



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ



11 КЛАСС. Вариант 1

- [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^9 3^{10} 5^{10}$, bc делится на $2^{14} 3^{13} 5^{13}$, ac делится на $2^{19} 3^{18} 5^{30}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
- [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой BC в точке B , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке F , а катет AC – в точке E . Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 3 : 1$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF .
- [4 балла] Решите уравнение $5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$.
- [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

- [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2}(3^{11}) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

- [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-14; 42)$, $Q(6; 42)$ и $R(20; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$.
- [6 баллов] Данна треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 90, $SA = BC = 12$.
 - Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1 .
 - Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$$51 \min(a \cdot b \cdot c) = ?$$

$$a \cdot b : 2^9 \cdot 3^9 \cdot 5^{10} \quad b \cdot c : 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^8 \quad a \cdot c : 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30}$$

~~Если a=2^9 \cdot 3^9 \cdot 5^{10}, то b=2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^8
и в таком случае a \cdot b \cdot c = 2^{33} \cdot 3^{32} \cdot 5^{38}~~

~~a: 2^8, то b: 2^6, то c: 2^{13} \Rightarrow a \cdot b \cdot c : 2^{22}~~
~~Если a: 2^7 \cdot 3^7, то b: 2^8 \cdot 3^2, то c: 2^2 \Rightarrow a \cdot b \cdot c : 2^{22}~~

~~a: 2^6, то b: 2^4, то c: 2^{13} \Rightarrow a \cdot b \cdot c : 2^{23}~~
~~2^{22} - min~~

Минимум: $2^{22} \cdot 3^{21} \cdot 5^{26}$

Если $a: 3^8$, то $b: 3^2$, то $c: 3^1$ $a \cdot b \cdot c: 3^{21}$
 $a: 3^7$,

$$2^{22} \cdot 3^{21} \cdot 5^{26}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

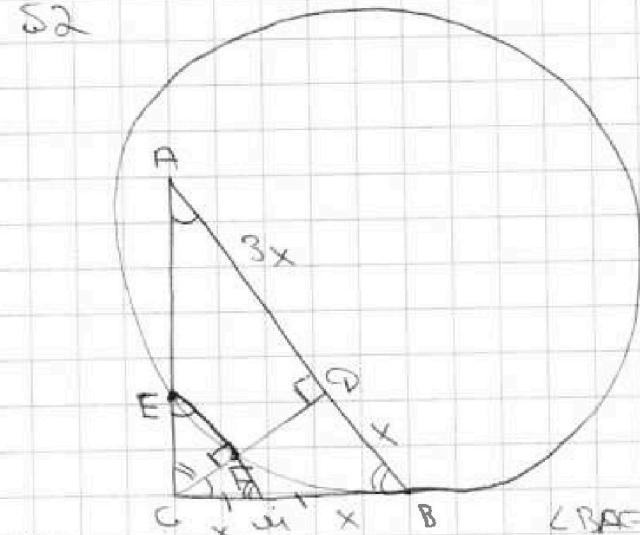


- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

S2



EF пересекает BC в точке M. $\angle SEM \parallel AB$

$$\sin \angle PCB = \sin \angle MEC = \frac{EM}{CM} = \frac{CM}{EM} \Rightarrow CM^2 = EM \cdot EM \\ BM^2 = EM \cdot EM \text{ (как и сер.)}$$

$$\frac{AE}{CE} = \frac{CM}{EM} = \frac{1}{1} \text{ (против)} \Rightarrow AE = CE = \frac{PC}{2} = \sqrt{3}x$$

$$= \frac{BC}{2} = x$$

$$\frac{PF}{FE} = \frac{CF}{FB} = \frac{CM}{MB} = \frac{1}{1} \text{ (против)} \Rightarrow CF = FB = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}x}{2}$$

$$\triangle CEF \sim \triangle CAB \text{ (по 2 углам)} \quad k = \frac{1}{2} \Rightarrow EF = \frac{1}{2} PC = \frac{3}{2}x$$

$$S_{CEF} = \frac{1}{2} CF \cdot EF = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}x}{2} \cdot \frac{3x}{2} = \frac{3\sqrt{3}x^2}{8}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot PC \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3}x \cdot 2x = 2\sqrt{3}x^2$$

$$\frac{S_{CEF}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{3\sqrt{3}x^2}{8}}{2\sqrt{3}x^2} = \frac{1}{3}$$

$$\text{Ответ: } \frac{16}{3}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

 1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

53

$$5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$-\frac{5\pi}{2} \leq 5 \arcsin(\cos x) \leq \frac{5\pi}{2} \Rightarrow -\frac{5\pi}{2} \leq x + \frac{\pi}{2} \leq \frac{5\pi}{2}$$

$$-3\pi \leq x \leq 3\pi$$

$$\sin(5 \arcsin(\cos x)) = \sin(x + \frac{\pi}{2})$$

$$16 \sin^5(\arcsin(\cos x)) - 14 \sin^3(\arcsin(\cos x)) - \sin(\arcsin(\cos x)) = \sin(x + \frac{\pi}{2})$$

$$16 \cos^5 x - 14 \cos^3 x - \cos x = \cos x$$

$$8 \cos^5 x - 7 \cos^3 x - \cos x = 0$$

$$\cos x (\cos x - 1)(\cos x + 1)(8 \cos^2 x + 1) = 0$$

\emptyset

$$\cos x = 0$$

$$x = \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbb{Z}$$

$$\cos x = 1$$

$$x = 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$$

$$\cos x = -1$$

$$x = \pi + 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$$

Учитывая ограничение, $x = \pm 3\pi, \pm \frac{5\pi}{2}, \pm 2\pi + \frac{3\pi}{2}, \pm \pi, \pm \frac{\pi}{2}, 0$

Ответ: $\pm 3\pi, \pm \frac{5\pi}{2}, \pm 2\pi, \pm \frac{3\pi}{2}, \pm \pi, \pm \frac{\pi}{2}, 0$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

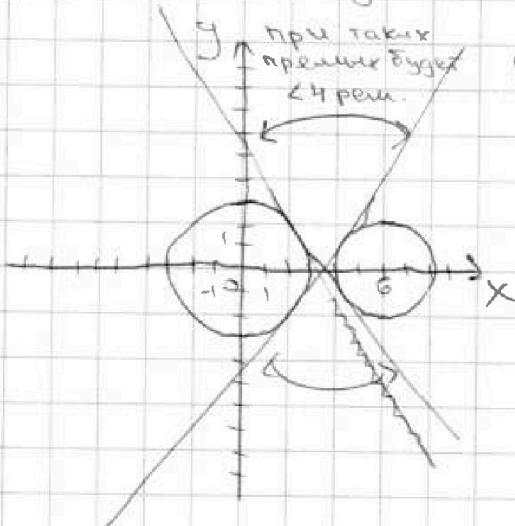
- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

54

$$\begin{cases} 5\alpha k + 2y - 3\beta = 0 \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \\ x^2 + y^2 = 3^2 \quad (x-6)^2 + y^2 = 2^2 \end{cases}$$



Нужно найти общие касательные к прямым между собой
при всех ^{из 10 видов} возможных
координатах будет 24 реш.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$55 \quad 0 > 3 \times > 0, y > 0, x + 6 \log_3 x = 3 \quad y \neq \pm \frac{1}{5}$$

$$\log_3^4 x + 6 \log_3 x = \log_3 243 - 3 \quad (\log_3^4(5y) + 2 \log_3 3 = \log_3(3^6) - 8)$$
$$3 = \log_{x^2} 243 - \log_3^4 x - 6 \log_3 x \quad y = \log_{5y^2} (3^6) - \log_3^4(5y) - 2 \log_3 3$$

$$\begin{aligned} & \cancel{\log_3^4 x + 6 \log_3 x} \\ & 2 \log_3 x + \cancel{\log_3 x} \end{aligned}$$

$$\log_3^4 x + \frac{6}{\log_3 x} - \frac{5}{2 \log_3 x} + 8 = 0 \quad \log_3 x \log_3^4(5y) + \frac{2}{\log_3(5y)} - \frac{11}{2 \log_3(5y)} \log_3(5y)$$
$$\log_3^5 x + 8 \log_3 x + 3,5 = 0 \quad \log_3^5(5y) + 8 \log_3(5y) - 3,5 = 0 + 8 = 0$$
$$\log_3^2 x \quad (\log_3^5 x + \log_3^3(5y) + 8(\log_3 x + \log_3(5y)) = 0)$$
$$(\log_3(5xy)(\log_3^4 x - \log_3^3 x \log_3 5y + \log_3^2 x \log_3^2 5y - \log_3 x \log_3^3 5y + \log_3^4 5y) + 8 \log_3(5xy) = 0)$$
$$\log_3(5xy)(\dots + 8) = 0$$

$$\begin{aligned} 5xy &= 1 \\ xy &= \frac{1}{5} \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } \frac{1}{5}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

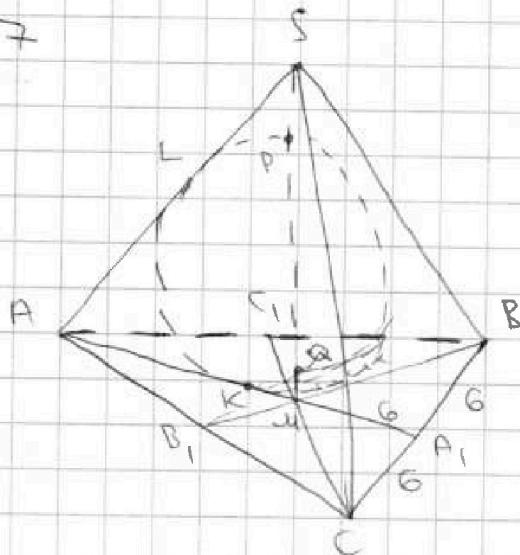
- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|

МФТИ

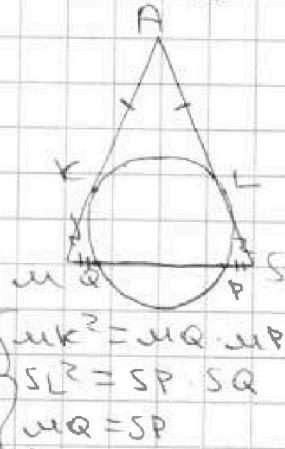


Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

57



$$SP = \text{диагональ } S_{ABC} = 90 \quad SA = BC = 12$$



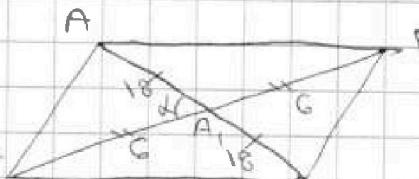
$$\begin{cases} \text{диагональ } S_{ABC}^2 = \text{диагональ } S_{APC} \cdot \text{диагональ } S_{BPC} \\ \text{диагональ } S_{APC}^2 = SP \cdot SQ \end{cases} \Rightarrow \text{диагональ } S_{APC} = SL \Rightarrow \text{диагональ } S_{APC} = SP$$

$$\left. \begin{array}{l} AK = AL (\text{радиусы}) \\ \text{диагональ } S_{APC} = SL \end{array} \right\} \Rightarrow \text{диагональ } S_{APC} = AS = 12 = BC \Rightarrow \text{диагональ } AP_1 = 6 \Rightarrow AA_1 = 18$$

Углубление решения AA_1 :

$$S_{AP_1B_1C} = 2S_{APC} = 180 = \frac{1}{2} AA_1 \cdot BC \cdot \sin d$$

$$\sin d = \frac{\sqrt{18 \cdot 12}}{6} = \frac{\sqrt{18 \cdot 12}}{6} = \frac{\sqrt{18}}{2}$$



$$\cos d = \sqrt{1 - \frac{28}{36}} = \frac{\sqrt{14}}{6}$$

$$T \cos \text{угол } A_1 \text{ и } C: \text{диагональ } S_{APC}^2 = 36 + 36 - 2 \cdot 6 \cdot 6 \cdot \cos d = 72 - 12\sqrt{14} = 4(18 - 3\sqrt{14})$$

$$\text{диагональ } S_{AP_1B_1C} = 2\sqrt{18 - 3\sqrt{14}} \quad \cos \angle AA_1B_1 = \cos(\pi - d) = -\cos d = -\frac{\sqrt{14}}{6} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow CC_1 = 3\sqrt{18 - 3\sqrt{14}} \quad \Rightarrow \text{диагональ } S_{AP_1B_1C} = 2\sqrt{18 + 3\sqrt{14}}$$

$$AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = 162 \cdot \sqrt{324 - 99} = 162 \cdot 15 = 2430$$

Ответ: 2430

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



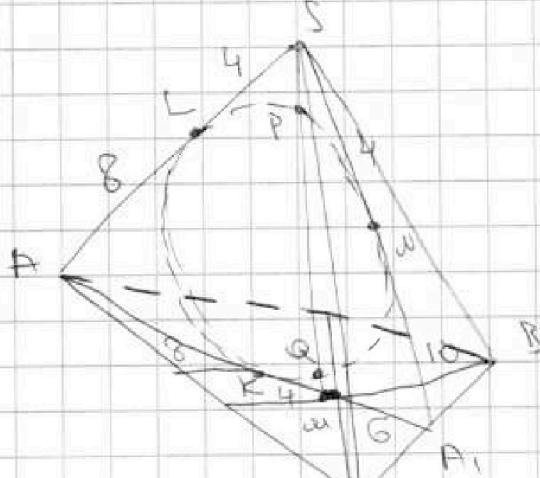
- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

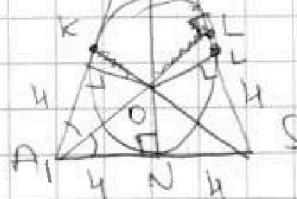
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned}
 AC^2 &= 36 + 36 - 2 \cdot 6 \cdot 6 \cdot \frac{\sqrt{11}}{7} = 72 - 12\sqrt{11} = 12(6 - \sqrt{11}) \\
 AC &= 2\sqrt{18 - 3\sqrt{11}}, \quad CC_1 = 3\sqrt{18 - 3\sqrt{11}} \quad 4(18 - 3\sqrt{11}) \\
 AB &= 2\sqrt{18 + 3\sqrt{11}}, \quad BB_1 = 3\sqrt{18 + 3\sqrt{11}} \quad \times 18 \\
 AA_1 &= 18 \\
 AA_1, BB_1, CC_1 &= 162\sqrt{324 - 99} = 162\sqrt{162 - 99} = 162\sqrt{63} = 162 \cdot 3\sqrt{7} \\
 &= 486\sqrt{7} \quad (7) \text{ (a)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r}
 324 \\
 - 99 \\
 \hline
 225 \\
 - 15 \\
 \hline
 225 \\
 \end{array}
 \quad \begin{array}{r}
 \times 15 \\
 15 \\
 \hline
 810 \\
 - 162 \\
 \hline
 2430
 \end{array}$$



$$AN = \sqrt{144 - 16} = \sqrt{128} = 8\sqrt{2}$$



$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 9 = ax + 2y - 3b \\ x^2 + y^2 - 12x + 32 = ax + 2y - 3b \end{cases}$$

$$8x - 41 = 0$$

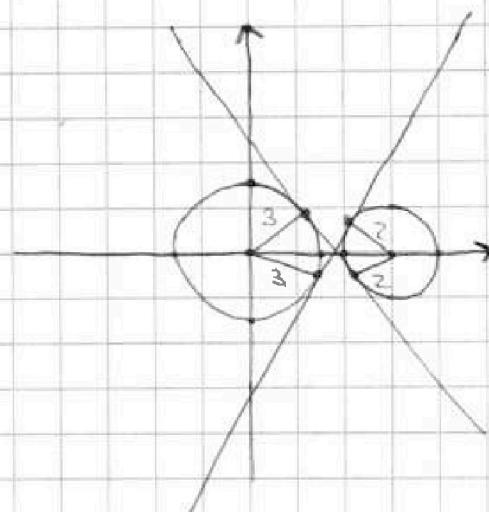
$$x = \frac{41}{8} = 3\frac{5}{8}$$

$$a^8 c^{11} b^3$$

$$a^7 c^{12} b^{33}$$

$$a^6 c^{13} b^{34}$$

$$a^5$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\log_3(5y) + \log_3(x) + 8(\log_3(5y) + \log_3(x)) = 0$$

$$x^5 + y^5 = (x+y)(x^4 - xy^3 + x^2y^2 - y^4x + y^4)$$

Компактно
записано

$$\begin{array}{r} y^3x^2 - x^4y \\ (-x^3y^2 - x^4y) \\ \hline x^3y^2 + y^3x^2 \end{array}$$

$x+y$

$-x^3y + x^2y^2$

$x^4 + y^4$

$x^4 + x^2y$

$y^4 - x^3y$

$y^4 + y^3x$

$y^3x^2 - y^4x$

$(-x^3y - y^3x)$

$(-x^3y - y^3x)$

$y^3x^2 - y^4x$

$(-x^3y - y^3x)$ </

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

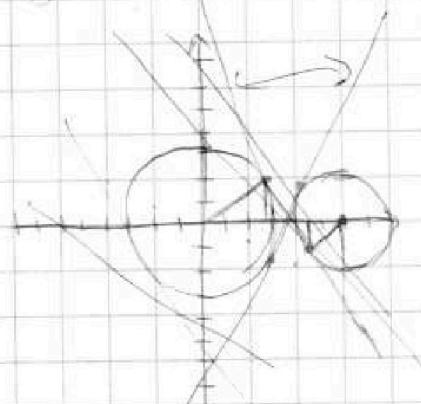


- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

4) $\begin{cases} ax + 2y - 38 = 0 & y = -\frac{a}{2}x + \frac{38}{2} \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \\ x^2 + y^2 = 9 & (x - 6)^2 + y^2 = 32 \end{cases}$



при $a=0$ $-2 < \frac{3}{2}B < 2$

$$-4 < 38 < 4$$

$$-\frac{4}{3} < B < \frac{4}{3}$$

$$x^2 + y^2 - 9 = x^2 + y^2 - 12x + 32 = a \cdot xy$$

$$12x = 41$$

$$x = \frac{41}{12}$$

5) $\log_{\frac{1}{3}} x + 6 \log_3 x = \log_{\frac{1}{3}} 243 - 8$

$0 < 3^{-x} > 0 \quad x \neq 1 \quad y > 0 \quad y \neq 1$

$$\log_{\frac{1}{3}} x + \frac{6}{\log_3 x} = \frac{1}{2 \log_3 x} - 8$$

$$\log_3 x = t \quad \frac{6}{t} = \frac{1}{2t} - 8$$

$$t^5 + 8t^4 + 8t^3 - \frac{5}{2} = 0$$

$$t^5 + 8t^4 + 8t^3 = 0$$

$$2t^5 + 16t^4 + 16t^3 = 0$$

$$2t = -2t^4 - 16t^3$$

$$-2t^5 - 16t^4 = 8t^4 + 16t^3$$

$$-2 \log_3 x - 16 \log_3 x = 2 \log_3(5y) + 16 \log_3(5y)$$

$$\log_3(5y) + \log_3 x + 8(\log_3 x + \log_3(5y)) = 0$$

$$8 \log_3(5y) = 0$$

$$FB \parallel EF, \frac{FB}{EF} = \frac{3}{1}, CB^2 = 3 \times 2 \quad CD = \sqrt{3}x$$

$$\frac{FB}{CE} = \frac{3}{4x}, \frac{FB}{CE} = \frac{1}{2} \cdot 4x \cdot \sqrt{3}x = 2\sqrt{3}x^2$$

$$S_{ACD} = \frac{1}{2} \cdot 3x \cdot \sqrt{3}x = \frac{3\sqrt{3}x^2}{2}$$

$$AB^2 = FM \cdot FN$$

