



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^9 3^{10} 5^{10}$ ,  $bc$  делится на  $2^{14} 3^{13} 5^{13}$ ,  $ac$  делится на  $2^{19} 3^{18} 5^{30}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник  $ABC$ . Окружность, касающаяся прямой  $BC$  в точке  $B$ , пересекает высоту  $CD$ , проведённую к гипотенузе, в точке  $F$ , а катет  $AC$  – в точке  $E$ . Известно, что  $AB \parallel EF$ ,  $AD : DB = 3 : 1$ . Найдите отношение площади треугольника  $ABC$  к площади треугольника  $CEF$ .

3. [4 балла] Решите уравнение  $5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$ .

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа  $x$  и  $y$  удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2} (3^{11}) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения  $xy$ .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0; 0)$ ,  $P(-14; 42)$ ,  $Q(6; 42)$  и  $R(20; 0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$ .

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида  $SABC$ , медианы  $AA_1, BB_1$  и  $CC_1$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $M$ . Сфера  $\Omega$  касается ребра  $AS$  в точке  $L$  и касается плоскости основания пирамиды в точке  $K$ , лежащей на отрезке  $AM$ . Сфера  $\Omega$  пересекает отрезок  $SM$  в точках  $P$  и  $Q$ . Известно, что  $SP = MQ$ , площадь треугольника  $ABC$  равна 90,  $SA = BC = 12$ .

а) Найдите произведение длин медиан  $AA_1, BB_1$  и  $CC_1$ .

б) Найдите двугранный угол при ребре  $BC$  пирамиды, если дополнительно известно, что  $\Omega$  касается грани  $BCS$  в точке  $N$ ,  $SN = 4$ , а радиус сферы  $\Omega$  равен 5.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\text{51 } \min(a \cdot b \cdot c) = ?$$

$$a \cdot b : 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10} \quad b \cdot c : 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13} \quad a \cdot c : 2^{19} \cdot 3^{16} \cdot 5^{20}$$

$$\text{Если } a = 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10}, \text{ то } c = 2^{10} \cdot 3^6 \cdot 5^{10}, \text{ то } b = 2^4 \cdot 3^7 \cdot 5^3$$

$$a \cdot b \cdot c = 2^{23} \cdot 3^{23} \cdot 5^{23}$$

$$\text{Если } a : 2^8, \text{ то } b : 2^{11}, \text{ то } c : 2^{13} \Rightarrow a \cdot b \cdot c : 2^{32}$$

$$\text{Если } a : 2^7, \text{ то } b : 2^{12}, \text{ то } c : 2^{13} \Rightarrow a \cdot b \cdot c : 2^{32}$$

$$\text{Если } a : 2^6, \text{ то } b : 2^{13}, \text{ то } c : 2^{13} \Rightarrow a \cdot b \cdot c : 2^{32}$$

$2^{22}$  - min

$$\text{Минимум: } 2^{22}$$

$$\text{Если } a : 3^8, \text{ то } b : 3^2, \text{ то } c : 3^{11} \quad a \cdot b \cdot c : 3^{21}$$

$$a : 3^7,$$

$$2^{22} \cdot 3^{21} \cdot 5^{23}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

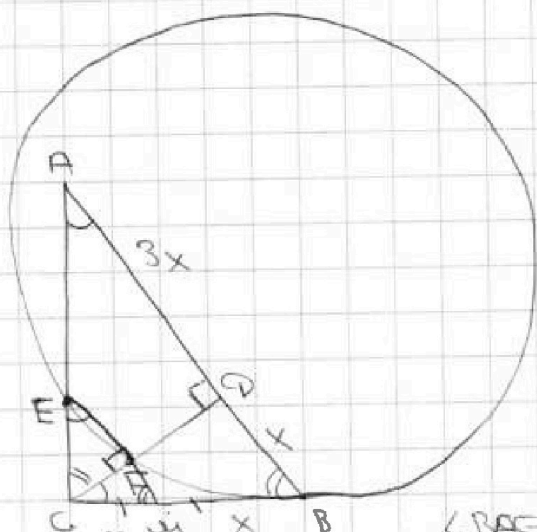
1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



52



$$AB \parallel EF \quad \frac{AF}{FB} = \frac{3}{1} = \frac{3x}{x}$$

$$\frac{S_{ABC}}{S_{CEF}} = ?$$

$$CF^2 = AF \cdot FB = 3x \cdot x = 3x^2$$

$$CF = \sqrt{3}x$$

По т. Пиф. в  $\triangle CFB$ :

$$CB = \sqrt{3x^2 + x^2} = 2x$$

По т. Пиф. в  $\triangle ABC$ :

$$AC = \sqrt{16x^2 - 4x^2} = 2\sqrt{3}x$$

$$\sin \angle BAC = \frac{BC}{AB} = \frac{2x}{4x} = \frac{1}{2}$$

EF перпен. BC в т. M  $\Rightarrow EM \parallel AB$

$$\left. \begin{aligned} \angle BAC &= 90^\circ - \angle ABC \\ \angle FCB &= 90^\circ - \angle ABC \end{aligned} \right\} \angle BAC = \angle FCB \Rightarrow \angle FCB = \angle MEC$$

~~Стор.  $\triangle ABC$~~

$$\sin \angle FCB = \sin \angle MEC = \frac{FM}{CM} = \frac{CM}{EM} \Rightarrow CM^2 = FM \cdot EM$$

$$BM^2 = EM \cdot FM \text{ (кас. и сек.)}$$

$$BM = CM$$

$$\triangle AEF \sim \triangle CEF \Rightarrow \frac{AE}{CE} = \frac{CF}{FM} = 1 \Rightarrow AE = CE = \frac{AC}{2} = \sqrt{3}x$$

$$= \frac{BC}{2} = x$$

$$\frac{CF}{FM} = \frac{CM}{MB} = 1 \text{ (прямая)} \Rightarrow CF = FM = \frac{1}{2} = \frac{CF}{2} = \frac{\sqrt{3}x}{2}$$

$$\triangle CEF \sim \triangle CAF \text{ (по 2 угла)} \quad k = \frac{1}{2} \Rightarrow EF = \frac{1}{2} AF = \frac{3}{2}x$$

$$S_{CEF} = \frac{1}{2} CF \cdot EF = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}x}{2} \cdot \frac{3x}{2} = \frac{3\sqrt{3}x^2}{8}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3}x \cdot 2x = 2\sqrt{3}x^2$$

$$\frac{S_{CEF}}{S_{ABC}} = \frac{2\sqrt{3}x^2 \cdot \frac{3}{8}}{2\sqrt{3}x^2} = \frac{3}{8}$$

Ответ:  $\frac{16}{3}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Σ3

$$5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$-\frac{5\pi}{2} \leq 5 \arcsin(\cos x) \leq \frac{5\pi}{2} \Rightarrow -\frac{5\pi}{2} \leq x + \frac{\pi}{2} \leq \frac{5\pi}{2}$$

$$-3\pi \leq x \leq 3\pi$$

$$\sin(5 \arcsin(\cos x)) = \sin(x + \frac{\pi}{2})$$

$$16 \sin^5(\arcsin(\cos x)) - 14 \sin^3(\arcsin(\cos x)) - \sin(\arcsin(\cos x)) = \sin(x + \frac{\pi}{2})$$

$$16 \cos^5 x - 14 \cos^3 x - \cos x = \cos x$$

$$8 \cos^5 x - 7 \cos^3 x - \cos x = 0$$

$$\cos x (\cos x - 1)(\cos x + 1)(8 \cos^2 x + 1) = 0$$

$$\cos x = 0$$

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\cos x = 1$$

$$x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\cos x = -1$$

$$x = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Учитывая ограничение,  $x = \pm 3\pi, \pm \frac{5\pi}{2}, \pm 2\pi, \pm \frac{3\pi}{2}, \pm \pi, \pm \frac{\pi}{2}, 0$

Ответ:  $\pm 3\pi, \pm \frac{5\pi}{2}, \pm 2\pi, \pm \frac{3\pi}{2}, \pm \pi, \pm \frac{\pi}{2}, 0$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

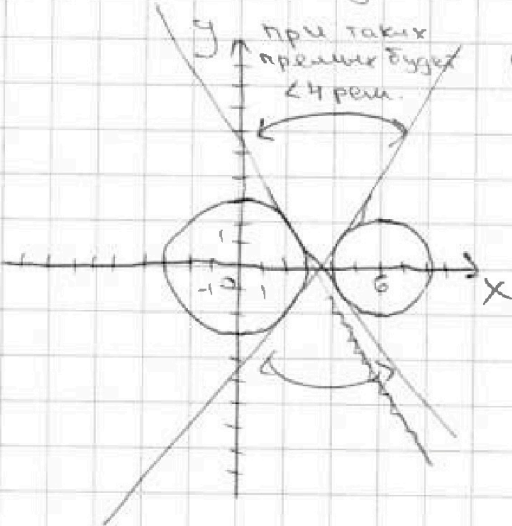
- 1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

54

$$\begin{cases} ax+2y-3z=0 \\ (x^2+y^2-9)(x^2+y^2-12x+32)=0 \\ x^2+y^2=3^2 \quad (x-6)^2+y^2=2^2 \end{cases}$$



Нужно найти общие касан-  
ия и упрямые между ~~плоск~~  
приблиз будет 4 реш.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

МФТИ

- 1  2  3  4  5  6  7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



55 ОДЗ:  $x > 0, y > 0, x \neq 1, y \neq \frac{1}{5}$

$$\log_3^4 x + 6 \log_3 x = \log_3 243 - 8 \quad \log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{5y}(3^2) - 8$$

$$8 = \log_3 243 - \log_3^4 x - 6 \log_3 x \quad 8 = \log_{5y}(3^2) - \log_3^4(5y) - 2 \log_{5y} 3$$

~~$\frac{1}{2} \log_3 x + \frac{6}{2} \log_3 x = \frac{5}{2} \log_3 x$~~

$$\log_3^4 x + \frac{6}{\log_3 x} - \frac{5}{2 \log_3 x} + 8 = 0 \quad \log_3^4(5y) + \frac{2}{\log_3(5y)} - \frac{11}{2 \log_3(5y)} \log_3(5y) + 8 = 0$$

$$\log_3^5 x + 8 \log_3 x + 3,5 = 0 \quad \log_3^5(5y) + 8 \log_3(5y) - 3,5 = 0 + 8 = 0$$

$$\log_3^5 x + \log_3^5(5y) + 8(\log_3 x + \log_3(5y)) = 0$$

$$\log_3(5xy) (\log_3^4 x - \log_3^3 x \log_3 5y + \log_3^2 x \log_3^2 5y - \log_3 x \log_3^3 5y + \log_3^4 5y) + 8 \log_3(5xy) = 0$$

$$\log_3(5xy) (\dots + 8) = 0$$

$$5xy = 1$$

$$xy = \frac{1}{5}$$

Ответ:  $\frac{1}{5}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

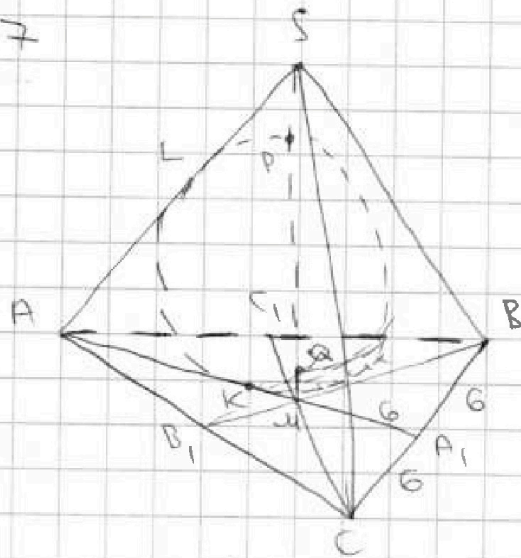
Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

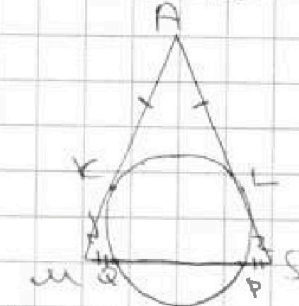
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

57



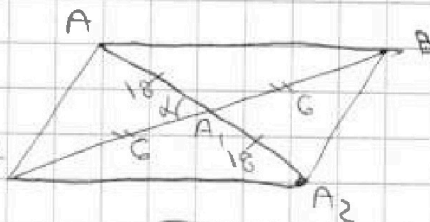
$SP = MQ$   $S_{\text{плоск}} = 90$   $SA = BC = 12$



$\begin{cases} MK^2 = MQ \cdot MP \\ SL^2 = SP \cdot SQ \\ MQ = SP \end{cases} \Rightarrow MK = SL$

$\left. \begin{matrix} AK = AL \text{ (касает)} \\ MK = SL \end{matrix} \right\} \Rightarrow AA_1 = AS = 12 = BC \Rightarrow MA_1 = 6 \Rightarrow AA_1 = 18$

Угловые мерочки  $AA_1$ :



$S_{\text{ABAC}} = 2S_{\text{ABC}} = 180 = \frac{1}{2} AA_1 \cdot BC \cdot \sin \alpha$   
 $\sin \alpha = \frac{180 \cdot 2}{18 \cdot 12 \cdot 6} = \frac{1}{6}$

$\cos \alpha = \sqrt{1 - \frac{1}{36}} = \frac{\sqrt{35}}{6}$

Т. cos гна  $A_1MC$ :  $MC^2 = 36 + 36 - 2 \cdot 6 \cdot 6 \cdot \frac{\sqrt{35}}{6} = 72 - 12\sqrt{35} = 4(18 - 3\sqrt{35})$

$MC = 2\sqrt{18 - 3\sqrt{35}}$   $\cos \angle AA_1B = \cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha = -\frac{\sqrt{35}}{6} \Rightarrow$   
 $\Rightarrow CC_1 = 3\sqrt{18 - 3\sqrt{35}}$   $\Rightarrow$  по т. cos гна  $ABM$ :  $BM = 2\sqrt{18 + 3\sqrt{35}}$

$AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = 162 \cdot \sqrt{324 - 99} = 162 \cdot 15 = 2430$

Ответ: 2430

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1     2     3     4     5     6     7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$MC^2 = 36 + 36 - 2 \cdot 6 \cdot 6 \cdot \frac{\sqrt{11}}{4} = 72 - 12\sqrt{11} = 12(6 - \sqrt{11})$$

$$MC = 2\sqrt{18 - 3\sqrt{11}}, \quad CC_1 = 3\sqrt{18 - 3\sqrt{11}}, \quad 4(18 - 3\sqrt{11})$$

$$MB = 2\sqrt{18 + 3\sqrt{11}}, \quad BB_1 = 3\sqrt{18 + 3\sqrt{11}}, \quad AA_1 = 18$$

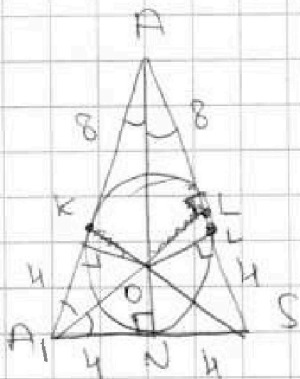
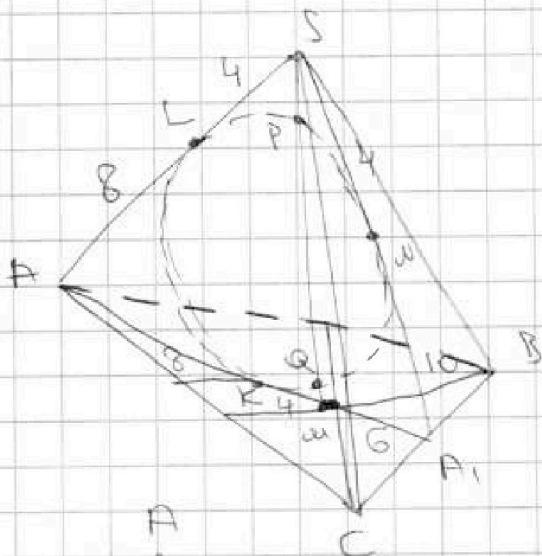
$$AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = 162 \sqrt{324 - 99} = 162 \cdot 15$$

$$= 2430$$

$$\begin{array}{r} \times 18 \\ 9 \\ \hline 162 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 324 \\ - 99 \\ \hline 225 \\ \times 15 \\ 15 \\ \hline 225 \\ \hline 2430 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 162 \\ 15 \\ \hline 810 \\ 162 \\ \hline 2430 \end{array}$$



$$AN = \sqrt{144 - 16} = \sqrt{128} = 8\sqrt{2}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 9 = ax + 2y - 36 \\ x^2 + y^2 - 12x + 32 = ax + 2y - 36 \end{cases}$$

$$8x - 12x - 41 = 0$$

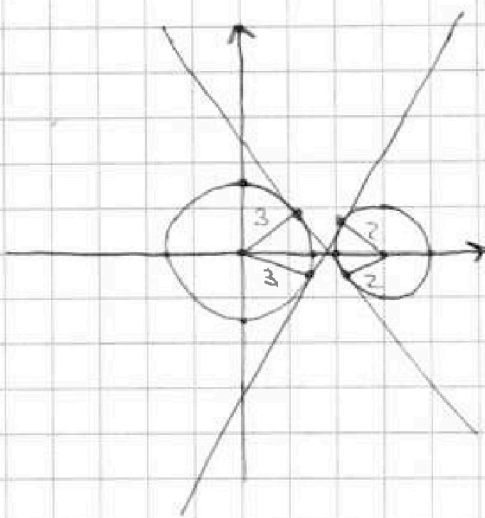
$$x = \frac{41}{12} = 3\frac{5}{12}$$

$$a^8 \quad c^{11} \quad b^3$$

$$a^7 \quad c^{12} \quad b^{33}$$

$$a^6 \quad c^{13} \quad b^{34}$$

$$a^5$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи.

решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\log_3^5(5y) + \log_3^5(x) + 8(\log_3(5y) + \log_3(x)) = 0$$

$$x^5 + y^5 = (x+y)(x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4)$$

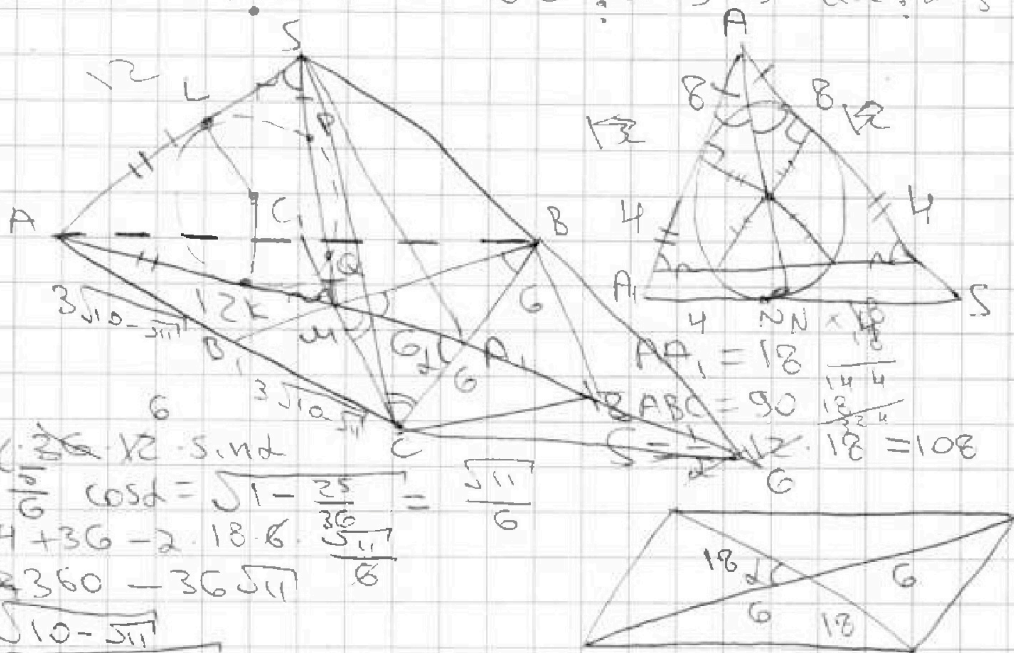
$$\frac{x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4}{x+y} = x^3 - x^2y + xy^2 - y^3$$

$$\log_3(5yx) \cdot 8 = \log_3^4(x) + \log_3^3 x \log_3 5y + \log_3^2 x \log_3^2 5y - \log_3 x \log_3 5y + \log_3^4 5y$$

$$xy = \frac{1}{5}$$

$$\log_3^4 x + 6 \log_3 x 3 - \log_3 2413 = \log_3^4(5y) + 2 \log_3 3 - \log_3(3^2)$$

$$a \cdot b \cdot c = ? \quad a, b, c = 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10} \quad b, c = 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13} \quad a, c = 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30}$$



$$180 = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 8 \cdot \sin \alpha$$

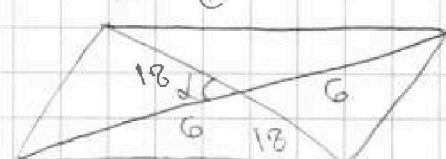
$$\sin \alpha = \frac{10}{6} \quad \cos \alpha = \sqrt{1 - \frac{25}{36}} = \frac{\sqrt{11}}{6}$$

$$AC^2 = 324 + 36 - 2 \cdot 18 \cdot 6 \cdot \frac{\sqrt{11}}{6}$$

$$AC^2 = 360 - 36\sqrt{11}$$

$$AC = 6\sqrt{10 - \sqrt{11}}$$

$$AB = 6\sqrt{10 + \sqrt{11}}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

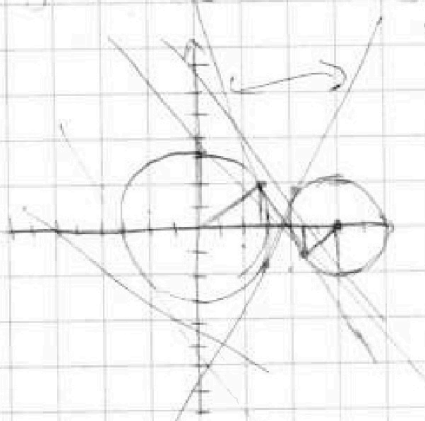
Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

4) 
$$\begin{cases} ax + 2y - 38 = 0 & y = -\frac{a}{2}x + \frac{37}{2}8 \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \\ x^2 + y^2 = 3^2 & (x - 6)^2 + y^2 = 3^2 \end{cases}$$



при  $a = 0$

$$\begin{aligned} -2 < \frac{3}{2}8 < 2 \\ -4 < 38 < 4 \\ -\frac{4}{3} < 8 < \frac{4}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 = 9 &= x^2 + y^2 - 12x + 32 = ax + 17y - 38 \\ 12x &= 41 \\ x &= \frac{41}{12} \end{aligned}$$

5)  $\log_{1/3} x + 6 \log_{1/3} 3 = \log_{1/3} 243 - 8$

ОДЗ:  $x > 0, x \neq 1, y > 0, y \neq 1$

$$\log_{1/3} x + \frac{6}{\log_3 3} = \frac{\log_3 243}{\log_3 1/3} - 8$$

$$\log_{1/3} x + \frac{6}{1} = \frac{5}{-1} - 8$$

$$\log_{1/3} x + 6 = -2 - 8$$

$$\log_{1/3} x + 6 = -10$$

$$\log_{1/3} x = -16$$

$$x = 3^{16}$$

$\log_{1/3}^4(5y) + 2 \log_{1/3}^2 3 = \log_{1/3}^2(3^{11}) - 8$

$$\log_{1/3}^4(5y) + \frac{2}{\log_3 3} = \frac{11}{\log_3 1/3} - 8$$

$$\log_{1/3}^4(5y) + 2 = -11 - 8$$

$$\log_{1/3}^4(5y) + 2 = -19$$

$$\log_{1/3}^4(5y) = -21$$

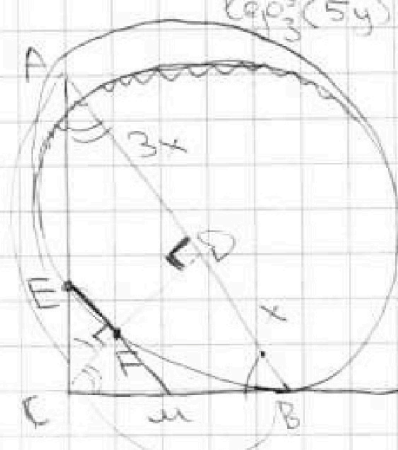
$$5^4 + \frac{2}{5} = \frac{11}{25} - 8$$

$$5^5 + 85 + 2 - \frac{11}{25} = 0$$

$$5^5 + 85 - 3\frac{11}{25} = 0$$

$$25^5 + 165 - 7 = 0$$

$$7 = 25^5 + 165$$



$-2 \log_{1/3}^5 x - 16 \log_{1/3} x = 2 \log_{1/3}^5(5y) + 16 \log_{1/3}(5y)$

$\log_{1/3}^5(5y) + \log_{1/3} x + 8(\log_{1/3} x + \log_{1/3}(5y)) = 0$

$8 \log_{1/3}(5xy) = 0$

$AB \parallel EF, \frac{AE}{EB} = \frac{3}{1}, CE = 3x^2, CD = \sqrt{3}x$

$$\frac{S_{ACE}}{S_{ECB}} = \frac{S_{ACE}}{S_{ECB}} = \frac{1}{2} \cdot 4x \cdot \sqrt{3}x = 2\sqrt{3}x^2$$

$$S_{ACE} = \frac{1}{2} \cdot 3x \cdot \sqrt{3}x = \frac{3\sqrt{3}x^2}{2}$$

$MB^2 = EM \cdot FM$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

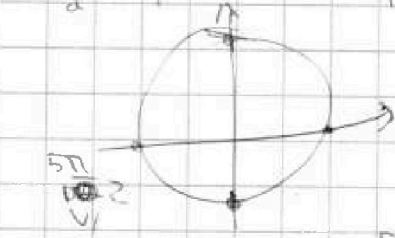
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{aligned}
 3\sin \alpha \sin 3\alpha &= \sin \alpha \cos 2\alpha + \sin 2\alpha \cos \alpha = \sin \alpha (1 - 2\sin^2 \alpha) + 2\sin \alpha \cos^2 \alpha = \\
 &= \sin \alpha - 2\sin^3 \alpha + 2\sin \alpha \cos^2 \alpha - 2\sin^3 \alpha = 3\sin \alpha - 4\sin^3 \alpha \\
 \sin(3\alpha + 2\alpha) &= \sin 4\alpha \cos \alpha + \sin 2\alpha \cos 3\alpha = (3\sin \alpha - 4\sin^3 \alpha)(1 - 2\sin^2 \alpha) + 2\sin \alpha \cos 3\alpha \\
 &= 3\sin \alpha - 6\sin^3 \alpha - 4\sin^3 \alpha + 8\sin^5 \alpha = 8\sin^5 \alpha - 10\sin^3 \alpha + 3\sin \alpha \\
 2\sin \alpha \cos^2 \alpha + 6\sin \alpha \cos^2 \alpha &= 8\sin \alpha (\sin^2 \alpha - 2\sin^2 \alpha + 1) - 6\sin \alpha \\
 2\cos^2 \alpha (4\sin \alpha \cos^2 \alpha - 6\sin \alpha) &= 2(1 - 2\sin^2 \alpha)(4\sin \alpha (1 - \sin^2 \alpha) - 6\sin \alpha) = \\
 &= (2 - 2\sin^2 \alpha)(4\sin \alpha - 4\sin^3 \alpha - 6\sin \alpha) = (2 - 2\sin^2 \alpha)(-4\sin^3 \alpha - 2\sin \alpha) = \\
 &= -8\sin^3 \alpha - 4\sin \alpha + 8\sin^5 \alpha + 4\sin^3 \alpha = 8\sin^5 \alpha - 4\sin^3 \alpha - 4\sin \alpha \\
 8\sin^5 \alpha - 10\sin^3 \alpha + 3\sin \alpha &= 8\sin^5 \alpha - 4\sin^3 \alpha - 4\sin \alpha = 16\sin^5 \alpha - 14\sin^3 \alpha - 5\sin \alpha \\
 \sin(5\alpha) &= \sin(x + \frac{\pi}{2}) \\
 16\sin^5 \alpha - 14\sin^3 \alpha - 5\sin \alpha &= \sin(x + \frac{\pi}{2}) \quad 16\cos^5 \alpha - 14\cos^3 \alpha - \cos \alpha = \cos \alpha \\
 16\cos^5 \alpha - 14\cos^3 \alpha - \cos \alpha &= 0 \\
 \cos \alpha (8\cos^4 \alpha + 7\cos^2 \alpha - 1) &= 0 \\
 \cos \alpha (\cos^2 \alpha - 1)(8\cos^2 \alpha + 8\cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha + 1) &= 0 \\
 \cos \alpha (\cos^2 \alpha - 1)(\cos^2 \alpha + 1)(8\cos^2 \alpha + 1) &= 0
 \end{aligned}$$

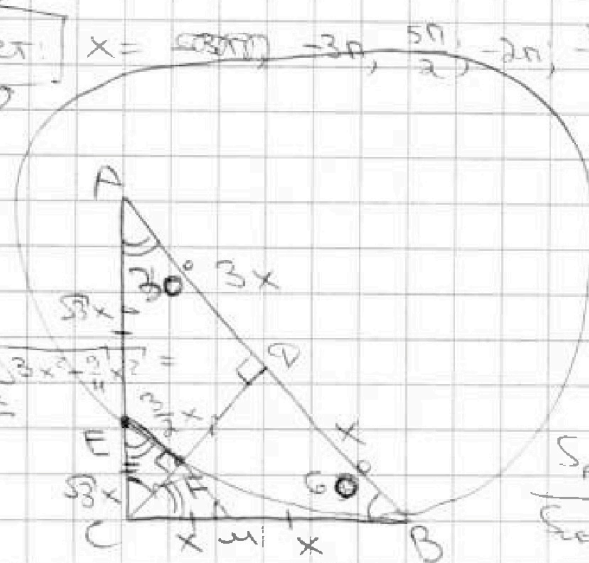
$$\begin{aligned}
 \cos \alpha &= 0 \quad \cos \alpha = 1 \quad \cos \alpha = -1 \\
 \alpha &= \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \quad \alpha = 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \quad \alpha = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r}
 8t^4 + 7t^2 - 1 \quad | \quad t-1 \\
 \underline{8t^4 + 8t^2} \\
 -t^2 - 1 \\
 \underline{-t^2 - 1} \\
 0
 \end{array}$$



$$\begin{aligned}
 5 \arcsin(\cos x) &= x + \frac{\pi}{2} \quad -\frac{5\pi}{2} \leq x + \frac{\pi}{2} \leq \frac{5\pi}{2} \\
 & \quad -3\pi \leq x \leq 3\pi
 \end{aligned}$$

Ответ:  $x = -3\pi, \frac{5\pi}{2}, -2\pi, -\frac{\pi}{2}, 0, \dots$



$$\begin{aligned}
 AP &= 3x \quad PB = x \quad CP = \sqrt{3}x \\
 CB &= \sqrt{x^2 + 3x^2} = 2x \\
 CA &= \sqrt{9x^2 + 3x^2} = 2\sqrt{3}x \\
 \sin \alpha &= \frac{\sqrt{3}x}{2\sqrt{3}x} = \frac{1}{2} = \frac{FM}{EM} = \frac{CF}{EM} \\
 S_{ABC} &= \frac{1}{2} \cdot 2x \cdot 2\sqrt{3}x = 2\sqrt{3}x^2 \\
 S_{CEF} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}x}{2} \cdot \frac{1}{2}x = \frac{\sqrt{3}x^2}{8} \\
 \frac{S_{ABC}}{S_{CEF}} &= \frac{2\sqrt{3}x^2}{\frac{\sqrt{3}x^2}{8}} = 16
 \end{aligned}$$