



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ



## 11 КЛАСС. Вариант 4

- [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^6 3^{13} 5^{11}$ ,  $bc$  делится на  $2^{14} 3^{21} 5^{13}$ , а  $ac$  делится на  $2^{16} 3^{25} 5^{28}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
- [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник  $ABC$ . Окружность, касающаяся прямой  $AC$  в точке  $A$ , пересекает высоту  $CD$ , проведённую к гипотенузе, в точке  $E$ , а катет  $BC$  – в точке  $F$ . Известно, что  $AB \parallel EF$ ,  $AB : BD = 1,4$ . Найдите отношение площади треугольника  $ACD$  к площади треугольника  $CEF$ .
- [4 балла] Решите уравнение  $10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$ .
- [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система уравнений

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

- [5 баллов] Некоторые числа  $x$  и  $y$  удовлетворяют равенствам

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_{x^3} \frac{1}{121} - 5, \quad \text{и} \quad \log_{11}^4(0,5y) + \log_{0,5y} 11 = \log_{0,125y^3} (11^{-13}) - 5.$$

Найдите все возможные значения произведения  $xy$ .

- [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0;0)$ ,  $P(-15;90)$ ,  $Q(2;90)$  и  $R(17;0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$ .
- [6 баллов] Дана треугольная пирамида  $SABC$ , медианы  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $M$ . Сфера  $\Omega$  касается ребра  $AS$  в точке  $L$  и касается плоскости основания пирамиды в точке  $K$ , лежащей на отрезке  $AM$ . Сфера  $\Omega$  пересекает отрезок  $SM$  в точках  $P$  и  $Q$ . Известно, что  $SP = MQ$ , площадь треугольника  $ABC$  равна 180,  $SA = BC = 20$ .
  - Найдите произведение длин медиан  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$ .
  - Найдите двугранный угол при ребре  $BC$  пирамиды, если дополнительно известно, что  $\Omega$  касается грани  $BCS$  в точке  $N$ ,  $SN = 6$ , а радиус сферы  $\Omega$  равен 8.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                                   | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№1

Давайте рассматривать каждой задачи деление

по степенью  $\deg(e)_2$  — степень вхождения

2 в e. Т.е. если  $\deg(e)_2 = k$  то

$e : 2^k$ , но  $e \nmid 2^{k+1}$ .

Хорошо, тогда заметим, что:  $\deg$

$$\deg(a)_2 + \deg(b)_2 \geq 6$$

$$\deg(b)_2 + \deg(c)_2 \geq 14$$

$$\deg(a)_2 + \deg(c)_2 \geq 16$$

$$\text{Тогда } \underbrace{\deg(a)_2 + \deg(b)_2 + \deg(c)_2}_{\text{то есть } abc} \geq 16 + 14 + 6 = 36$$

$$\text{то есть } abc : 2^{18}$$

Проделали ту же операцию с 3 дел.

$$\text{Тогда } \underbrace{\deg(a)_3 + \deg(b)_3 + \deg(c)_3}_{2} = \frac{59}{2}, \text{ но}$$

Мы знаем, что степень вхождения должна

быть целой, а  $\deg(abc)_3 \geq \frac{59}{2}$ , значит

$$\deg(abc)_3 \geq \frac{60}{2} = 30$$

$$\deg(abc)_5 \geq \underbrace{\deg(a)_5 + 2\deg(b)_5 + \deg(c)_5}_{2} = \frac{52}{2} = 26, \text{ но при этом заметим}$$

$$\text{что } \deg(\underbrace{b+a}_2)_5 \geq 28, \text{ а } \deg(a)_5 + 2\deg(b)_5 + \deg(c)_5 \geq \underbrace{\deg(a)_5 + 2\deg(b)_5 + \deg(c)_5}_{\geq 28} \geq 11 + 13 - 24$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Значит  $\deg(abc) \geq 3$ ,  $\frac{28+28}{2} = 28$ . ( $\deg(abc) \geq \deg(bc) \geq 28$ ).

тогда  $abc: 5^{28}$ ,  $abc: 3^{30}$ ,  $abc: 2^{18}$ ,  
значит  $abc: 5^{28} \cdot 3^{30} \cdot 2^{18}$ .

Значит минимальное  $abc = 5^{28} \cdot 3^{30} \cdot 2^{18}$ .

Пример на то число,

$$a = 2^4 \cdot 3^9 \cdot 5^{14}$$

$$b = 2^2 \cdot 3^4 \cdot 5^0$$

$$c = 2^{12} \cdot 3^{17} \cdot 5^{14}$$

$$\text{тогда } ab = 2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{14} : 2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{14}$$

$$bc = 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{14} : 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{13}$$

$$ac = 2^{16} \cdot 3^{26} \cdot 5^{28} : 2^{16} \cdot 3^{25} \cdot 5^{28}$$

$a \quad abc = 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$ , значит минимум достигнуто.

Ответ:  $abc = 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$ .

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

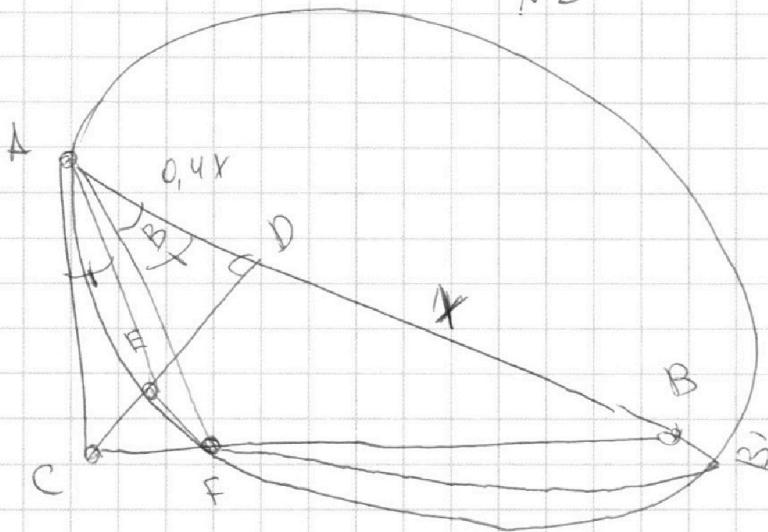
Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                                   | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N<sub>2</sub>



$$\frac{AB}{BD} = 1,4 \text{, т.к. } BD = x, \text{ т.к. } AB = 1,4x, \\ \text{а значит } AD = 0,4x$$

$$\text{Очевидно } \triangle ADC \sim \triangle CDB \Rightarrow \frac{AD}{CD} = \frac{CD}{DB} \Rightarrow$$

$$CD = \sqrt{AD \cdot DB} = \sqrt{0,4x \cdot x} = \sqrt{0,4}x.$$

$\angle CFE = \angle CBD$  из параллельности.

т.к.  $\angle EFC = k$ ,

тогда  $\triangle CEF \sim \triangle CDB \Rightarrow$

$$\frac{CE}{CD} = \frac{CF}{CB} = k \text{ т.к. } CD \text{ это равно } k.$$

$$\text{тогда } CE = k \cdot \sqrt{0,4}$$

$$EF = k \cdot x$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что  $\angle CAB = \underbrace{\angle FBA}_{\text{то равно}} + \angle BAF$

$\angle EAB$  т.к  $EAB'F$  -

равнодоступ  
трансвер  
 $BIA \parallel EFKH$ .

Значит  $\angle CAB = \angle EAB + \angle BAF$

$\angle CAF = \angle EAB$ ,

значит  $\angle CAF = \angle BAF$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N3

$$\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$10 \arccos\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) = 9\pi - 2x$$

$$10\left(\frac{\pi}{2} - x + 2\pi n\right) = 9\pi - 2x$$

$$9\pi - 10x + 20\pi n = 9\pi - 2x$$

$$-4\pi + 20\pi n = 8x$$

$$x = -\frac{\pi}{2} + \frac{20\pi n}{8}$$

$$-\frac{\pi}{2} + \frac{5\pi n}{2}$$

$$0 < \frac{\pi}{2} - x + 2\pi n \leq \pi$$

$$0 < \frac{\pi}{2} + 2\pi n + \frac{\pi}{2} - \frac{5\pi n}{2} \leq \pi$$

$$0 < \pi + 2\pi n - \frac{5\pi n}{2} \leq \pi$$

??

$$0 \leq 1 + 2n - 2,5\pi \leq 1$$

$$-1 \leq -2,5\pi \leq 0$$

$$n=0,1,2$$

$$x = -\frac{\pi}{2}, 2\pi, \frac{9\pi}{2}$$

1/1/1/1/1/1/1

0 < n < 1

$$y < \left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 2\pi n\right) - 9\pi - 2x$$

$$10\left(-\frac{\pi}{2} - x + 2\pi n\right) = 9\pi - 2x$$

$$-5\pi + 10x + 20\pi n = 9\pi - 2x$$

$$14\pi + 20\pi n$$

$$12x = -\cancel{14\pi} - \cancel{20\pi n}$$

$$x = \frac{-14\pi - 20\pi n}{12}$$

$$\frac{14\pi}{12} + \frac{20\pi n}{12}$$

$$0 < -\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 2\pi n \leq \pi$$

$$0 < x - \frac{\pi}{2} + 2\pi n \leq \pi$$

$$0 < \frac{14\pi}{12} - \frac{\pi}{2} + \frac{20\pi n}{12} + 2\pi n \leq \pi$$

$$0 < 14 - 6\pi - 20\pi n + 24\pi n \leq \pi$$

$$0 < 8\pi + 4\pi n \leq 12\pi$$

$$0 < 8 + 4n \leq 12$$

$$-8 \leq 4n \leq 4$$

$$-2 \leq n \leq 1$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Знайди

$$n = -2, -1, 0, 1$$

$$x = \frac{14\pi}{12} - \frac{20\pi n}{12}$$

$$n=3 \quad \frac{14\pi}{12} - \frac{20\pi}{12} = -\frac{6\pi}{12} = -\frac{\pi}{2}$$

$$n=0 \quad \frac{14\pi}{12} = \frac{7\pi}{6}$$

$$n=-1 \quad \frac{14\pi}{12} + \frac{20\pi}{12} = \frac{34\pi}{12} = \frac{17\pi}{6}$$

$$n=-2 \quad \frac{14\pi}{12} + \frac{40\pi}{12} = \frac{54\pi}{12} = \frac{9\pi}{2}$$

Orber:  $x = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} \\ 2\pi \\ \frac{8\pi}{2} \\ \frac{17\pi}{6} \\ \frac{7\pi}{6} \end{cases}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                                   | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№4

посмотрим на 2 часть. Заметим,  
что вращение равно 0, когда сумма радиусов  
из центров равна 0.

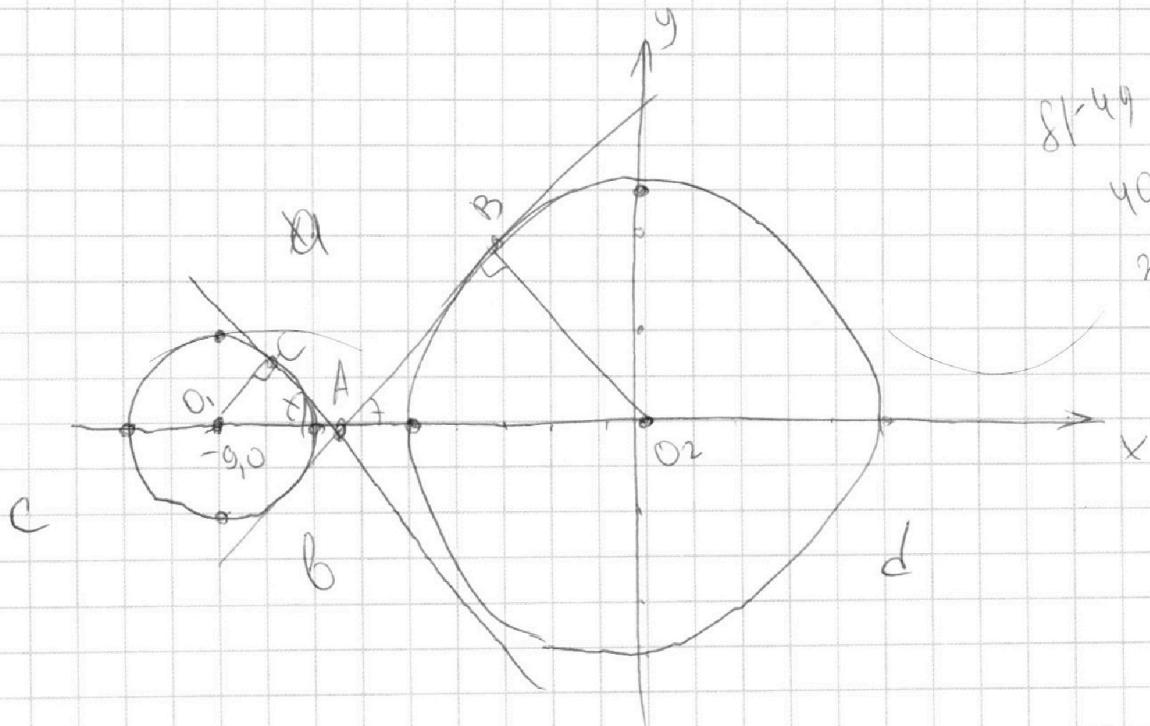
$$x^2 + y^2 - 25 = 0$$

$$x^2 + y^2 = 25$$

$$x^2 + y^2 + 8y + 77 = 0$$

$$x^2 + (y+9)^2 = 4.$$

Заметим, что это ортогональные радиусы  
5 и 2, и с центрами  $(0,0)$   $(0,-9)$  соответ-  
ственно.



Заметим, что первое вращение будет приводить

$$9x + 6ay - b = 0 \Rightarrow 6ay = b - 9x \Rightarrow y = \frac{b}{6a} - \frac{9x}{6a}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> |

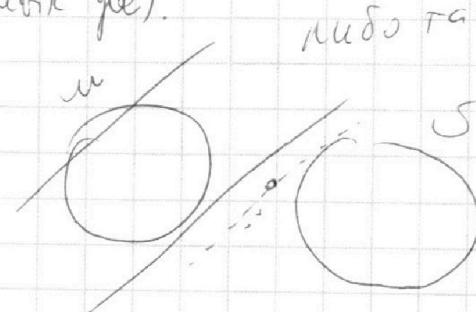
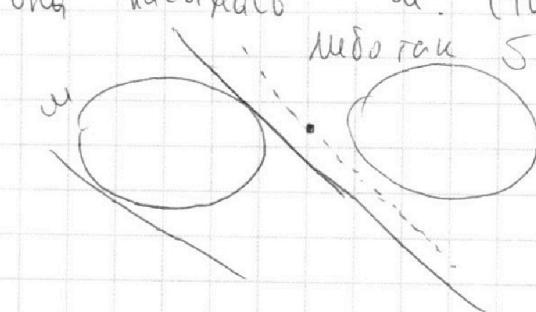
**МФТИ**



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что прямая пересекает окружность максимум в 2 точках, а так как должно быть 4 точки пересечения, то наружу окружность одна прямая. Угол пересекает в 2 точках. Заметим, что бодрая склоняется, так как находится начальной прямой, а бодрая в, может поднимать или опускать эту прямую до нужного места. Давайте проверим 2 ~~варианта~~ общее вступление касательной. Заметим, что если мы сдвинем начальную прямую так, чтобы она проходила через точку A, и ее конец попадет в прямости a и b, то эта прямая ни при каком параллельном переносе не будет пересекать обе окружности в двух точках.

Действительно, изображим кону прямую так, чтобы она касалась ее. (таких прямых две).



Заметим, что окружность S будет находиться там, где показано на рисунке.

- |                          |   |                          |   |                          |   |                                     |   |                          |   |                          |   |                          |   |
|--------------------------|---|--------------------------|---|--------------------------|---|-------------------------------------|---|--------------------------|---|--------------------------|---|--------------------------|---|
| <input type="checkbox"/> | 1 | <input type="checkbox"/> | 2 | <input type="checkbox"/> | 3 | <input checked="" type="checkbox"/> | 4 | <input type="checkbox"/> | 5 | <input type="checkbox"/> | 6 | <input type="checkbox"/> | 7 |
|--------------------------|---|--------------------------|---|--------------------------|---|-------------------------------------|---|--------------------------|---|--------------------------|---|--------------------------|---|

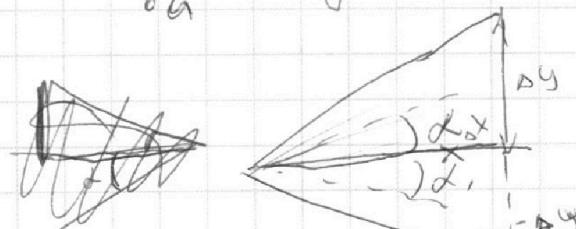
МФТИЕсли отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

(4). Так как касательной линии может пройти  
противоположную A и параллельную ей касательной  
линии, то на касательной касаются обр. в  
меньше в другой точке. А значит онущая или  
найденная кривые, либо достигли значения макс.

В. То есть такой максимум не возможен.

Теперь заметим, что если кривая будут лежать  
внутри области  $c \cup d$ , то эта окружность  
пересекет обр. в 2 точках (иначе невозможно)  
и предположим, что проходит через A, т.к. она не соприкасается  
с обр. касательной (обр. касательных не ноги). то  
также, что проходит боковыми), она пересекает обе  
окружности в двух точках.

$$\text{УЗР} \quad y' = -\frac{5}{6a} = \text{т.к. } \text{Нельзя}$$



$$-\frac{\Delta y}{\Delta x} < -\frac{5}{6a} < \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

(Более того, это возможно)

(второй доказ. т.к. сажи кас. не ноги.)

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

найдем координаты A.

$\Delta ACO_1 \sim \Delta BCO_2$ , значит. ( $AO_1 + AO_2 = g$ ).

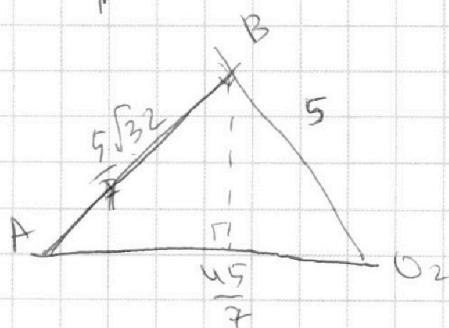
$$\frac{OC}{O_2B} = \frac{AO_1}{AO_2}$$

$$\frac{\frac{2}{5}}{5} = \frac{AO_1}{AO_2}$$

$$\frac{2}{5}AO_2 = \frac{4}{5}AO_1$$

$$g = AO_2 + AO_1 = AO_2 + \frac{2}{5}AO_2 = \frac{7}{5}AO_2$$

$$\frac{45}{7} = AO_2$$



$$\text{значит } A = \left(0, -\frac{45}{7}\right)$$

$$AB = \sqrt{\left(\frac{45}{7}\right)^2 - 5^2} =$$

$$5 \sqrt{\frac{81}{49} - 1} =$$

$$5 \sqrt{\frac{32}{49}}$$

$$5 \sqrt{32} \cdot 5 = \frac{45}{7} \cdot h$$

$$h = \frac{5 \cdot 5 \cdot \sqrt{32}}{\frac{45}{7}} = \frac{25\sqrt{32}}{45} = \frac{5\sqrt{32}}{9}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

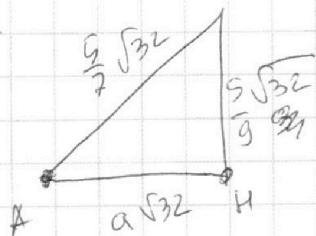
Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

(4)



$$a = \sqrt{\left(\frac{5}{7}\right)^2 - \left(\frac{5}{9}\right)^2} = \sqrt{\frac{25}{49} - \frac{25}{81}} = \sqrt{\frac{81 - 49}{81 \cdot 49}} = \frac{5}{63} \sqrt{32}$$

$$AH = \sqrt{32} \cdot \frac{5}{63} \cdot \sqrt{32} = \frac{32 \cdot 5}{63}$$

Tanya:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{5}{7}\sqrt{32}}{\frac{5\sqrt{32}}{9}} = \frac{7}{63} \cancel{\cdot \frac{5}{5} \cdot \cancel{\sqrt{32}}} = \frac{1}{9}$$

$$-\frac{7}{\sqrt{32}} < \frac{-5}{6a} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{32}} < \frac{5\sqrt{32}}{6 \cdot 7} \Leftrightarrow \frac{5\sqrt{32}}{6 \cdot 7} < a < \frac{5 \cdot \sqrt{32}}{6 \cdot 7}$$

$$\frac{5\sqrt{8}}{21} < a < \frac{5\sqrt{8}}{21}$$

$$-\frac{32}{\sqrt{7}} > \frac{6a}{-5} > \frac{1}{\frac{7}{\sqrt{32}}}$$

$$-\frac{32}{\sqrt{7}} < \frac{6a}{5} < \frac{\sqrt{32}}{\frac{7}{\sqrt{32}}}$$

Orbits:  $a = \left(-\frac{5\sqrt{8}}{21}, \frac{5\sqrt{8}}{21}\right)$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$x \neq 1, x > 1 \quad \log_{11} x > 0 \quad \text{N5}$$

$$0,5y > 1$$

$$0,5y > 0 \quad \log_{11} 0,5y \neq 0.$$

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_{11} 11 = \log_{11} 2^{(-2)} - 5 \quad \left\{ \begin{array}{l} \log_{11}^4 (0,5y) + \log_{11} 11 = \log_{11} 3^{(-13)} - 5 \\ \log_{11}^4 (0,5y) + 1 = -\frac{13}{3} \log_{11} (0,5y) - 5 \end{array} \right.$$

$$\frac{\log_{11}^4 x - 6}{\log_{11} x} = -\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\log_{11} x} - 5 \quad \left\{ \begin{array}{l} \log_{11}^4 (0,5y) + 1 = -\frac{13}{3} \log_{11} (0,5y) - 5 \\ \log_{11} (0,5y) \neq 0, \text{ можем} \end{array} \right.$$

$$3 \log_{11} x - 18 = -2 \log_{11} x - 15 \log_{11} x \quad \left\{ \begin{array}{l} \log_{11} x \neq 0, \text{ можем} \\ \log_{11} x \neq 0, \text{ можем} \end{array} \right.$$

$$3 \log_{11}^5 x + 15 \log_{11} x = 16 \quad \left\{ \begin{array}{l} 3 \log_{11}^5 (0,5y) + 3 = -13 - 15 \log_{11} (0,5y) \\ 3 \log_{11}^5 (0,5y) + 15 \log_{11} (0,5y) = -16. \end{array} \right.$$

Заметим что если  $\log_{11} x$  <sup>(\*)</sup> равна то при любых сдвигах

и  $\log_{11} 0,5y$  (от =),

равенство уменьшается, то уменьшилось значение

максимум

записано

если в выражении имеется не одинаковый корень.

логарифм

$$(3a^5 + 15a) \geq 3(a+5)^5 + 15(a+5) \text{ если } a \geq 0. \text{ в противном случае}$$

значение выражения достигается равно 1 одному корню

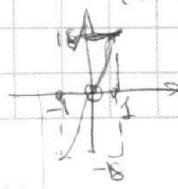
значение выражения превышается если  $a=0$ , но если

$$a=0 \quad \text{то } 3 \cdot a^5 + 15a = 0 \neq 16, \text{ значит это не является решением.}$$

$$3a^5 + 15a = 0 \neq 16, \text{ значит } a$$

$$\text{если } a=1 \quad 3a^5 + 15a = 3+15 > 16 \quad \text{и } a=-1 \quad 3a^5 + 15a = -3-15 < -16$$

тогда выражение такое:



(от логарифм)

значение выражения 16 есть  
-16 достигнуто.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> |

**МФТИ.**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

но заменим, что если

$$3a^5 + 15a = 16 \quad \text{то} \quad 3(-a)^5 + 15(-a) = -16.$$

значит

$$\begin{cases} \log_{11} x = a \\ \log_{11} x = \log_{11} 11^a \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \log_4(0,5y) = -a \\ \log_4(0,5y) = \log_4 11^{-a} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 11^a \\ 0,5y = 11^{-a} \end{cases}$$

тогда  $(0,5y) \cdot x = 11^a \cdot 11^{-a} = 1$

$$xy = 2(x \cdot 0,5) = 1 \cdot 2 = 2$$

Значит  $xy=2$  или это еп. значение.

Ответ:  $xy=2$ .

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

**МФТИ.**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

1,3

$$\begin{array}{c} a \\ \diagup \\ 1 \end{array}$$

$$\log_{11} x = a$$

$$3\log_{11}^5 x + 15\log_{11} x - 16 = 0$$

$$\begin{array}{c} -a \\ \diagdown \\ 2 \end{array}$$

$$\log_{11} x = \log_{11} 11^a$$

$$x = 11^a$$

$$3\log_{11}(0,5y) + 15\log_{11}(0,5y) + 16 = 0$$

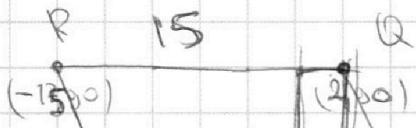
$$\log_{11}(0,5y) = -a$$

$$0,5y = 11^{-a}$$

$$0,5xy = 11^{-a} \cdot 11^a = 1$$

$$xy = ?$$

$$x_2 - x_1 = -17,17$$



$$6(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 48$$

$$\cancel{x_1}$$

$$x_2 - x_1 > 0$$

бак

$$\frac{5}{6} \cdot \sqrt{32}$$

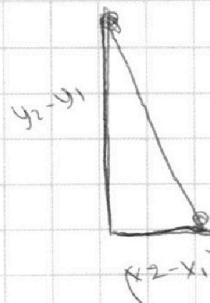
0,5 0,0

(8, 0)

(15, -42)  
(14, -36)

⊗

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{4}$$



I-

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

5

6

7

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

8/18

$$\sqrt{(25-x^2)} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(25-x^2)}$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2}$$

$$81-49=32$$

$$21-\begin{matrix} a \\ \checkmark \\ b \\ \checkmark \\ c \end{matrix}$$

$$\frac{1}{2} \cdot (25-x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x)$$

$$\frac{1}{2} \cdot (25-x^2) \cdot -2x = -x(25-x)^{\frac{1}{2}}$$

$$\begin{matrix} a \\ \checkmark \\ b \\ \checkmark \\ c \\ \checkmark \\ d \\ \checkmark \\ e \\ \checkmark \\ f \\ \checkmark \\ g \end{matrix}$$

$$x^2 + (y+g)^2 = 4$$

$$y - \frac{18}{7} = \frac{63}{7} - \frac{18}{7} =$$

$$\frac{45}{7}$$

$$2 \rightarrow e$$

$$x_1 \times x_2 = 9$$

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{2}{5}$$

$$2x_1 \times 2x_2 = 18$$

$$5x_1 = 2x_2$$

$$2x_1 = 18$$

$$\left( \frac{45}{7}, 10 \right)$$

$$x_1 = \frac{18}{7}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

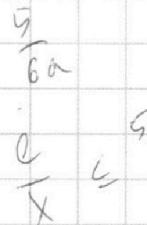
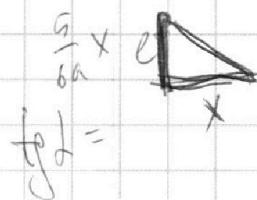
- |                            |                            |                            |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$1) x^2 + y^2 = 25$$

$$2) x^2 + (y+9)^2 = 4$$



$$x^2 + y^2 = 25$$

$$y^2 = 25 - x^2$$

$$y = \sqrt{25 - x^2}$$

$$(25 - x^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot (25 - x^2)^{\frac{1}{2}} \cdot 2x$$

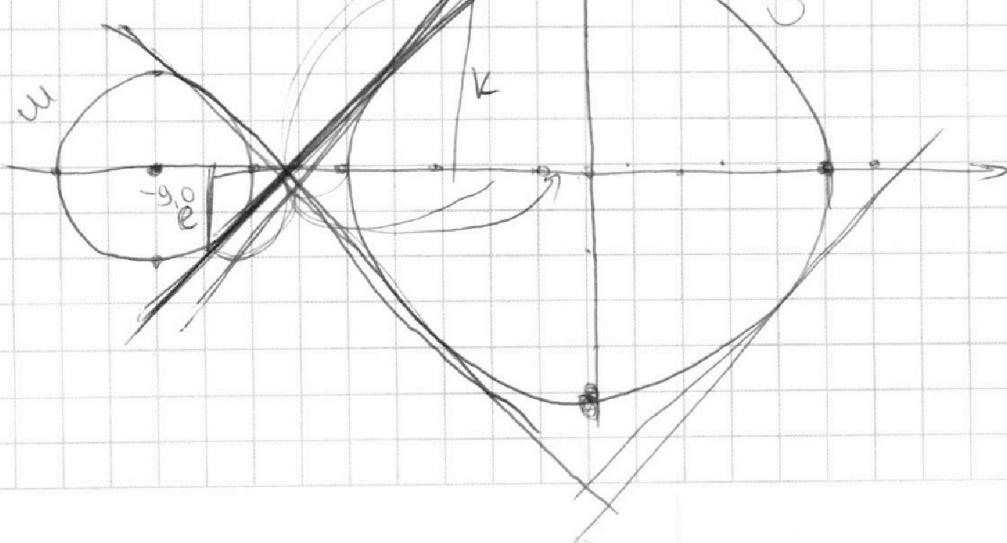
$$y = \frac{5x - 6}{-6a}$$

ищем возможные  
 $y > 0$

$$5x + 6ay - b = 0$$

$$m = -\frac{5}{6a}$$

$$\frac{5x - b}{-6a} = y$$



$$\frac{b}{6a} = \frac{5}{6a}$$

$$-\frac{5}{6a}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\log_{11} x - 6 \log_{11} 11 = \log_{11} x^{-2} - 5$$

$$\left(\frac{1}{\log_{11} x}\right)^4 - 6 \log_{11} 11 = -\frac{2}{3} \log_{11} x - 5$$

$$x > 0, x \neq 1$$

$$\log_{11} x = \frac{1}{\log_{11} x}$$

$$\log_{11} x = a$$

$$a^{-4} - 6a = -\frac{2}{3}a - 5 \quad | \cdot a^4 \cdot 3$$

$a \neq 0$ , (тк  
тогда  
слева 0,  
справа -5)

$$3 - 18a^5 = -2a^5 - 15a^4$$

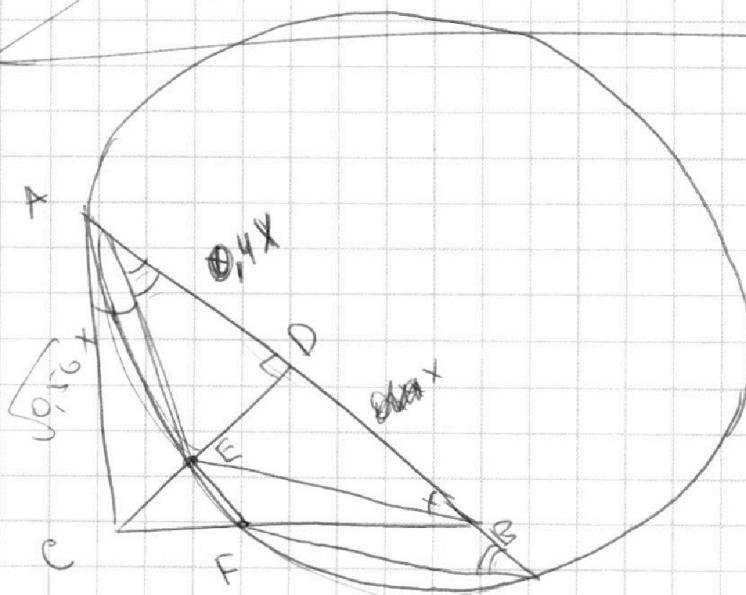
$$16a^5 - 15a^4 - 3 = 0$$

$$AB \parallel EF$$

$$\frac{AB}{BD} = 1,4$$

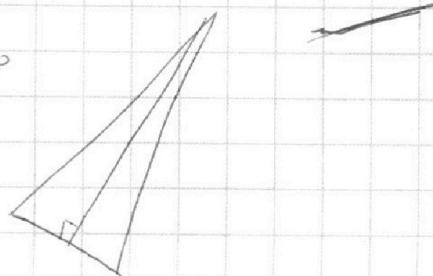
$$0,4x \cdot x = 0,4x^2$$

$$\frac{CD}{DB} = \frac{AD}{CD}$$



$$CD = \sqrt{0,4x}$$

$$0,4x^2 \times 0,4x^2 = 0,16x^2$$



На одной странице можно оформлять **ТОЛЬКО** одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

1 2 3 4 5 6 7

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_{11} 11 = \log_{11}^3 11^{-2} \Rightarrow 5$$

$$\log_{11}^4 x - \frac{6}{\log_{11} x} = -\frac{2}{3} \circ \frac{10}{\log_{11} x} - 5$$

$$\begin{cases} \log_{11} x = 10 \\ 10 \circ x = 11 \end{cases}$$

$$3 \log_{11}^5 x - 18 = -2 - 15 \log_{11} x \quad x^3 a =$$

$$\underline{3 \log_{11}^5 x + 15 \log_{11} x = 16 = 0.}$$

$$11^{\frac{1}{3}} = x \quad \sqrt[3]{11}$$

0,5

$$\log_{11} x = \log_{11} 11 = 1$$

$$\log_{11}^3 11^{-2}$$

$$\log_{11}^3 8 = \frac{1}{3} \log_{11}^8 = \frac{3}{3} = 1$$

$$(a^3)^e = b$$

(e).

$$a^{3e} = b$$

re.

$$\log_{11}^4 (0,5y) + \log_{11} 11 = \log_{11}^3 11^{-13} - 5$$

$$0,5y = 1$$

$$0,5y > 0$$

$$y > 0.$$

$$3 \log_{11}^5 (0,5y) + 3 = -13 - 15 \log_{11} x = 20$$

$$3 \log_{11}^5 (0,5y) + 15 \log_{11} (0,5y) + 16 = 0$$

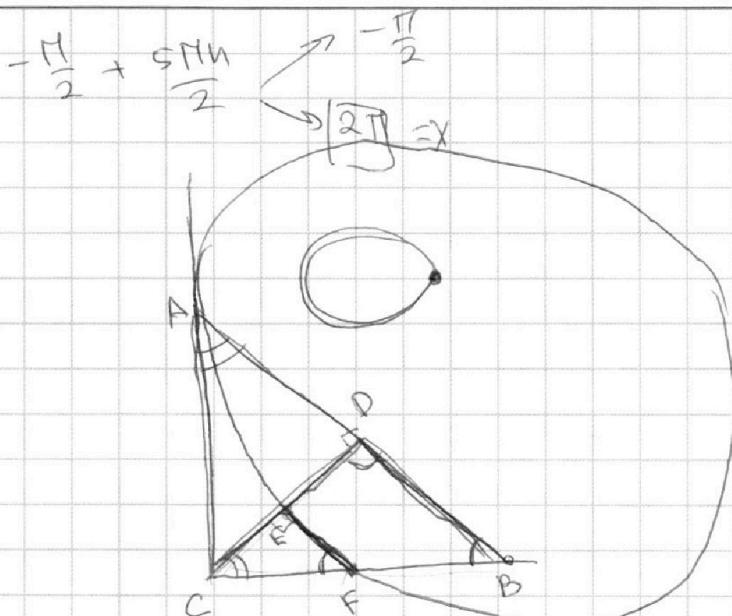
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$AB \parallel EF$$

$$\frac{AB}{BD} = 1,4$$

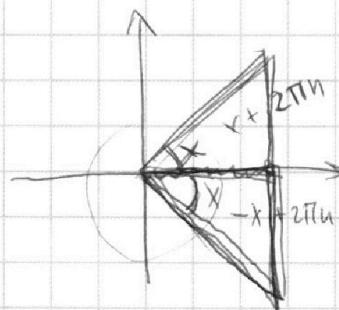
$$\frac{ACD}{CEF}$$

$$\textcircled{1}. \neq 5\pi.$$

$$x+2\pi n$$
  
$$-x+2\pi n$$

$$10 \arccos$$

$$\arccos \cos x$$



$$10 \arccos(\cos x) = 9\pi - 2x$$

z

$$10 \arccos(\cos x) = 9\pi - 2x$$

$$0 \leq \frac{\pi}{2} - x + 2\pi n \leq \pi$$

$$10 \left( \frac{\pi}{2} - x + 2\pi n \right) = 9\pi - 2x$$

$$5\pi - 10x + 20\pi n = 9\pi - 2x$$

$$-4\pi + 20\pi n = 8x$$

$$-\frac{\pi}{2} + \frac{20\pi n}{8} = x$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



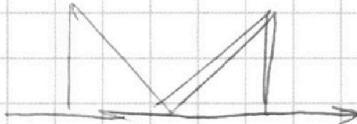
- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> |

МФТИ

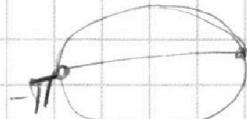
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sin x =$$

$$\arccos$$



$$\sin(-\frac{\pi}{2}) = -1$$



$$\arccos(-1)$$

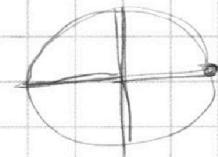
$$x = -\frac{\pi}{2}$$

$$y = -\frac{\pi}{2}$$

$$10 \arccos(\cos(\frac{\pi}{2} - x)) = 9\pi - 2x$$

$$\pi \times 2\pi$$

$$10 \arccos(\cos(\frac{\pi}{2} - x)) = 9\pi + \pi = 10\pi$$



$$10\pi = 10\pi$$

$$-\frac{\pi}{2} + \frac{9\pi}{2} = \frac{4\pi}{2} = 2\pi$$

$$\sin 2\pi = 0$$

$$\arccos 0 = 10 \frac{\pi}{2} = 9\pi \neq 2\pi$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

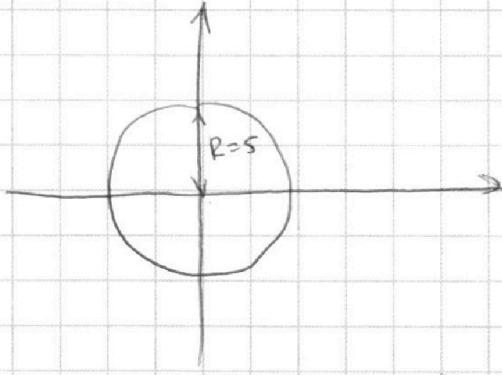
Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> |

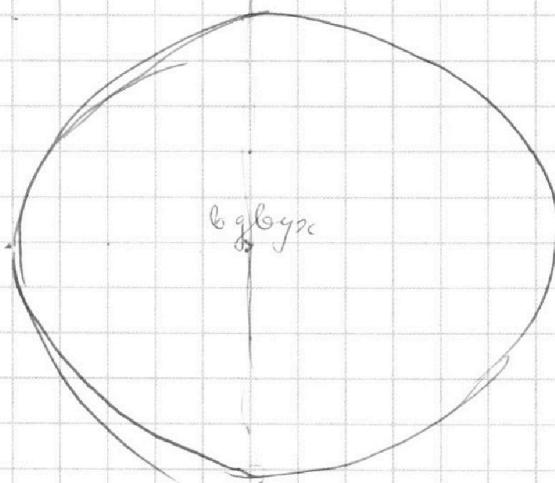
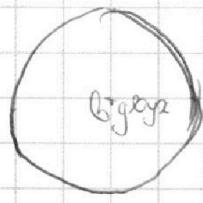
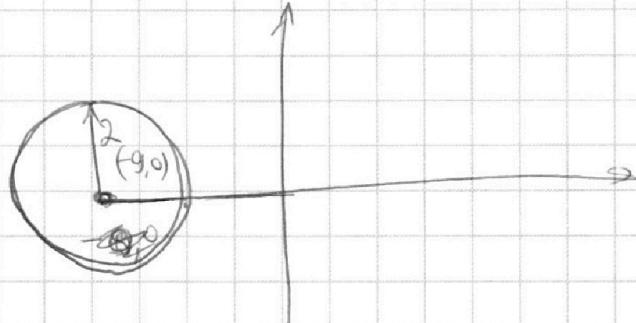
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 + y^2 = 25$$



$$x^2 + (y+9)^2 = 4$$



$$5x + 6ay = b = 0$$

$$5x - 6ay = b = 0$$

$$y = \frac{5x - b}{6a} = \left(\frac{5}{6a}\right)x - \frac{b}{6a}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> |

**МФТИ.**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\deg(a+b) \geq 6$$

$$Q, 4$$

$$-1 \leq \sin \leq *$$

$$\deg(b+c) \geq 14$$

arccos - это угол

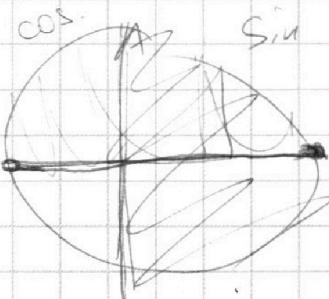
$$\deg(a+c) \geq 16$$

$$-\pi \leq \arccos \leq \pi$$

$$(a+b+c) \geq 18$$

$$\sin x = \cos \frac{\pi}{2} - x$$

$$10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$$



$$10 \arccos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 9\pi - 2x$$

$$10\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 9\pi - 2x$$

$$5\pi - 10x = 9\pi - 2x$$

$$10\pi$$

$$-4\pi = 8x$$

$$\sin \frac{\pi}{2}$$

$$x = -\frac{\pi}{2}$$

$$x \neq 1 \quad x > 0$$

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_{11} 11 = \log_{11} \frac{1}{11} - 5$$

$$\log_{11} x \cdot \log_{11} 11 = 5$$

$$\left(\frac{1}{\log_{11} 11}\right)^4 - 6 \log_{11} 11 = \log_{11}^{-2} - 5$$

$$\log_{11} 11 = a$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

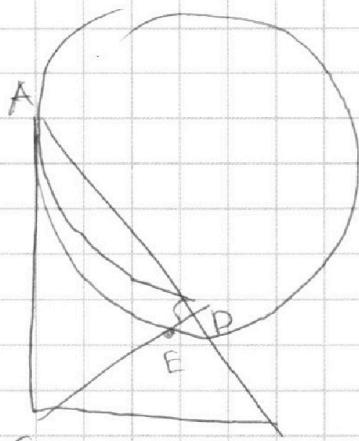
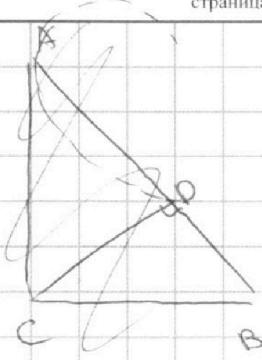
Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



- 1  2  3  4  5  6  7

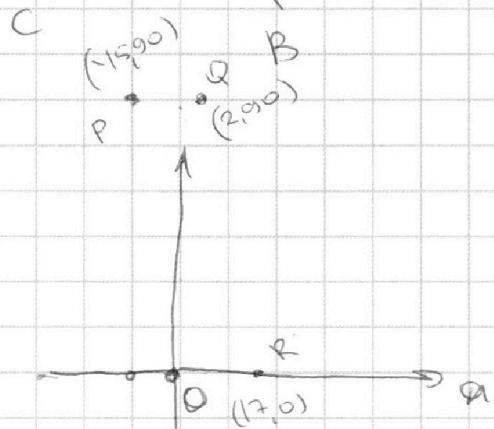
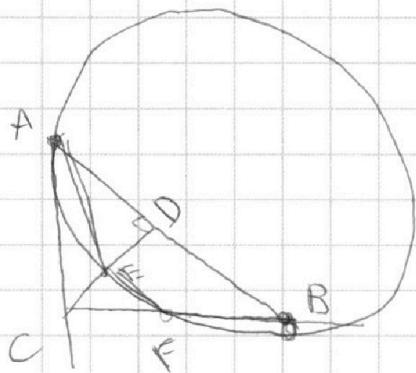
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$a + c \quad lg$$

$$a + c + 26 > 73$$



$$y = 0.90$$

$$x = 2 - 17$$

$$h = 90$$

$$\Delta K = \text{max} \{ k \}$$

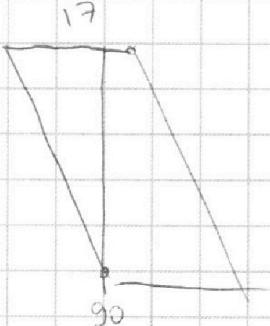
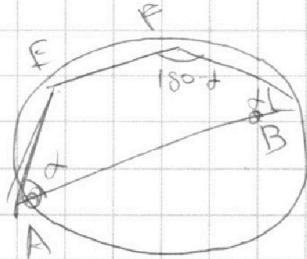
~~100% 2~~

$$-90 \leq y \leq 90$$

~~Δ \*~~

$$\begin{aligned} a^5 &= 1 \\ a^6 &= 1 \\ a^{12} &= 1 \\ 18 &= 1 \\ 3 &= 1 \\ 3 - 5a &= 0 \\ 0 &\neq 0 \end{aligned}$$

$$3a^5 - 5a + 16 = 0$$



90

—

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$n = -2$$

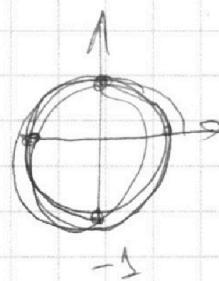
$$n = -1$$

$$n = 0$$

$$n = 1$$

$$V = \frac{14\pi}{12} - \frac{20\pi n}{12}$$

$$n = -2 \times \frac{14\pi}{12} + \frac{40\pi}{12} = \frac{54}{12} = \frac{9}{2}\pi$$



$$10(-\pi) =$$

$$9\pi - \frac{7\pi}{6} \cdot 2 = 9\pi - \cancel{7\pi} \cancel{\frac{2}{6}}$$

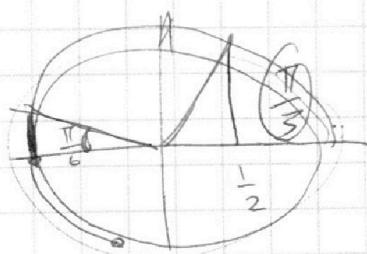
$$2\pi\pi - 7\pi = 20.$$

$$\text{Решение}$$

$$x = \frac{17\pi}{6}$$

$$9\pi - 2 \cdot \frac{17\pi}{6} =$$

$$\frac{2\pi\pi - 17\pi}{3} = \frac{10\pi}{3}.$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

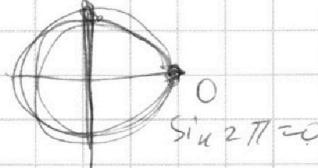


- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$9\pi - 2 \cdot \frac{9\pi}{2} = 0$$



$$\arccos \left( \sin \frac{9\pi}{2} \right)$$

$$\arccos 1$$

$$9\pi - 2\pi = \boxed{5\pi}$$



$$9\pi - 2 \cdot 3\pi = \boxed{15\pi}$$

1,50

$$n = -2 \quad x =$$

$$\sin 2\pi$$

$$\frac{\pi}{2}$$

$$\frac{4\pi}{6} + \frac{10\pi}{3}$$

$$-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$$

$$-\frac{\pi}{2} - 2,5\pi = \boxed{-3\pi}$$

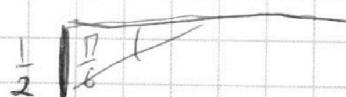
$$x = \frac{14\pi}{12} - \frac{20\pi n}{12} = \boxed{\frac{14\pi}{12}}$$

$$\frac{7\pi}{6} - \frac{5\pi n}{3}$$



$$\frac{2\pi}{3} \cdot 10 = \boxed{\frac{20\pi}{3}}$$

$$\sin \left( \frac{4\pi}{6} \right)$$



$$9n - \frac{4\pi}{6} = 27$$

L

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

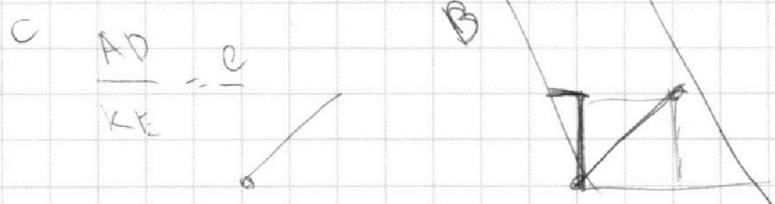
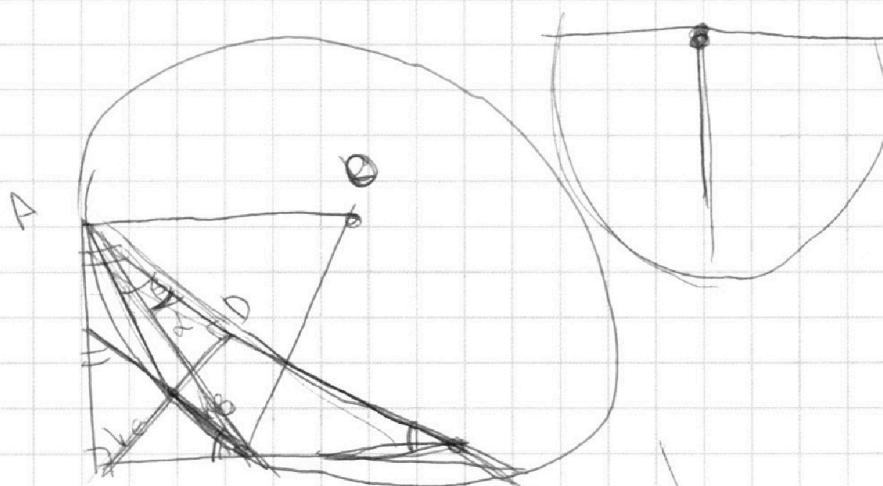
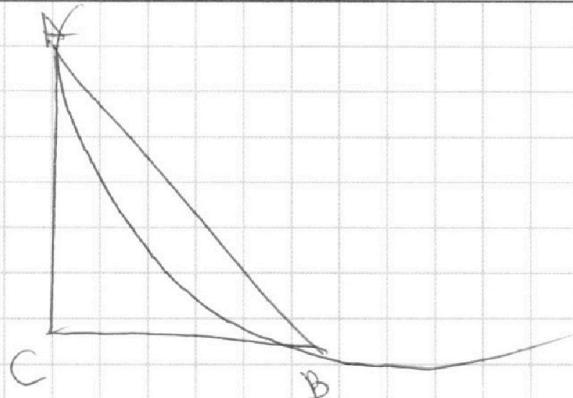
5

6

7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

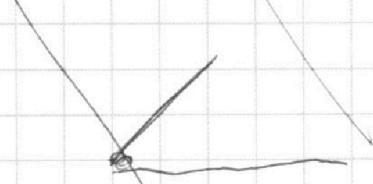
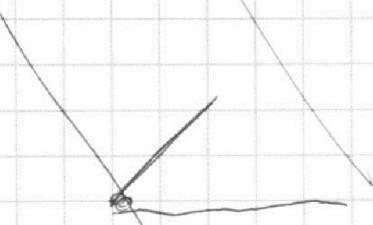


a, b)



?

a, b)



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

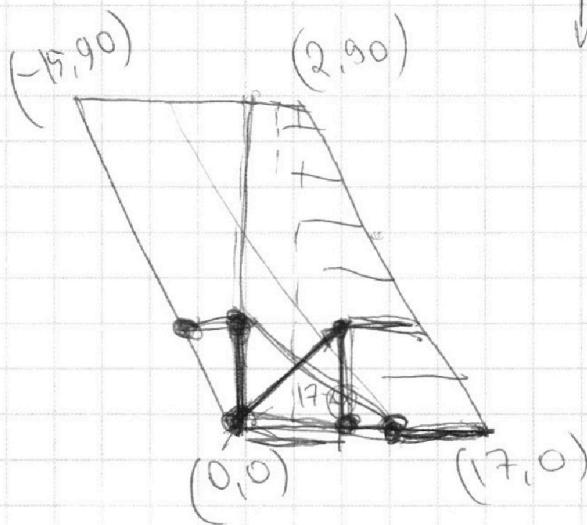
- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> |

**МФТИ.**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

1345

2,6,7

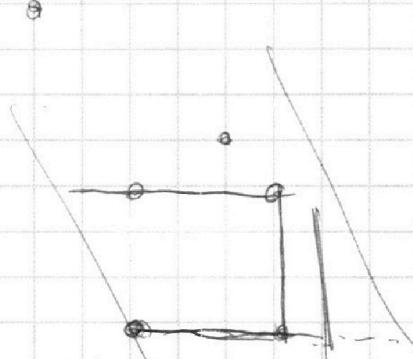


-17

17

$$\max 17 \quad \max 90$$
$$6(x_1 - x_2) + (y_2 - y_1) = 48$$

где такой сумма





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

5

6

7

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!