}$

$3b^5 - 16 + 15b = 0$
 $3b^5 + 15b - 16 = 0$

$a+b+c \geq 18$
 $a+b+c \geq 30$

$a+b+c < 18$
 $12b^5 = 48$

$b=4$
 $a \geq 9$

$45k^2 - 45^2 + 35^2 = 45k^2 + 35k^2$
 $35^2 k^2 + 35^2 = 45^2$
 $79k^2 + 49 = 81$
 $49k^2 = 81 - 49$
 $k^2 = \frac{81-49}{49}$

$x^2 + k^2 x^2 - \frac{90}{7} kx + \frac{45^2}{7} = 25$
 $x^2 (1+k^2) - \frac{90}{7} kx + \frac{45^2 - 35^2}{7} = 0$

Δ_{ACD}
 ΔCEF

$k = \frac{32}{49}$
 $\sim 25 | k = -\frac{4}{2} \sqrt{2}$

$\frac{4}{3} \left(\frac{b^5 - 4}{b^2} \right)$

$y = -15x + 17$
 $y = -15x$
 $\frac{a_1 b_1}{b_2} = \frac{1 \cdot 14}{10} = \frac{14}{10} = \frac{7}{5}$

$3b^5 - 16 + 15b = 0$
 $3b^5 + 15b - 16 = 0$

$b=4$
 $a \geq 9$

$45k^2 - 45^2 + 35^2 = 45k^2 + 35k^2$
 $35^2 k^2 + 35^2 = 45^2$
 $79k^2 + 49 = 81$
 $49k^2 = 81 - 49$
 $k^2 = \frac{81-49}{49}$

$x^2 + k^2 x^2 - \frac{90}{7} kx + \frac{45^2}{7} = 25$
 $x^2 (1+k^2) - \frac{90}{7} kx + \frac{45^2 - 35^2}{7} = 0$

Δ_{ACD}
 ΔCEF

$k = \frac{32}{49}$
 $\sim 25 | k = -\frac{4}{2} \sqrt{2}$

$\frac{4}{3} \left(\frac{b^5 - 4}{b^2} \right)$

$y = -15x + 17$
 $y = -15x$
 $\frac{a_1 b_1}{b_2} = \frac{1 \cdot 14}{10} = \frac{14}{10} = \frac{7}{5}$

$3b^5 - 16 + 15b = 0$
 $3b^5 + 15b - 16 = 0$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\frac{10\sqrt{3}}{3}$

$\frac{24}{52}$

$\frac{9\sqrt{3}-4\sqrt{5}+\frac{5\sqrt{3}}{3}}{15\sqrt{3}+5\sqrt{5}}$

$\frac{3\sqrt{3}-4\sqrt{5}-\frac{5\sqrt{3}}{3}}{5}$

$\frac{5\sqrt{3}-\frac{5\sqrt{3}}{3}}{5}$

$\frac{15\sqrt{3}-5\sqrt{3}}{5}$

$\arccos(\sin x) = \frac{9\pi - 2x}{10}$

$\sin x = \cos\left(\frac{9\pi - 2x}{10}\right)$

$\sin x - \cos\left(\frac{9\pi - 2x}{10}\right) = 0$

$0 \leq \frac{9\pi - 2x}{10} \leq \pi$

$0 \leq 9\pi - 2x \leq 10\pi$

$-9\pi \leq -2x \leq \pi$

$\frac{9\pi}{2} \geq x \geq -\frac{\pi}{2}$

$\cos\left(\frac{9\pi - 2x}{10}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{9\pi - 2x}{10}\right) = \sin\left(\frac{5\pi - 9\pi + 2x}{10}\right) = \sin\left(\frac{2x - 4\pi}{10}\right) = \sin\left(\frac{x - 2\pi}{5}\right)$

$\sin x - \sin\left(\frac{x - 2\pi}{5}\right) = 0$

$\sin 5t - \sin t = 0$

$\sin(3t+2t) - \sin(3t-2t) = 0$

$\sin 3t \cos 2t + \sin 2t \cos 3t - \sin 3t \cos 2t + \cos 3t \sin 2t$

$2 \sin 2t \cos 3t = 0$

$\sin 2t \cos 3t = 0$

$\sin 2t = 0$

$2t = \pi n, n \in \mathbb{Z}$

$t = \frac{4\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}$

$\frac{x - 2\pi}{5} = \frac{4\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$

$x - 2\pi = \frac{5\pi n}{2}$

$x = \frac{5\pi n}{2} + 2\pi$

$x = -\frac{\pi}{2}$

$x = 2\pi$

$x = \frac{9\pi}{2}$

$\frac{x - 2\pi}{5} = t$

$x = 2\pi = 5t$

$x = 5t + 2\pi$

$x = 2\pi + \frac{5\pi}{2}$

$x = 2\pi + \frac{5\pi}{2}$

$x = 2\pi - \frac{5\pi}{2}$

$360 - \alpha - \beta$

$-\alpha - \beta$

20

$9\pi - 4\pi + 5\pi = 10\pi$

C, M, M'

$\frac{2\pi}{3}$

$\frac{20\pi}{3}$

$\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma$

$\sin \alpha + \sin \beta + \sin(\alpha + \beta)$

$-\frac{\pi}{2} \leq \frac{5\pi n}{2} + 2\pi \leq \frac{9\pi}{2}$

$-\pi \leq 5\pi n + 4\pi \leq 9\pi$

$-\frac{5\pi}{2} \leq 5\pi n \leq \frac{5\pi}{2}$

$-1 \leq n \leq 1$

$\frac{9\pi}{2} \geq 2\pi + \frac{5\pi n}{2} \geq -\frac{\pi}{2}$

$27\pi \geq 12\pi + 5\pi + 10\pi k \geq -3\pi$

$10\pi \geq 10\pi k \geq -20\pi$

$1 \geq k \geq -2$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи.

решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\log_4 x - 6 \log_x 11 = \log_x 3 \cdot 11^{-2} - 5 \quad \log_4 x + \log_{11} 0.5y = t+2$$

$$\log_4 x - 6 \log_x 11 = -\frac{2}{3} \log_x 11 - 5 \quad \log_4 0.5xy = t+2$$

$$t^4 - \frac{6}{t} + \frac{2}{3t} + 5 = 0 \quad \left| \times 3t \right. \quad 0.5xy = 11^{t+2}$$

$$3t^5 - 18 + 2 + 15t = 0$$

$$3t^5 + 15t - 16 = 0$$

$$xy = \sqrt{\frac{11^{t+2}}{0.5}} = 2 \cdot 11^{t+2}$$

$$\log_4 (0.5y) - \log_{0.5y} 11 = -\frac{13}{3} \log_{0.5y} 11 - 5$$

$$y^4 z^4 + \frac{1}{2} + \frac{13}{3z} = t^4 - \frac{6}{t} + \frac{2}{3t}$$

$$z^4 + \frac{16}{3z} = t^4 - \frac{16}{3t}$$

$$z^4 - t^4 + \frac{16}{3} (z - t) = 0$$

$$z + t = 0$$

$$xy = 2$$

$$z^4 - t^4 + \frac{16}{3} \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{t} \right) = 0$$

$$(z^2 + t^2)(z+t)(z-t) + \frac{16}{3} \left(\frac{t+z}{zt} \right) = 0 \quad z = t$$

$$(z+t) \left((z^2 + t^2)(z-t) + \frac{16}{3zt} \right) = 0$$

$$3zt(z^2 + t^2)(z-t) + 16 = 0$$

$$zt(z-t) < 0$$

$$3ab(a^2 + 2b) + 16 = 0$$

$$z-t = a$$

$$3a^3b + 6b^2a + 16 = 0$$

$$zt = b$$

$$6ba^2 + 3a^3b + 16 = 0$$

$$a^2 = z^2 - 2zt + t^2$$

$$D = 9a^2 - 6 \cdot 16 \cdot 4a$$

$$a^2 + 2b = (z^2 + t^2)$$

$$5b = 5 \cdot \frac{16}{9} \frac{2}{5}$$

$$a = \sqrt[5]{\frac{3 \cdot 16}{9}}$$

$$a^2 + 4b = (z+t)^2$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

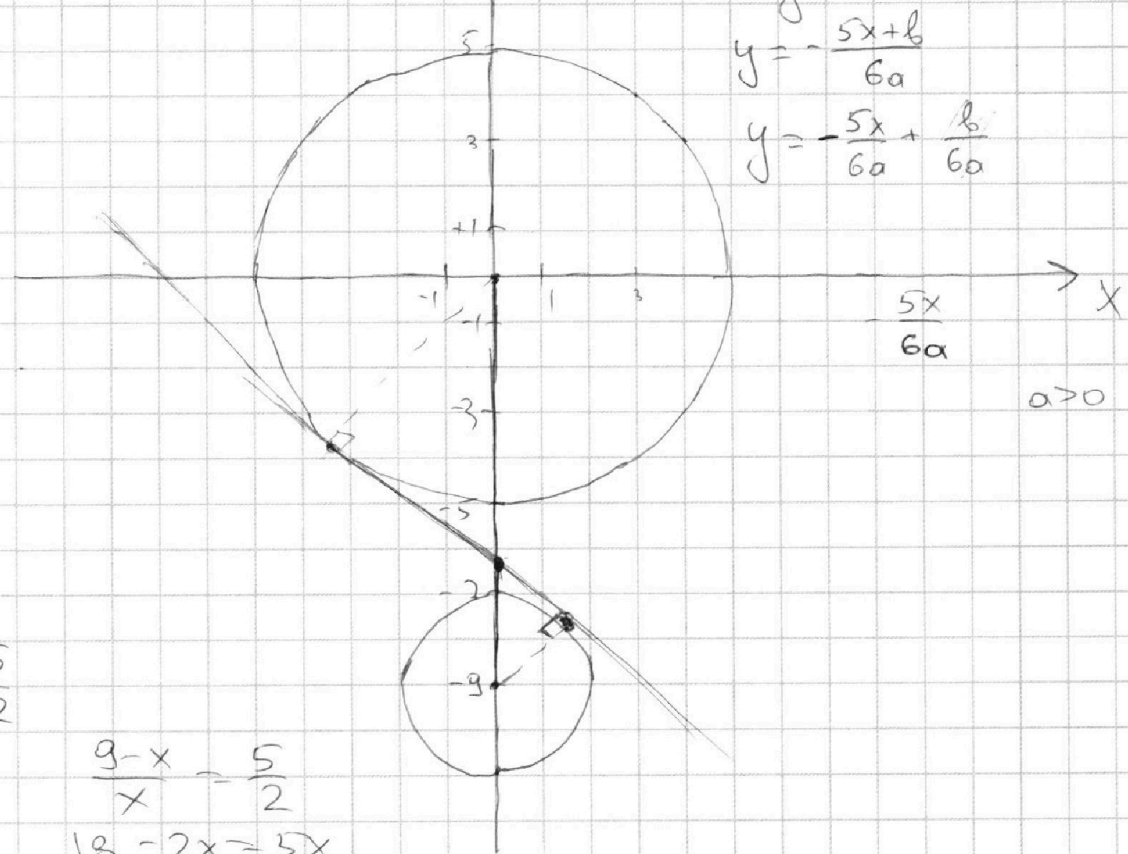


$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 25 \\ x^2 + y^2 + 18y + 81 &= 0 \\ x^2 + y^2 + 18y + 81 &= 4 \\ x^2 + (y+9)^2 &= 4 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} a &= 0 & 5x - b &= 0 \\ & & 5x &= b \\ & & x &= \frac{b}{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6ay &= -5x + b \\ y &= \frac{-5x + b}{6a} \\ y &= -\frac{5x}{6a} + \frac{b}{6a} \end{aligned}$$



$$\frac{5}{2}$$

$$\begin{aligned} \frac{9-x}{x} &= \frac{5}{2} \\ 18 - 2x &= 5x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{18}{7} \\ y &= -\frac{18}{7} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{x}{9-x} &= \frac{5}{2} \\ 2x &= 45 - 5x \\ 7x &= 45 \\ x &= \frac{45}{7} = 6\frac{3}{7} \end{aligned}$$

$$\left(\frac{45}{7}\right)^2$$

$$\begin{aligned} y &= kx + b \\ y &= kx - \frac{45}{7} \end{aligned}$$