



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ



## 11 КЛАСС. Вариант 4

- [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^6 3^{13} 5^{11}$ ,  $bc$  делится на  $2^{14} 3^{21} 5^{13}$ ,  $ac$  делится на  $2^{16} 3^{25} 5^{28}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
- [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник  $ABC$ . Окружность, касающаяся прямой  $AC$  в точке  $A$ , пересекает высоту  $CD$ , проведённую к гипотенузе, в точке  $E$ , а катет  $BC$  – в точке  $F$ . Известно, что  $AB \parallel EF$ ,  $AB : BD = 1 : 4$ . Найдите отношение площади треугольника  $ACD$  к площади треугольника  $CEF$ .
- [4 балла] Решите уравнение  $10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$ .
- [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система уравнений

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

- [5 баллов] Некоторые числа  $x$  и  $y$  удовлетворяют равенствам

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_{x^3} \frac{1}{121} - 5, \quad \text{и} \quad \log_{11}^4(0.5y) + \log_{0.5y} 11 = \log_{0.125y^3} (11^{-13}) - 5.$$

Найдите все возможные значения произведения  $xy$ .

- [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0; 0)$ ,  $P(-15; 90)$ ,  $Q(2; 90)$  и  $R(17; 0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$ .
- [6 баллов] Данна треугольная пирамида  $SABC$ , медианы  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $M$ . Сфера  $\Omega$  касается ребра  $AS$  в точке  $L$  и касается плоскости основания пирамиды в точке  $K$ , лежащей на отрезке  $AM$ . Сфера  $\Omega$  пересекает отрезок  $SM$  в точках  $P$  и  $Q$ . Известно, что  $SP = MQ$ , площадь треугольника  $ABC$  равна 180,  $SA = BC = 20$ .
  - Найдите произведение длин медиан  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$ .
  - Найдите двугранный угол при ребре  $BC$  пирамиды, если дополнительно известно, что  $\Omega$  касается грани  $BCS$  в точке  $N$ ,  $SN = 6$ , а радиус сферы  $\Omega$  равен 8.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                                   | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Пусть  $a = 2^{d_1} \cdot 3^{d_2} \cdot 5^{d_3} \cdot k_1$

$$b = 2^{\beta_1} \cdot 3^{\beta_2} \cdot 5^{\beta_3} \cdot k_2$$

$$c = 2^{\gamma_1} \cdot 3^{\gamma_2} \cdot 5^{\gamma_3} \cdot k_3$$

$$abc = 2^{d_1 + \beta_1 + \gamma_1} \cdot 3^{d_2 + \beta_2 + \gamma_2} \cdot 5^{d_3 + \beta_3 + \gamma_3} \cdot k_1 \cdot k_2 \cdot k_3.$$

Заметим, что так как мы ищем  $\min abc$ , то  $k_1, k_2$  и  $k_3$  не могут приводиться к нулю.

$$\nabla (abc)^2 = ab \cdot bc \cdot ac \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (abc)^2 : 2^{36} \cdot 3^{59} \cdot 5^{52}$$

$$\text{П.к. } (abc)^2 - \text{квадрат} \Rightarrow (abc)^2 : 3^{2n}, \cancel{(abc)^2 : 3^{59}} \Rightarrow (abc)^2 : 3^{50} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (abc)^2 : 2^{36} \cdot 3^{60} \cdot 5^{52}$$

$$abc : 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{26}$$

Заметим, что  $ac : 5^{28} \Rightarrow abc : 5^{28} \Rightarrow$

$$\Rightarrow abc : 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$$

П.к. числа натуральные, то  $\min(abc) = 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$

Он достигается при  $a = 2^4 \cdot 3^9 \cdot 5^{13}$ ,  $b = 2^2 \cdot 3^5$  и  $c = 2^{12} \cdot 3^{16} \cdot 5^{15}$

Ответ:  $2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$

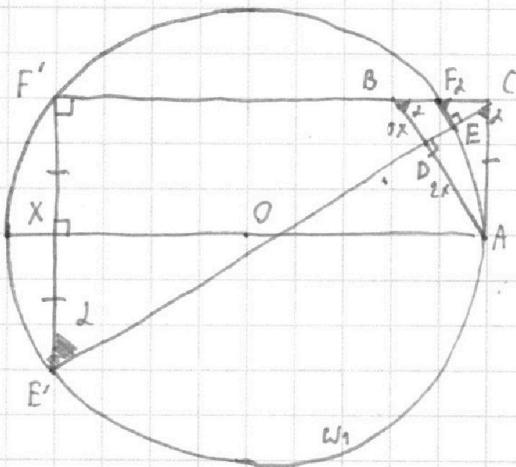
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                                   | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Дано:

ACB - прям.  $\angle ACD = 90^\circ$

Решение:

1) Т.к.  $CD \cup CB$  go внерад. к. перпендикуляр к окр.  $\omega_1$ :  $CD \cap \omega_1 = E'$ ,  $CB \cap \omega_1 = F'$ .

2) Т.к.  $AB \parallel FE \Rightarrow \angle CFE = \angle ABC$  и  $FE \perp CD$ .

3) Т.к.  $EFF'E'$  - внешн. 4-угол.  $\Rightarrow \angle FFE' = 180^\circ - \angle FEE' = 90^\circ$  и  
 $\angle CE'F' = \angle CFE = 2x$

4) Т.к.  $CD$  - висота в  $\triangle ABC \Rightarrow CD = \sqrt{BD \cdot AD} = \sqrt{2x \cdot 3x} = x\sqrt{10}$ , где  
 $2x = BD$ .

5) Т.к.  $\triangle CDB$  - прям.  $\Rightarrow \operatorname{tg} \angle CBD = \frac{CD}{BD} = \frac{\sqrt{10}x}{2x} = \sqrt{\frac{5}{2}} \Rightarrow \operatorname{tg} 2x = \sqrt{\frac{5}{2}}x$

6) Т.к.  $AC \perp BC$  и  $E'F' \perp CF' \Rightarrow AC \parallel E'F'$ .

7) Т.к. A - н. точка  $AC \cup \omega_1 \Rightarrow OA \perp AC$ , а  $AC \parallel E'F' \Rightarrow OA \perp E'F'$ .

8) Т.к.  $AC \parallel E'F'$  и  $AO \parallel CP'$  ( $AO \perp E'F'$  и  $CP' \perp F'E'$ )  $\Rightarrow ACP'X$  ( $X = AO \cap CP'$ ) -  
параллелограмм  $\Rightarrow AC = E'X = \frac{E'F'}{2}$  (н.к. разделяет перпендикуляр на две равные части)



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                                   | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$10) \triangle ACD: \Delta ACD - \text{р.мн.} \Rightarrow AC = \sqrt{AD^2 + CD^2} = X\sqrt{35} \Rightarrow$$

19

$$\Rightarrow \text{у.н.9 } EF' = 2X\sqrt{14}.$$

$$11) \text{П.к. } \triangle CFE' - \text{р.мн.} \Rightarrow CF' = E'F' \cdot \tan \angle CEF' = 2X\sqrt{14} \cdot \sqrt{\frac{5}{2}} = \frac{4X\sqrt{14}}{\sqrt{5}}$$

$$12) \text{П.к. } CF' - \text{с.ч. и } CA - \text{кас. к } \omega \Rightarrow$$

$$\Rightarrow CA^2 = CF \cdot CF' \Rightarrow CF = \frac{35x^2}{4X\sqrt{14}} = \frac{35x}{\sqrt{2}} = X\sqrt{\frac{35}{2}} = \frac{\sqrt{35}}{2}X$$

$$13) \triangle BCD: \Delta BCD - \text{р.мн.} \Rightarrow BC = \sqrt{CD^2 + BD^2} = X\sqrt{35}.$$

$$14) \text{П.к. } \triangle BCD \sim \triangle CEF \text{ по 2-му условию} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{EF}{BD} = \frac{CF}{BC} = \frac{1}{2} \Rightarrow EF = \lambda \sqrt{\frac{5}{2}} \frac{5x}{2} \text{ и } CE = X\sqrt{\frac{5}{2}}$$

$$15) \frac{S_{\triangle CEF}}{S_{\triangle COD}} = \frac{\frac{1}{2}CE \cdot EF}{\frac{1}{2}CD \cdot AD} = \frac{\frac{5x}{2} \cdot X\sqrt{\frac{5}{2}}}{X\sqrt{10} \cdot 2X} = \frac{5}{8}$$

Ответ: 5 : 8

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

5

6

7

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$$

П.к.  $f(x) = \arccos x$  принимает значения от 0 до  $\pi$  включительно  $\Rightarrow$

$$\Rightarrow 10 \arccos(\sin x) \in [0; 10\pi] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 \leq 9\pi - 2x \leq 10\pi$$

$$-9\pi \leq -2x \leq \pi$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{2\pi}{2}.$$

$$10 \arccos(\sin x) = 10\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin(\sin x)\right) = 5\pi - 10 \arcsin(\sin x)$$

$$5\pi - 10 \arcsin(\sin x) = 9\pi - 2x$$

$$-10 \arcsin(\sin x) + 2x = 4\pi$$

$$x - 5 \arcsin(\sin x) = 2\pi$$

$$\text{Если } x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right], \text{ то}$$

$$x - 5x = 2\pi$$

$$x = -\frac{\pi}{2} \text{ - условие ограничено}$$

$$\text{Если } x \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$$

~~$$x - 5(x - \pi) = 2\pi$$~~

~~$$-4x = -3\pi$$~~

~~$$x = \frac{3\pi}{4} \text{ - условие ограничено}$$~~

$$x - 5(\pi - x) = 2\pi$$

$$6x = 7\pi$$

$$x = \frac{7\pi}{6} \text{ - условие непр.}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



- |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                                   | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Если  $x \in \left[\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$ , то

$$x - 5(x - 2\pi) = 2\pi$$

$$-4x = -8\pi$$

$x = 2\pi$  - удел. окрн.

Если  $x \in \left[\frac{5\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}\right]$ , то

$$x - 5(3\pi - x) = 2\pi$$

$$6x = 17\pi$$

$$x = \frac{17\pi}{6} - \text{удел. окрн.}$$

Если  $x \in \left[\frac{7\pi}{2}; \frac{9\pi}{2}\right]$ , то

$$x - 5(x - 4\pi) = 2\pi$$

$$-4x = -18\pi$$

$$x = \frac{9\pi}{2} - \text{удел. окрн.}$$

Ответы:  $\begin{cases} x = -\frac{\pi}{2} \\ x = \frac{7\pi}{6} \\ x = 2\pi \\ x = \frac{17\pi}{6} \\ x = \frac{9\pi}{2} \end{cases}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

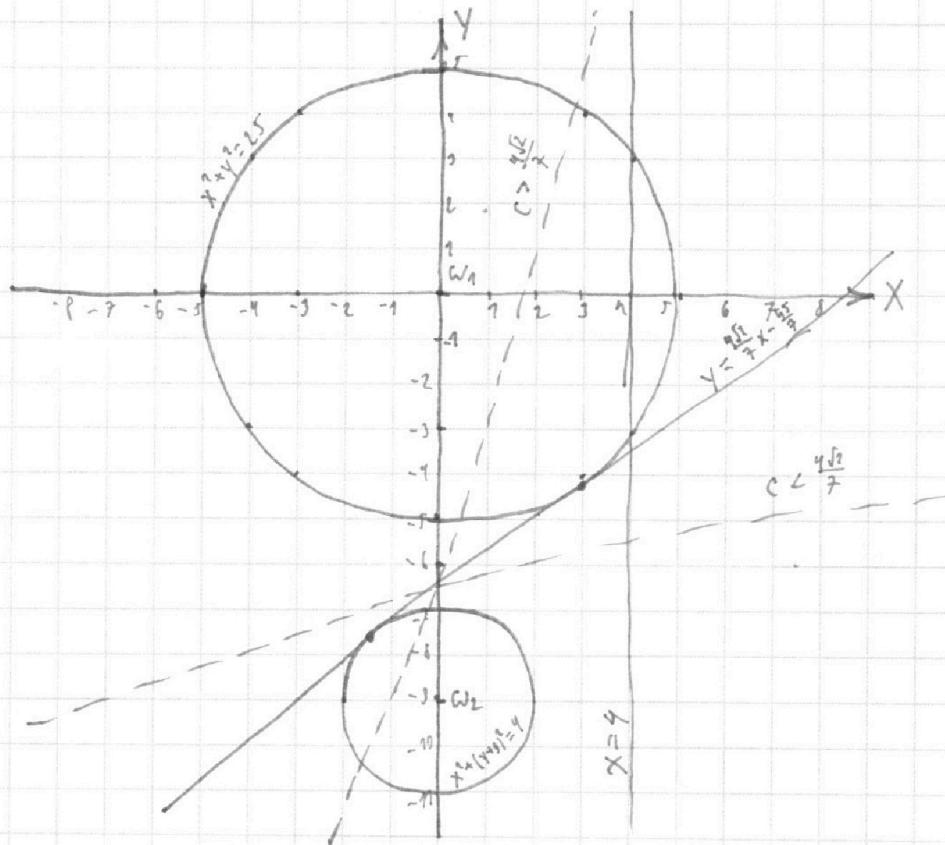
- |                            |                            |                            |                                       |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input checked="" type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + (y+9)^2 - 4) = 0 \end{cases}$$



Если  $a=0$ , то  $x = \frac{b}{5}$  имеет 4 точки соприкосновения при

$b \in (-10; 10)$ .  $\Rightarrow a=0$  или не подходит.

Если  $a \neq 0$ , то

$$y = \frac{b}{6a} - \frac{5}{6a}x$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                                   | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

4)  $a < 0$ , если  $a > 0$ , то рассуждаем аналогично, тогда.

$$y = cx + d, \text{ где } c > 0.$$

Заменим, что когда  $y = cx + d$  сопадает с внутренней касательной  
окружностей  $W_1$  и  $W_2$ , то тогда  $a = -\frac{5}{6c}$  или ненегатив.

$$\text{Ур-ще касательной: } y = \frac{4\sqrt{2}}{7}x - \frac{45}{7} \Rightarrow a = \frac{-35\sqrt{2}}{28} = \frac{-35\sqrt{2}}{48}$$

То есть мы ненегатив ур-ще касательной. Ил. к. мы задавали  $a$ ,  
то можем выбрать только  $b$ , т.е.  $d$ . Если  $d \uparrow$ , то прямая у не будет  
касаться  $W_2$  и будет  $\leq 2$  точек пересечения, аналогично, если  $d \downarrow$ .

Если  $c < \frac{4\sqrt{2}}{7}$ , то наше прямая у не будет касаться 2-х окр. и

пересекать соответственно, т.е.  $c \in [0; \frac{4\sqrt{2}}{7}]$  или ненегатив  $\Rightarrow$   
 $\Rightarrow a \in \left[ \frac{-35\sqrt{2}}{48}, +\infty \right)$  ненегатив.

Если  $c > \frac{4\sqrt{2}}{7}$  и  $d = -\frac{45}{7}$ , то наше прямая будет пересекать окружности, то

у не ненегатив, т.к. будем 4 решения.

Аналогично, если  $a \geq 0$ , то получим  $a \in \left[ \frac{35\sqrt{2}}{48}; +\infty \right)$

Ответ:  $a \in (-\infty; -\frac{35\sqrt{2}}{48}] \cup [\frac{35\sqrt{2}}{48}; +\infty)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                                   | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_x \frac{1}{121} - 5 \\ \log_{11}^4 (0.5y) + \log_{0.5} 11 = \log_{0.125y^3} (11^{-\frac{13}{4}}) - 5 \end{cases}$$

ODZ:  $\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \\ 0.5y > 0 \\ 0.5y \neq 1 \end{cases}$        $\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \\ y > 0 \\ y \neq 2 \end{cases}$

Пусть  $u = \log_{11} x$ , а  $v = \log_{11}(0.5y)$ , то  $u \neq 0 \text{ и } v \neq 0$ , т.к.  $x \neq 1 \text{ и } 0.5y \neq 1$

$$\begin{cases} u^4 - \frac{6}{u} = -\frac{2}{3u} - 5 \\ v^4 + \frac{1}{v} = -\frac{13}{3v} - 5 \end{cases} \quad \begin{cases} u^4 + 5 - \frac{16}{3u} = 0 \\ v^4 + 5 + \frac{16}{3v} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3u^5 + 45u - 16 = 0 \\ 3v^5 + 15v + 16 = 0 \end{cases}$$

$$F(u) = 3u^5 + 15u - 16$$

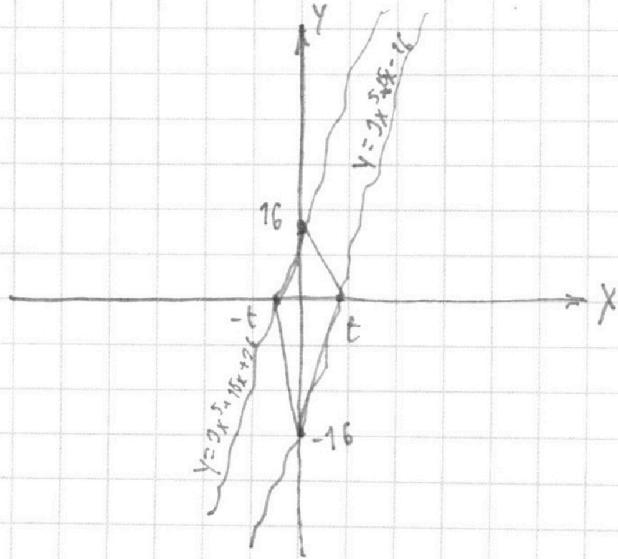
$$g(v) = 3v^5 + 15v + 16$$

$$F'(u) = 15(u^4 + 1) > 0 \Rightarrow$$

$$g'(v) = 15(v^4 + 1) > 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow F$  - бур. ф-ция

$\Rightarrow g$  - бур. ф-ция.





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                                   | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Заменили, что  $f(x)$  и  $g(x)$  - это ф-ции, полученные переносом

переносом  $3x^5 + 15x$  на 16 вниз для  $f$  и 16 на вверх для  $g$ .

А  $3x^5 + 15x = 0$  имеет един. корень  $x=0$ , тогда в силу симметрии  $\Rightarrow$

$\Rightarrow$  если  $f$  имеет корень  $x_0$ , то  $g$  имеет корень  $-x_0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \theta u = -v$$

$$\log_{11} x = -\log_{11} 0,5y = \log_{11} \frac{2}{y}$$

$$x = \frac{2}{y}$$

$$xy = 2$$

Ответ: 2



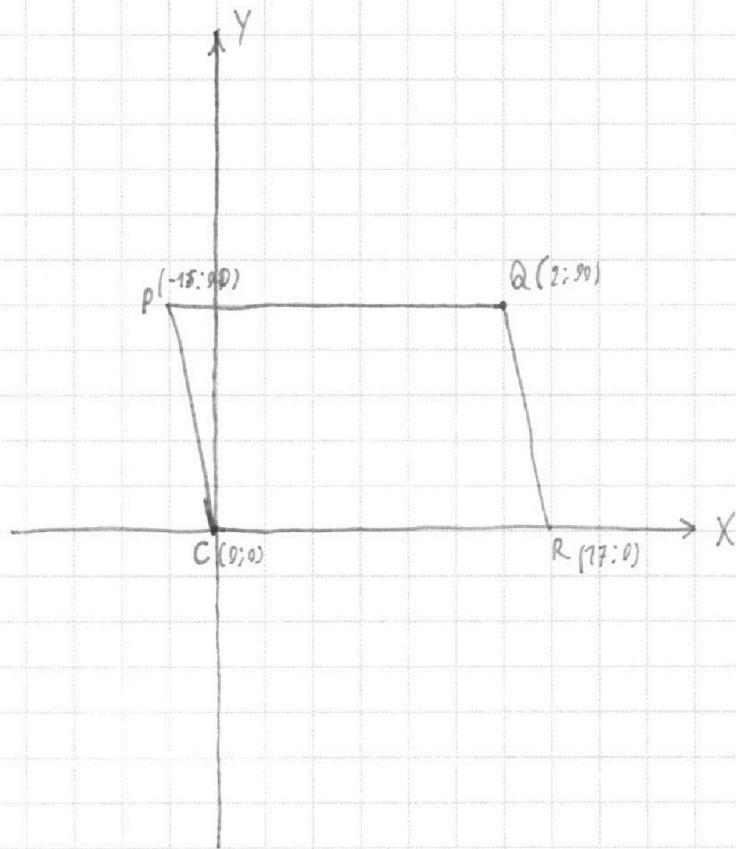
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                                   | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\Delta 6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48. \text{ Заменим, что } 6x_2 - 6x_1 : 6 \text{ и } 48 : 6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{n. k. } y_1, y_2 \in \mathbb{Z} \Rightarrow y_2 - y_1 : 6 \Rightarrow y_2 \equiv y_1 \pmod{6}.$$

$$y_2 = 6t_2 + r \text{ и } y_1 = 6t_1 + r.$$

Заменим, что если мы начали трапецию  $(x_1; x_2; t_1; t_2)$ , то нам удобно включить

6 пар  $y_1$  и  $y_2$ .

Тогда симмы координаты не умножаются в списке  $(x_0; T)$ .



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                                     |                          |                                     |                                     |                          |                          |                          |
|-------------------------------------|--------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                                   | 2                        | 3                                   | 4                                   | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ.

Если  $x \in \left[\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$ , то

$$x - 5(x - 2\pi) = 2\pi$$

$$-4x = -8\pi$$

$x = 2\pi$  - удел. огранич.

Если  $x \in \left[\frac{5\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}\right]$ , то

$$x - 5(3\pi - x) = 2\pi$$

$$6x = 17\pi$$

$$x = \frac{17\pi}{6} - \text{удел. огранич.}$$

Если  $x \in \left[\frac{7\pi}{2}; \frac{9\pi}{2}\right]$ , то

$$x - 5(x - 4\pi) = 2\pi$$

$$-4x = -18\pi$$

$$x = \frac{9\pi}{2} - \text{удел. огранич.}$$

Ответ:  $x =$   
[ ]



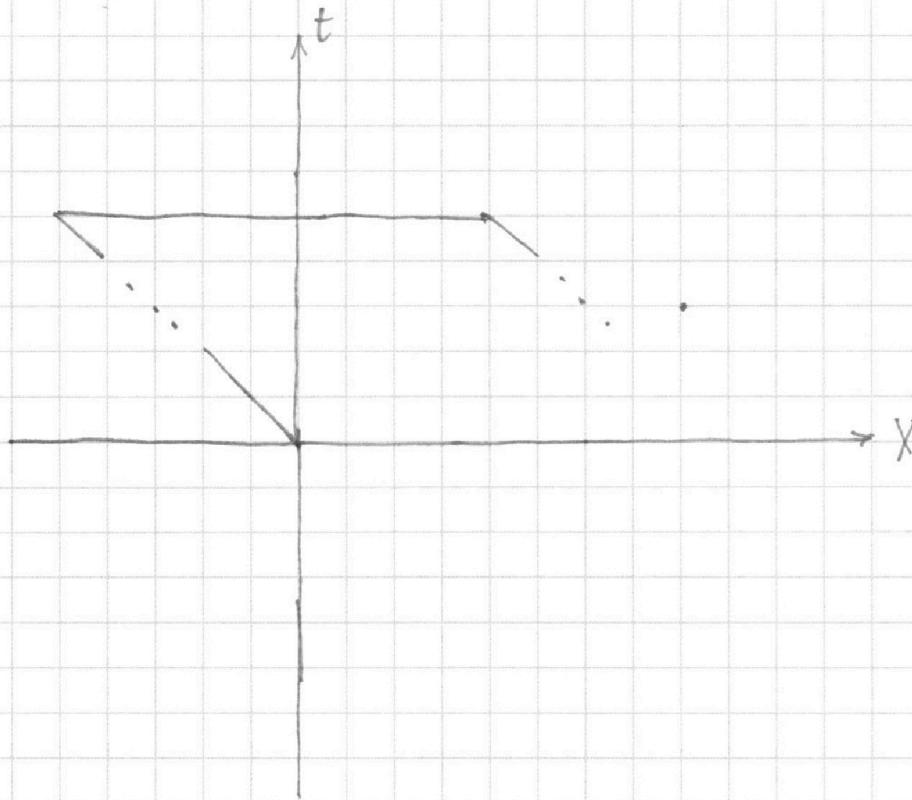
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

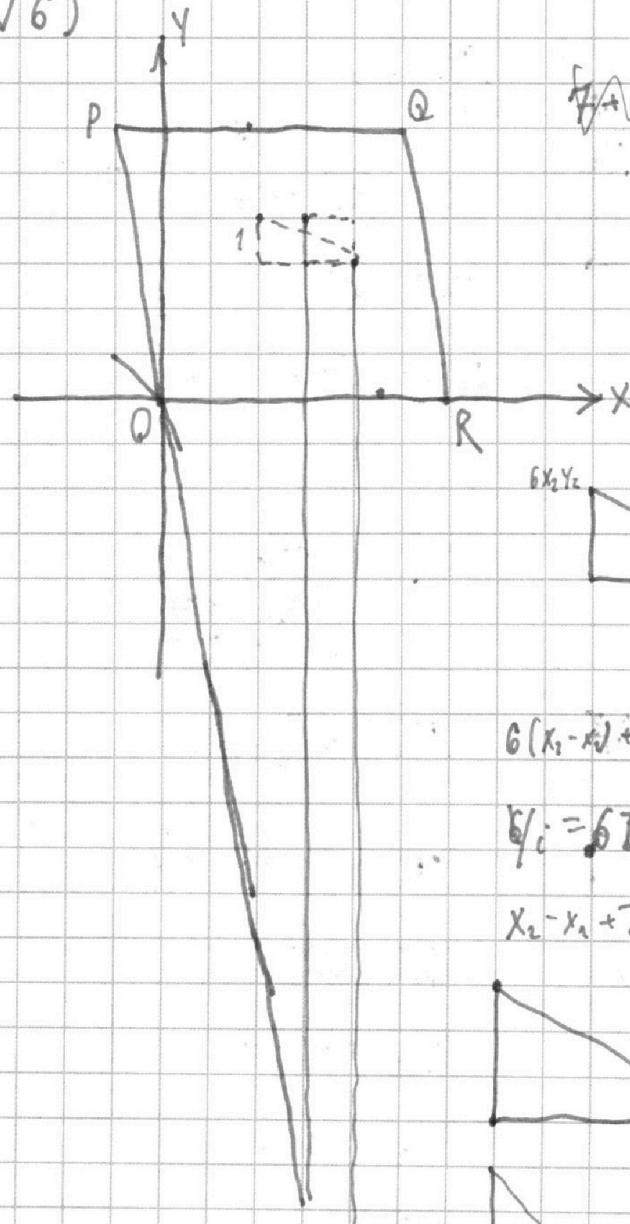
Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                            |                            |                            |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N 6)

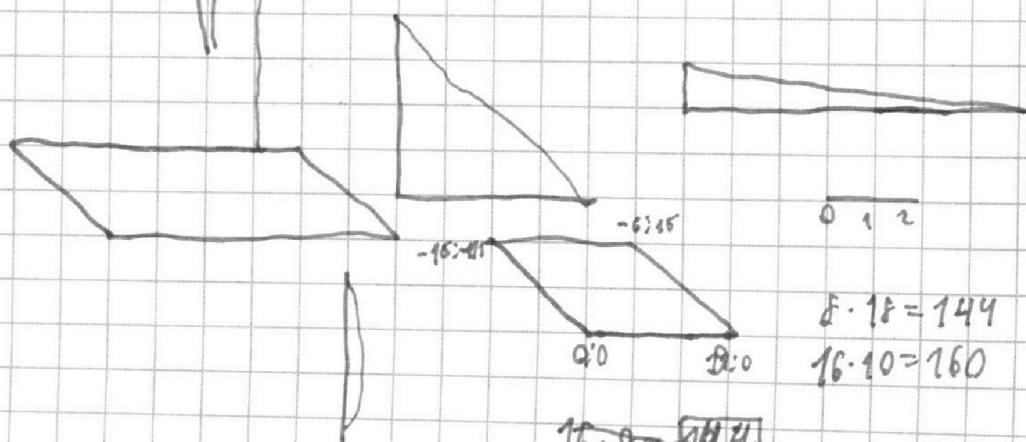
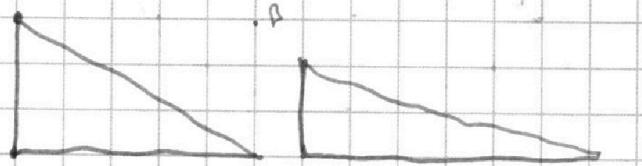


$$6(x_1 - x_2) + y_2 - y_1 = 4f$$

$$\therefore 6$$

$$y_i = 6z_i$$

$$x_2 - x_1 + z_2 - z_1 = f$$



0 1 2

$$16 \cdot 9 = \boxed{144}$$

$$F \cdot 18 = 144$$

$$16 \cdot 10 = 160$$



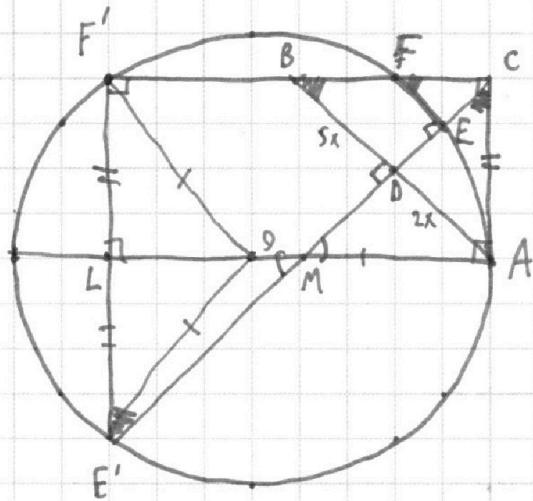
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                            |                            |                            |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{CF}{AC} = \frac{AC}{CF'}$$

$$BC = x\sqrt{35}$$

$$CD = x\sqrt{10} \Rightarrow AC = x\sqrt{14}$$

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{5} \Rightarrow \tan \alpha = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$LM = x\sqrt{14} \cdot \sqrt{\frac{2}{5}} = \frac{2x\sqrt{7}}{\sqrt{3}}$$

$$AL = \frac{4x\sqrt{7}}{\sqrt{3}} = CF'$$

$$14x^2 = 0x \cdot \frac{4x\sqrt{7}}{\sqrt{3}}$$

$$\alpha = \frac{14\sqrt{5}}{24\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{35}}{2}$$

$$\frac{CF}{CB} = \frac{\sqrt{21}}{2\sqrt{35}} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{5}}$$

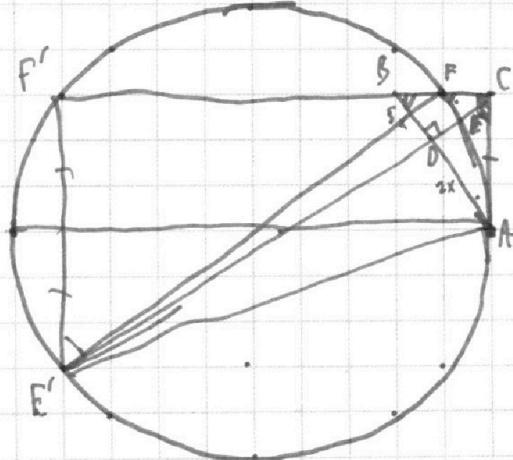
$$CE = x\sqrt{10} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{5}} = x\sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$FE = x\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$S_{\triangle CEF} = \frac{3x^2}{4\sqrt{2}}$$

$$S_{\triangle ACD} = x^2\sqrt{10}$$

$$\left( \frac{3}{8\sqrt{5}} \right)$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                            |                            |                            |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$ab : 2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{11}$$

$$bc : 2^{11} \cdot 3^{21} \cdot 5^{13}$$

$$ac : 2^{16} \cdot 3^{25} \cdot 5^{26} \quad \begin{cases} d_2 + r_3 + 2p_3 \geq 24 \\ d_3 - r_3 \geq 28 \end{cases}$$

$$(abc)^2 : 2^{36} \cdot 3^{59} \cdot 5^{52}$$

$$abc : 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{26}$$

$$abc = 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{26}$$

$$a = 2^\alpha \cdot k \quad \begin{cases} \alpha + \beta \geq 6 \\ \gamma + \beta \geq 14 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha + \beta = 6 \\ \beta + \gamma = 14 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha + \beta = 6 \\ \beta + \gamma = 14 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha = 4 \\ \gamma = 12 \end{cases}$$

$$b = 2^\beta \cdot k \quad \begin{cases} \alpha + \beta \geq 14 \\ \gamma + \beta \geq 16 \end{cases} \quad \begin{cases} \beta + \gamma = 14 \\ \gamma + \alpha = 16 \end{cases} \quad \begin{cases} \beta = 2 \\ \alpha = 2 \end{cases}$$

$$c = 2^\gamma \cdot k \quad \begin{cases} \beta + \gamma \geq 16 \\ \alpha + \gamma \geq 25 \end{cases} \quad \begin{cases} \gamma + \alpha = 16 \\ \alpha + \gamma = 25 \end{cases} \quad \begin{cases} \gamma = 9 \\ \alpha = 9 \end{cases}$$

$$\alpha + \beta + \gamma \geq 18$$

$$\begin{cases} d_2 + p_2 = 13 \\ \alpha_2 + \beta_2 = 21 \\ \alpha_2 + \gamma_2 = 25 \end{cases} \quad \begin{cases} d_2 + p_2 = 14 \\ \beta_2 + p_2 = 21 \\ d_2 - p_2 = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} d_2 = 9 \\ \beta_2 = 16 \\ \gamma_2 = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} d_3 + p_3 = 11 \\ \alpha_3 + \beta_3 = 13 \\ \alpha_3 + \gamma_3 = 28 \end{cases} \quad \begin{cases} d_3 + p_3 = 11 \\ \beta_3 + p_3 = 13 \\ d_3 - p_3 = 15 \end{cases} \quad \begin{cases} d_3 = 13 \\ \beta_3 = 2 \\ \gamma_3 = 18 \end{cases}$$

$$d_3 = 13$$

$$\beta_3 = 0$$

$$\gamma_3 = 15$$

$$\gamma_2 =$$



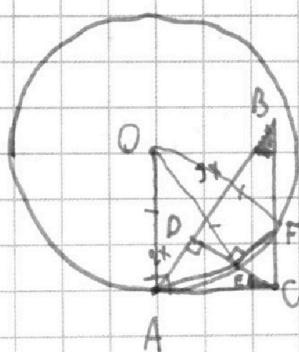
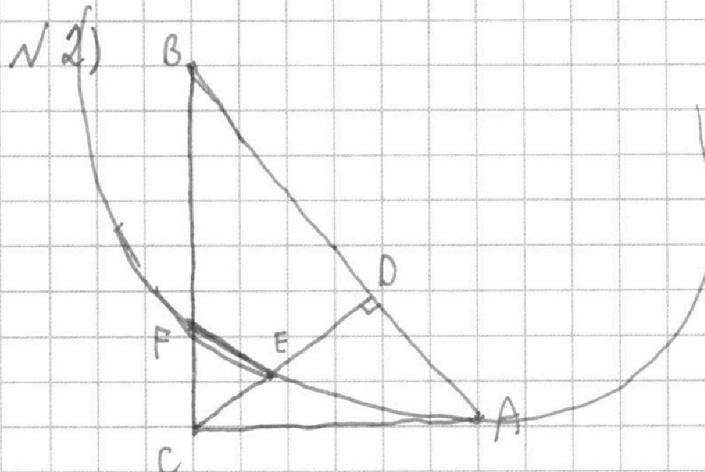
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

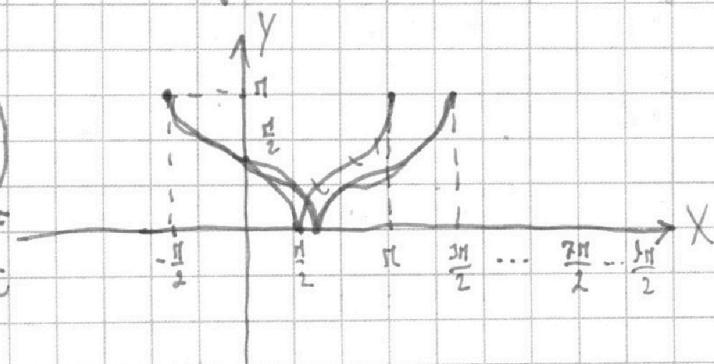
- |                            |                            |                            |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$CD = x\sqrt{10}$$



N 3)  $10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$

$$0 \leq 9\pi - 2x \leq 10\pi$$

$$\sin x = \cos\left(\frac{9\pi - 2x}{2}\right)$$

$$-\pi \leq -2x \leq \pi$$

$$\arccos(\sin x) = \frac{9\pi - 2x}{10}$$

$$\boxed{-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{9\pi}{2}}$$

$$\frac{\pi}{2} - \text{arc}$$

$$10\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin(\sin x)\right) = 9\pi - 2x$$

$$5\pi + 10\arcsin(\sin x) = 9\pi - 2x$$

$$\boxed{10\arcsin(\sin x) = 2x - 4\pi}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

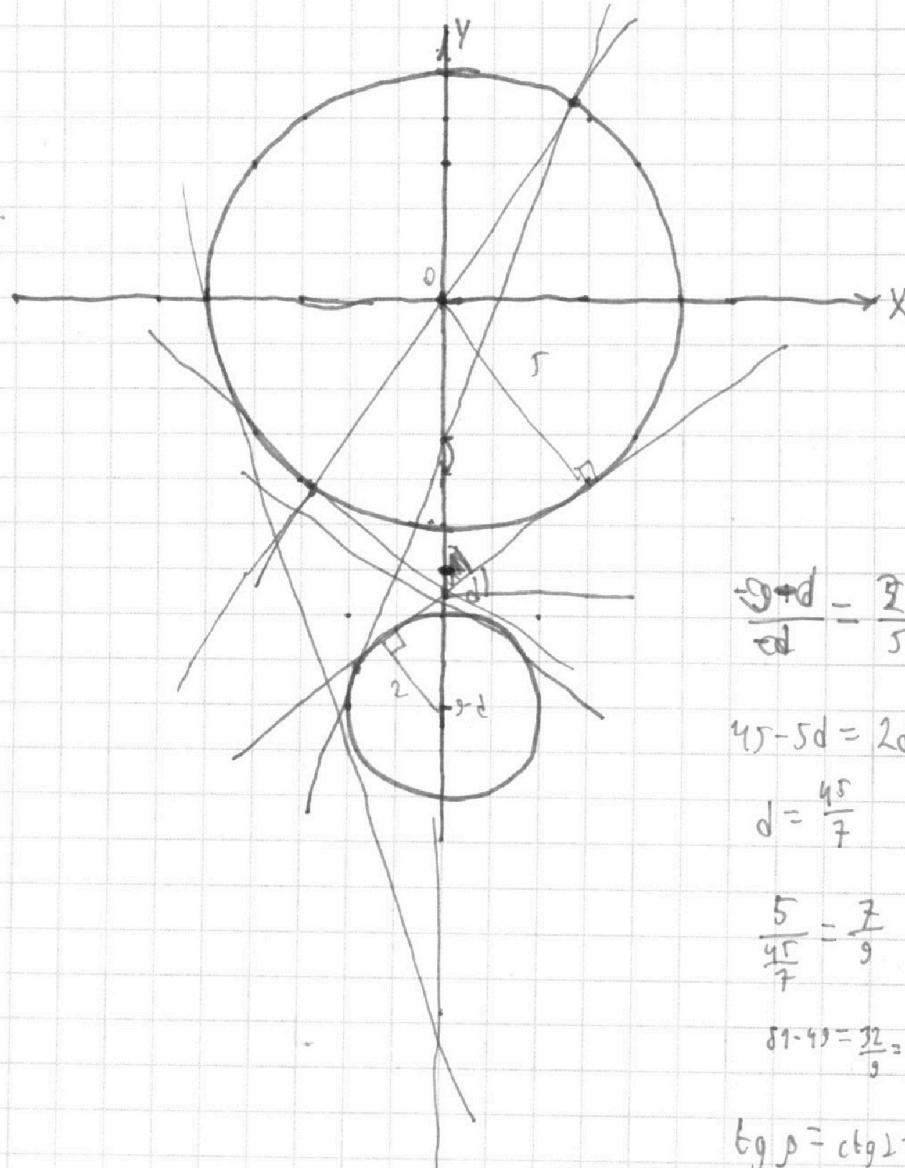
- |                            |                            |                            |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$N^4) \quad \begin{cases} 5x + 6ay - b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + (y+9)^2 - 4) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \frac{b - 5x}{6a} = \frac{b}{6a} - \frac{5}{6a}x \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + (y+9)^2 - 4) = 0 \end{cases}$$



$$\frac{OC}{d} = \frac{5}{\frac{4\sqrt{13}}{7}}$$

$$5d = 20\sqrt{13}/7$$

$$d = \frac{4\sqrt{13}}{7}$$

$$\frac{5}{\frac{4\sqrt{13}}{7}} = \frac{35}{4\sqrt{13}}$$

$$35 \cdot 4\sqrt{13} = \frac{140\sqrt{13}}{9}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{ctg} 2 = \frac{4\sqrt{13}}{7}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                            |                            |                            |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} N5) \quad & \left\{ \begin{array}{l} \log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_{x^3} \frac{1}{121} - 5 \\ \log_{11}^4 (0,5y) + \log_{0,5y} 11 = \log_{0,11^5} (\sqrt[3]{11^{-11}}) - 5 \end{array} \right. \end{aligned}$$

$$0293: \quad \left\{ \begin{array}{l} x > 0 \\ x \neq 1 \\ y > 0 \\ y \neq 2 \end{array} \right.$$

$$t^4 - \frac{6}{t} = -\frac{16}{3t} - 5$$

$$t^4 - \frac{16}{3t} + 5 = 0 \quad | \cdot 3t$$

$$3t^5 + 15t - 16 = 0$$

$$p^4 + \frac{1}{p} = -\frac{13}{3p} - 5 \quad t_i = -p_i$$

$$p^4 + \frac{16p}{3p} + 5 = 0$$

$$3p^5 + 15p + 16 = 0$$

$$\log_{11} x_i = -\log_{11} 0,5y_i$$

$$x_i = \frac{1}{0,5y_i}$$

$$x_i \cdot y_i = 2$$

$$\left\{ \begin{array}{l} p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 = -5 \\ \dots \\ p_1 p_2 p_3 p_4 p_5 = -\frac{16}{3} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dots \\ t_1 t_2 t_3 t_4 t_5 = \frac{16}{3} \end{array} \right.$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

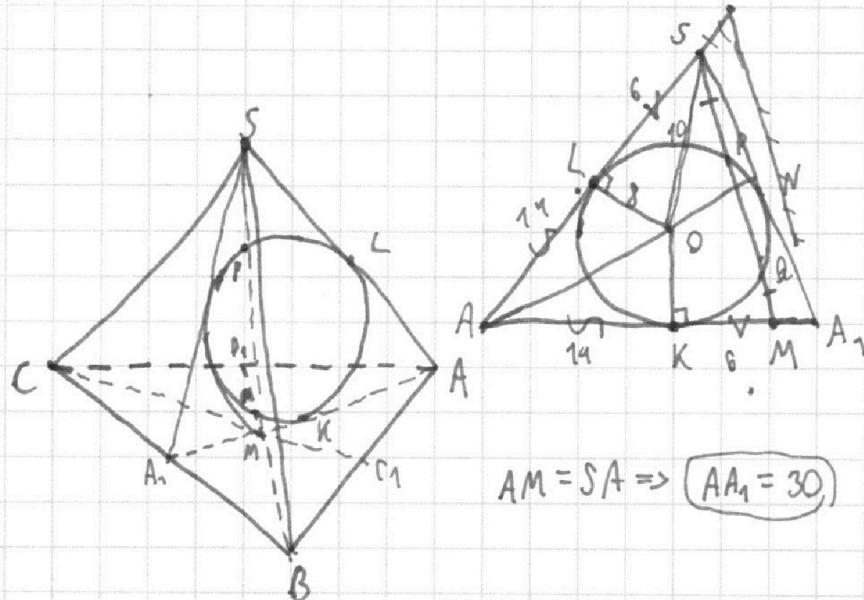
решение которой представлено на странице:



- |                            |                            |                            |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

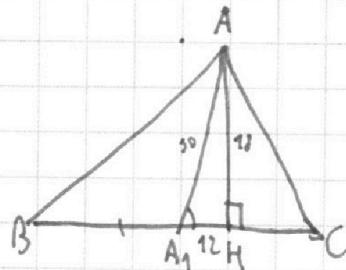
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{1}{2} h \cdot B = 180$$

$$h = 18$$



$$180 \sin l = 90$$

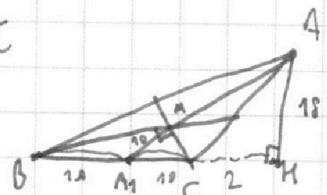
$$\sin l = \frac{3}{5}$$

$$\frac{1}{2} BM \cdot CM = \frac{1}{2} BC \cdot A_1 M \sin l =$$

$$= 10 \cdot 10 \cdot \frac{3}{5} = 60$$

$$BM \cdot CM = 120$$

$$OB_1 \cdot OC_1 = 270$$



$$CM = \sqrt{100 + 100 - 2 \cdot 10 \cdot 10 \cdot \frac{3}{5}} =$$

$$= \sqrt{290 - 160} = 2\sqrt{10} \Rightarrow CC_1 = 3\sqrt{10}$$

$$BM = \sqrt{360} = 6\sqrt{10} \Rightarrow BB_1 = 9\sqrt{10}$$

$$30 \cdot 3\sqrt{10} \cdot 3\sqrt{10} = 8100$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> |

 **МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

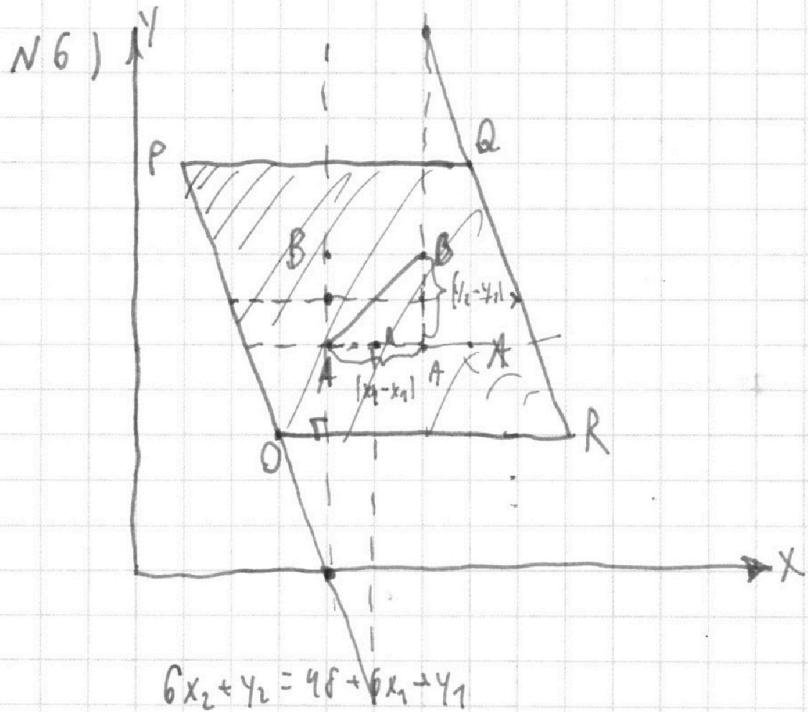
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$0 \leq y_1, y_2 \leq 99$$

$$6x_2 = -y_2$$

$$y = kx$$

$$6x_1 = -y_1$$

$$y = -6x$$

$$y = -6x + b = -6x + 102$$

$$b = 6 \cdot 17 = 102$$

$$9f + y_2 - y_1 = -6x_2 + 6x_1 = -6(x_2 - x_1)$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

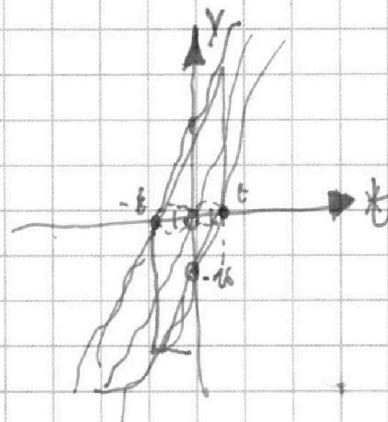
- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$3t^5 + 15t - 16 = 0$$

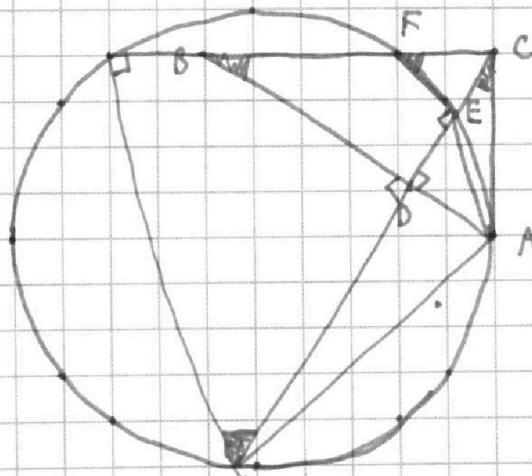
$$f(t) = 15t^4 + 15 = 15(t^4 + 1) > 0$$



N<sup>2</sup>)

$$S_1 = \frac{1}{2} CE \cdot CF$$

$$S_2 = \frac{1}{2} CD \cdot AD$$



$$\frac{AD}{CE} = \frac{CD}{EF} = \frac{CF}{AC}$$

$$\frac{S_2}{S_1}$$