



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ



11 КЛАСС. Вариант 3

- [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^8 3^{14} 5^{12}$, bc делится на $2^{12} 3^{20} 5^{17}$, ac делится на $2^{14} 3^{21} 5^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
- [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой BC в точке B , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке F , а катет AC – в точке E . Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 5 : 2$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF .
- [4 балла] Решите уравнение $10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$.
- [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

- [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_5^4(2x) - 3 \log_{2x} 5 = \log_{8x^3} 625 - 3, \quad \text{и} \quad \log_5^4 y + 4 \log_y 5 = \log_{y^3} 0,2 - 3.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

- [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-16; 80)$, $Q(2; 80)$ и $R(18; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45$.
- [6 баллов] Данна треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 100, $SA = BC = 16$.
 - Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .
 - Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$1. \quad \begin{aligned} & b = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^{12} \\ & b_c = m_2^{12} \cdot 3^{10} \cdot 5^{17} \quad \Rightarrow \quad ab \cdot b_c \cdot ac = \\ & ac = m_2^{15} \cdot 3^{11} \cdot 5^{30} \quad - (ab) \cancel{2^3} \cancel{3^2} \cancel{5^1} \end{aligned}$$

т.к. $k, m, n \in \mathbb{N}$ то.

$$ab \cdot b_c \cdot ac = (abc)^2 = kmn \cdot 2^3 \cdot 3^5 \cdot 5^{58}$$

Также имеем b_c и ac нерыночные числа, т.к. b_c содержит все
числа m_2 в разложении вида $p_1^{e_1} p_2^{e_2} \dots p_n^{e_n}$, т.е. квадрат.

~~также имеем~~

$$a = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^{12}$$

$$\text{т.к. } (abc)^2 = 2^{3+2x} \cdot 3^{5x} \cdot 5^{m+2x}$$

тогда $b, y, z \in \mathbb{Z}$, $b, y, z \geq 0$

$$\Rightarrow ab = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^{12}$$

$$\text{таким образом } a = \frac{abc}{b_c}, b = \frac{abc}{ac}, c = \frac{abc}{ab}, m$$

таким образом имеем для каждого из трех a, b, c и m

$$12x \geq \max(3, 12, 18) \Rightarrow x = 3$$

$$28x \geq \max(18, 20, 21) \Rightarrow y = 3 \quad - \text{дополнительное условие}$$

$$35x \geq \max(11, 12, 13) \Rightarrow z = 5$$

$$\Rightarrow abc = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^{39} \quad \text{таким образом } a, b, c$$

$$a = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^{12}, \quad b = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^3, \quad c = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^{14}$$

$$\text{таким образом: } \boxed{2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^{39}}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

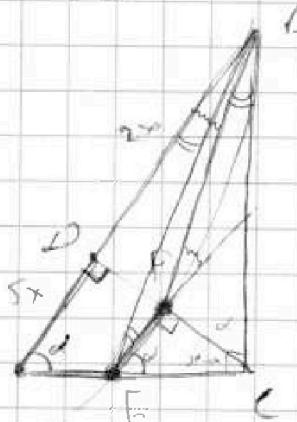


- | | | | | | | |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

2.



$$\frac{AD}{AB} = \frac{5}{7}$$

$$\angle ADB = \angle ABE$$

Так $AB \parallel EF \Rightarrow \angle ABE = \angle BEF$
(внешний).

Также BL - касательная к окружности, то $\angle FBC = \frac{1}{2} \angle FCB$ (угол в касательной)
 $\Rightarrow \angle BEF = \frac{1}{2} \angle FCB$ (он же внешний угол, опирающийся на FBC)

$\Rightarrow \angle BCF = \angle FBC$. т.к. $\angle BEF = \angle ABE \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle FBC = \angle ABE$. Тогда $\angle BAC = \alpha \Rightarrow \angle FEC = \alpha$
(ч. II). $\Rightarrow \angle GCF = 90^\circ \Rightarrow \angle FCB = \alpha$.

$\triangle AFC \sim \triangle BFC$ ($\angle ABE = \angle FBC$, $\angle BAE = \angle FCB = \alpha$)

$$\Rightarrow \frac{FC}{BC} = \frac{AE}{AB} \quad \text{①}$$

$\Rightarrow \frac{AE}{EC} = \frac{AE}{AB} BC$. Тогда $AB = 50$,

$$BC = 20 \Rightarrow AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{50^2 + 20^2} = \sqrt{300} \text{ (по теореме Пифагора)}$$

$\Rightarrow AC = \sqrt{300} / \text{m. Тогда } \angle AEC = \angle BCA =$

$$\alpha \sqrt{15} / \text{радианы) ч. II: } \frac{FC}{AC} = \frac{AE}{AB} \Rightarrow AE = \frac{\sqrt{15}}{7} FC$$

Ч. мно, ч. I $\triangle AEC \sim \triangle FEC \Rightarrow \frac{AE}{EC} = \frac{FC}{EC}$

$$\Rightarrow AE = EC \Rightarrow \frac{AE}{AC} = \frac{EC}{AC} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{15}}{7} FC = \frac{1}{2} FC \Rightarrow \sqrt{15} = \frac{7}{2} \Rightarrow \sqrt{15} = \frac{7}{2} \cdot \sqrt{15} = \frac{7\sqrt{15}}{2} = 0$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

5

6

7

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{Diagram shows a circle with center } C \text{ and radius } r. A chord } EF \text{ is drawn. The distance from } C \text{ to } EF \text{ is } FC = \sqrt{r^2 - EC^2}. \text{ The angle } \angle ECF = 2\alpha. \text{ The angle } \angle EFC = \beta. \text{ The angle } \angle FCE = \gamma. \\ \Rightarrow AE = AC - EC = AC - \sqrt{r^2 - EC^2} = \sqrt{r^2 - EC^2} - \sqrt{r^2 - EC^2} = 0.$$

$$\frac{EC}{FC} < \frac{AC}{CD} = \frac{2\sqrt{35}}{6\sqrt{10}} \Rightarrow EC = \sqrt{\frac{2}{3}} FC.$$

$$AE = AC - EC = AC - \sqrt{\frac{2}{3}} FC, \Rightarrow AC = \sqrt{\frac{2}{3}} FC \Rightarrow \\ \Rightarrow AC = \sqrt{\frac{2}{3}} FC = \sqrt{\frac{2}{3}} FC \Rightarrow FC = \frac{AC}{\sqrt{\frac{2}{3}}} = \frac{x\sqrt{35}}{\sqrt{15}} = x\sqrt{\frac{7}{3}}.$$

Также $\triangle GFC \sim \triangle ABC$ (уголы при вершине). \Rightarrow

$$\frac{S_{ABC}}{S_{GFC}} = \left(\frac{BC}{FC} \right)^2 = \left(\frac{x\sqrt{5}}{x\sqrt{\frac{7}{3}}} \right)^2 = \frac{15}{7} \cdot \boxed{\frac{28}{5}}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$3. 10 \cos(\pi \cos b) = \pi - 2x$$

$$\begin{aligned} \text{Then } \arcsin(y) &\in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \text{ so} \\ -\frac{\pi}{2} &\leq \pi - 2x \leq \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

$$\frac{\pi}{2} \geq 2x - \pi \geq -\frac{\pi}{2}$$

$$\begin{aligned} \frac{3\pi}{2} \geq 2x &\geq \pi \\ \frac{3\pi}{4} > x &\geq \frac{\pi}{4} \end{aligned} \quad \text{and 3.}$$

Задача, т.к. $\arcsin y = \arccos y = \frac{\pi}{2}$ for some y .
(by def.)

$$\Rightarrow \arccos b = \frac{\pi}{2} \quad (\text{def.}) \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \arccos(b) &= \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \arccos(b) = \frac{\pi}{2} = \arccos(1, \infty) \\ &= \frac{\pi}{2} - x \quad (\text{as } x \in \text{QW?}) = [\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}] \end{aligned}$$

$$\text{Задача: } 10 / \left(\frac{\pi}{2} - x \right) = \pi - 2x$$

$$5\pi - 10x = \pi - 2x$$

$$\begin{aligned} 4x &= 4\pi \\ x &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

$$\text{Ans: } \boxed{x = \frac{\pi}{2}}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

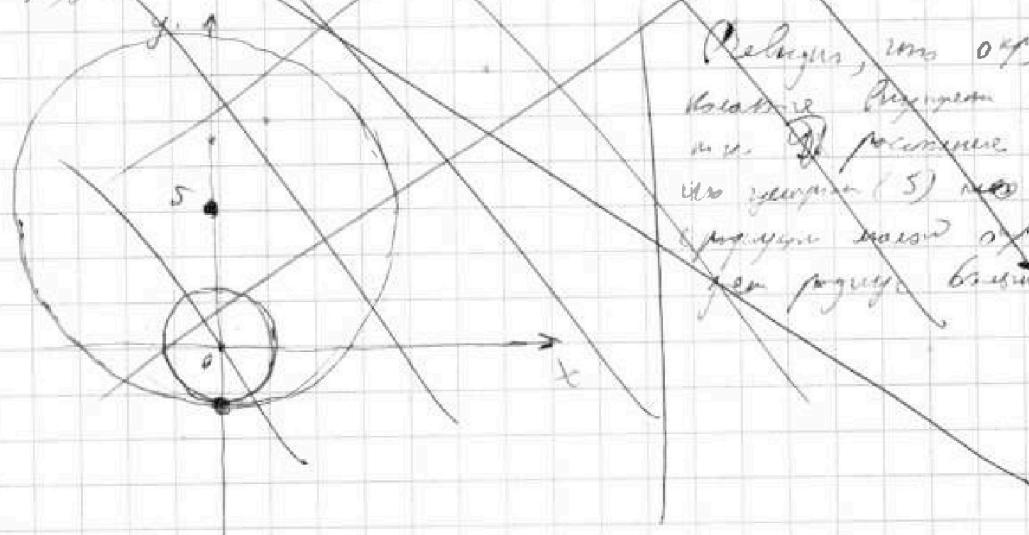
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

4. $\begin{cases} xy - 3y + 5B = 0 \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 10y + 65) = 0 \end{cases}$

Начальное уравнение решения:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + y^2 - 10y + 65 = 0 \Leftrightarrow x^2 + (y - 5)^2 - 100 + 65 = 0 \\ x^2 + (y - 5)^2 = 35 = 5^2 \end{cases}$$

~~В системе координат xy имеем симметричные фигуры
одно окружность с центром в точке $(0, 0)$, радиусом 1 и две прямые:
 $x^2 + y^2 - 10y + 65 = 0$ (окружность с центром $(0, 5)$, радиусом 5)~~



~~Решение, что окружность
имеет центр в точке $(0, 0)$,
и то, что решение имеет
что центр (5) и то, что
окружность имеет радиус 5
не могут быть введены~~

~~В системе координат xy имеем две симметричные~~

~~фигуры одно окружность с центром $(0, 0)$, радиусом 1 и две прямые:~~

~~Уравнение $xy - 3y + 5B = 0$ не имеет решений~~

$$y = \frac{3}{2}x + \frac{5}{2}B.$$

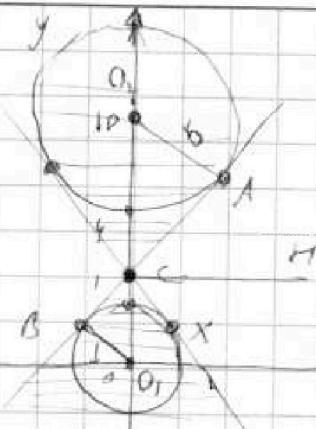
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

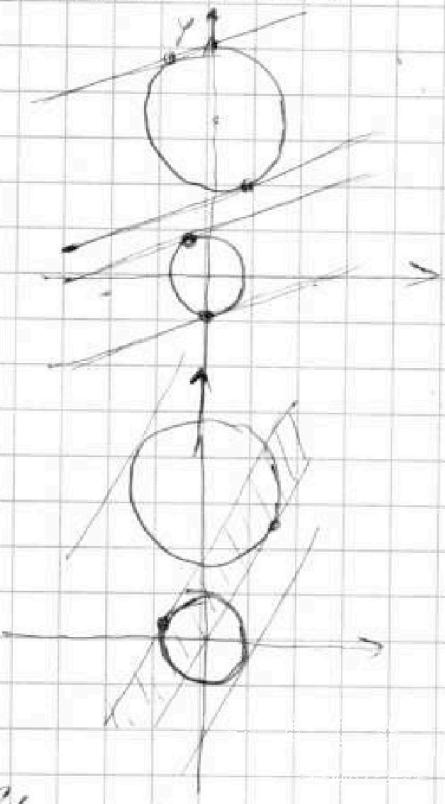
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Требует общей касательной
и общего диаметра

Доказано, что $\angle O_1CB = \angle OCB$
так как $O_1C = OC$ и $O_1B = OB$.
Также, что $O_1O \perp BC$,
так как $O_1O \perp AB$ и $BC \parallel AB$.

Доказано, что $O_1O \perp BC$ по признакам перпендикульности
направлены, т.к. если бы "перпендикуль" проходил из O_1 в O , то O_1O было
бы былью касанием.



Но видно, что для этого нужно
1) изменить место O_1 на O_2 ,
2) пересечение при ~~перпендикуль~~ перпендикулье между O_1O и O_2O .

Т.к. 3 и 4 это признаки перпендикульности
таких при касании касания и
дальнейшее доказательство будет наше.



Чтобы показать перпендикуль будем Радиусом
обозначить по радиусу касания, т.к. у нас ~~касание~~
имеет радиус касания Радиусы не могут быть параллельными

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 3 из варианта. Из рисунка

$$\frac{O_1C}{OP_1} = \frac{BP_1}{OP_1} = \frac{1}{5} \Rightarrow O_1C = \frac{1}{5} OP_1$$

$$Kz \quad O_1C = OP_1 - OA_1 = 10 \Rightarrow \frac{2}{3}OA_1 = 10 \Rightarrow OA_1 = \frac{5}{2} \cdot 10 \Rightarrow OP_1 = \frac{1}{2} \cdot 10.$$

Тогда $\angle O_1O_2A = \angle O_1CA =$

$$= \frac{CA}{O_2A} \text{. Но } \Rightarrow \text{Решение } CA = \sqrt{BC^2 - OA_1^2} = \sqrt{\frac{100}{9} - 1} = \sqrt{\frac{89}{9}} = \frac{\sqrt{89}}{3}$$
$$= \sqrt{51} \Rightarrow \frac{\sqrt{51}}{\frac{\sqrt{89}}{3}} \Rightarrow \angle O_1CA = \frac{\sqrt{51}}{7}.$$

$$\angle O_1AC = 180^\circ - \angle O_1CA = \frac{301}{3}$$

$$\Rightarrow BC = \sqrt{\frac{100}{9} - 1} = \sqrt{\frac{89}{9}} \cdot \frac{\sqrt{7}}{7} \Rightarrow \angle O_1AC = \frac{\sqrt{51}}{7}$$

Таким образом получим граничные значения α , мм.

$$\left[\begin{array}{l} \frac{\alpha}{7} < -\angle O_1AC \\ \frac{\alpha}{3} > \angle O_1CA \end{array} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{\alpha}{7} < -\frac{\sqrt{51}}{7} \\ \frac{\alpha}{3} > \frac{\sqrt{51}}{7} \end{array} \right] \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left[\alpha \in (-\infty; -\frac{3}{7}\sqrt{51}) \cup (\frac{3}{7}\sqrt{51}; +\infty) \right]$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

5. $\log_5^9(2x) - 3 \log_{2x} 5 = \log_{2x} 625 - 3$.

Требуется:

~~$\log_5^9(x) - 3 \log_{2x} 5$~~

$\log_5^9 y + 4 \log_{2x} 5 = \log_{2x} 625 - 3$

(1) $x > 0, x \neq \frac{1}{2}, y > 0, y \neq 1$.

Требуется решить:

$$\log_5^9(2x) - 3 \log_{2x} 5 = \frac{\log_{2x} 625}{\log_{2x} 2x^2} - 3$$

$$\log_5^9(2x) - 3 \log_{2x} 5 = \frac{1}{3} \log_{2x} 5^4 - 3$$

$$\log_5^9(2x) - \frac{3}{\log_5 2x} = \frac{4}{3} \frac{1}{\log_5 5} - 3$$

(1) $\log_5^9(2x) - \frac{1}{\log_5 2x} \cdot \frac{13}{3} + 3 = 0$

Требуется решить:

$$\log_5^9 y + \frac{4}{\log_5 8y} + \frac{1}{3} \frac{1}{\log_5 y} + 3 = 0$$

(2) $\log_5^9 y + \frac{13}{3} \frac{1}{\log_5 y} + 3 = 0$

Возьмем из (1) (2):

$$(\log_5^2(2x) - \log_5^2 y) / (\log_5^2(2x) + \log_5^2 y) = \frac{13}{3} \left(\frac{1}{\log_5 2x} + \frac{1}{\log_5 y} \right)^{-1}$$

$$(\log_5 2x + \log_5 y) / (\log_5^{10} 2x - \log_5^2 y) / (\log_5^2 2x + \log_5^2 y) = \frac{13}{3} \frac{1}{\log_5 2x + \log_5 y}$$

Значит $| a = \log_5 2x, b = \log_5 y \rangle$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} a^5 - \frac{13}{3} + 3 = 0 \\ b^5 + \frac{13}{3} + 3 = 0 \end{cases}$$

$$a+b=?$$

Будем решать систему:

$$(a^2 - b^2)(a^3 + b^3) = \left(\frac{13}{3}\right)^2 - \frac{1}{9} = 0$$

$$(3)(a+b)(b-a)(a^2 + ab + b^2) - \frac{17}{36} = 0$$

Делим на $a+b$. Тогда $a+b = ?$

Будем решать

$$\begin{cases} a^5 + 3a - \frac{13}{3} = 0 \\ b^5 + 3b - \frac{13}{3} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3a^5 + 9a - 13 = 0 \\ 3b^5 + 9b - 13 = 0 \end{cases}$$

$$\text{Сокращение: } 3a^5 + 3b^5 + 9(a+b) = 0$$

$$3(a^5 + b^5) + 9(a+b) = 0$$

$$\begin{aligned} & a^5 + b^5 / (a+b) \\ & a^5 + b^5 = a^3b + a^2b^2 + ab^3 \end{aligned}$$

$$a^3b + a^2b^2$$

$$ab^3$$

$$a^5b + a^3b^3$$

$$-a^9b - a^7b^2$$

$$a^8b^2 - a^7b^3$$

$$a^3b^2 + a^1b^3$$

$$-a^1b^3 - a^3b^5$$

$$-a^2b^3 - a^0b^5$$

0

$$\textcircled{4} (a+b)(3/a^5 - a^2b + a^4b^2 - ab^3 + b^5) + 9 = 0$$

из \textcircled{3}:

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\log_5(2x) \left(\log_5(2^y) + \log_5(2 + \log_5 y) - \frac{13}{3(\log_5 20 \log_5 y)} \right) = 0$$

Пусть $a = \log_5 2^y$, $\beta = \log_5 y$

$$\log_5(2x) (a + \beta + a^2 + \beta^2 - \frac{13}{6}) = 0$$

$$⑤ (a+b)(3ab)(a^2 + ab + b^2 - 8^3) + 13 = 0$$

Возможн. ④ ⑤:

$$(a+b)(3ab)(a^2 - ab + b^2) + 3b^5 + 9 - 3ab(a^2 - ab + b^2) + 13 = 0$$

Решение уравнения $3x^5 + 9 - 13 = 0$

Возможн. $15x^5 - 9 > 0$ при любом x

p -член $3x^5 + 9$ в выражени. \Rightarrow уравнение имеет

plus 1 корень. Аналогично при уравнении $3b^5 + 9 - 13 = 0$
существует 1 корень.

$$\begin{cases} 3a^5 + 9 - 13 = 0 \\ 3b^5 + 9 - 13 = 0 \end{cases}$$

plus 1 решение.

из предыдущих расчётов $a = b$, т.к. нечётн. 1 м.

решение (a, b) $a+b=0$ и $a=b$ (также предположим и убедимся).

Так $a = \log_5 2^y$ и $b = \log_5 y$, т.к.

$$a+b = \log_5 2^y \cdot y = 0 \Rightarrow 2^y y = 1 \Rightarrow \log_5 2^y = 0 \Rightarrow y = 0.5$$

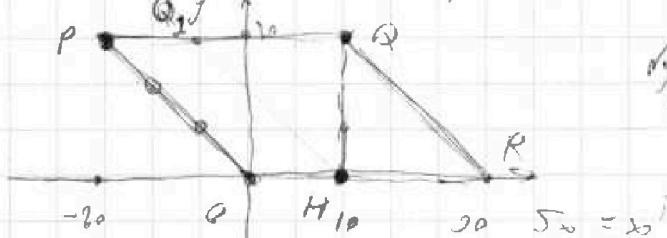
Отв. $\boxed{0.5}$

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

6. Рассмотрим как прошепут 85 раз по оси Ox , и в

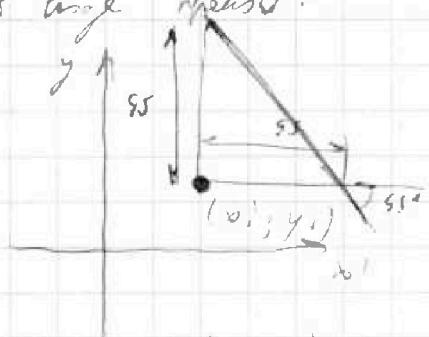


тогда абсолютна же
less x :
 $x' = 50$.

Тогда $x'_1 = 50_1$, $x'_2 = 50_2 \Rightarrow$
 $50_1 - 50_2 + y_2 - y_1 = 85 \Leftrightarrow x'_1 - x'_2 + y_2 - y_1 = 85$.

Линии (x_i, y_i) не могут лежать

в линии прямой:



Так как сдвиг параллелограмма
составляет $\tan 95^\circ \approx 85$, то
линии (x_i, y_i) не могут лежать
внутри $\triangle OPR$ ($x' \leq 10$)
если одна точка лежит в полуплоскости

точки (x_i, y_i) на которой $y_i = 20 + 1 = 21$

точка (x_2, y_2) . Тогда допущено либо

(x_1, y_1) — либо (x_2, y_2) лежат в полуплоскости $OQRH$.

Поскольку одна из них, исключив единую точку
точки $OQRH$ и предполагая ее отсутствие:

$$21 \cdot (10-1) = 21 \cdot 11 = 231 \rightarrow \text{в } OQRH.$$

$$\frac{21}{21} \quad \text{Решение: } 20 + 794 + \dots + 20 = \frac{20+81}{2} = 61 \cdot 80$$

$$\frac{61}{20} \quad \text{Без } = 691 + 3250 = [9131].$$

Также (x_1, y_1) не может лежать в B ,

$$\text{но если: } 19131 \cdot 21 + 334811 = []$$

$$\frac{4331}{22018}$$

$$\frac{22018}{334811}$$

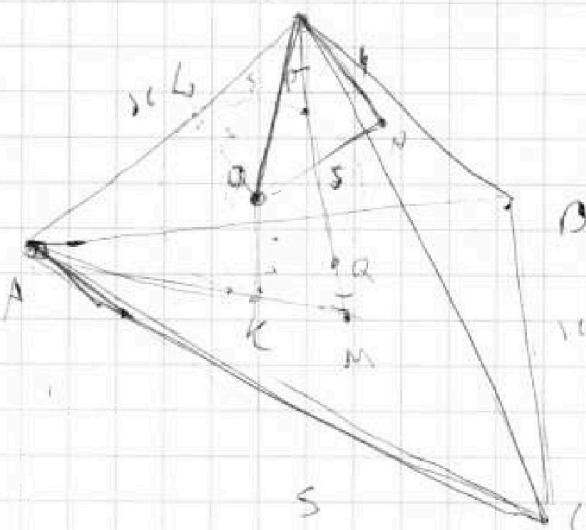
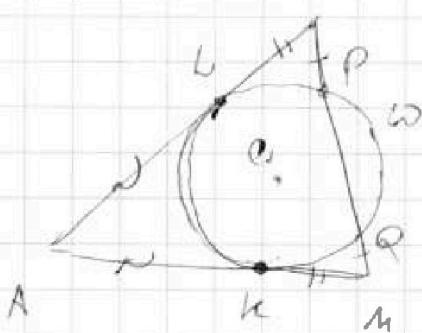
- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

7.

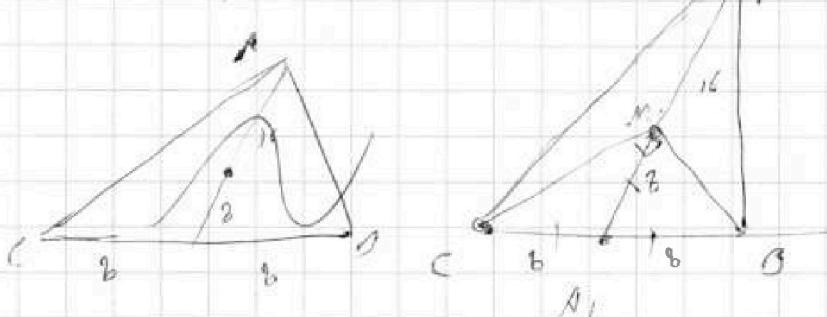
5

a) Тан. $\angle 2$ касаниеТангенс ABC , т.к.Он $\perp AM$, т.к. O —
центр $\odot 2$ Решение ~~одинаковое~~ $\triangle ASM$. Танк решение $\angle 2$ это касание —
однозначно $\angle 1$ центр O .Тан. $\angle 2$ касание \odot $\triangle SPQ$ описано
~~одинаково~~ $\angle 1$ центр O .

$$LS^2 = SP \cdot SQ =$$

$$KM^2 = MQ \cdot MP$$

$$\text{т.к. } MQ = SP \Rightarrow LS^2 = KM^2 \Rightarrow (S \perp KM)$$

AL — лин. касание из односides можно \Rightarrow $\triangle ASM$ — равноб. $\angle AS = AM \Rightarrow (AM = 16)$ Решение $\triangle ABC$ 
 $CA_1 \cdot A_1B = 2 \cdot 16 = 32$. M — меск прес. мерид $\Rightarrow A_1M = \frac{1}{2} AM = 8$.

 $\Rightarrow A_1M \cdot CA_1 = A_1B = 8 \Rightarrow \angle CMN = 90^\circ$ Танк $\angle A_1, B_1 = 90^\circ$

$$S_{ANL} = \frac{1}{2} A_1N \cdot CN = \frac{1}{2} A_1N \cdot CB_1 = \frac{1}{2} \cdot 28 \cdot 16 \cdot \sin 90^\circ = 224$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\Rightarrow \sin \alpha = \frac{100}{12 \cdot 15} = \frac{25}{12 \cdot 5} = \sqrt{\frac{25}{60}} = \sqrt{\frac{25}{60}}$$

$$\Rightarrow \cos \alpha = \sqrt{\frac{60^2 - 10^2}{60}} = \sqrt{\frac{23 \cdot 73}{60}}$$

$$AB = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha} \quad MB = \frac{b^2 + c^2}{2}$$

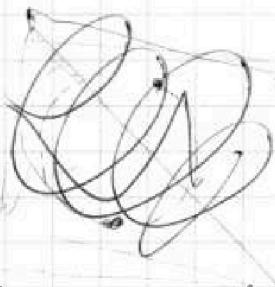
$$MB = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha} = \sqrt{13 \cdot 23} = \frac{\sqrt{13 \cdot 23}}{\sqrt{60}}$$

$$MC = \sqrt{b^2 + c^2 + 2bc \cos \alpha} = CC_1 = \sqrt{3 \cdot 13}$$

$$DB_1 \cdot CC_1 = 8 \cdot \frac{9}{5} \cdot \sqrt{(12 - 2 \cdot \sqrt{\frac{13 \cdot 23}{60}}) / (2 + 1 \cdot \sqrt{\frac{13 \cdot 23}{60}})} = \\ = 8 \cdot \frac{9}{5} \cdot 2 \cdot \sqrt{1 - \frac{60^2 - 10^2}{60^2}} = 8 \cdot \frac{9}{5} \cdot 2 \cdot \sqrt{1 - \frac{50}{60}} = \\ = \frac{8 \cdot 9}{5} \cdot 25 = 150.$$

$$\Rightarrow AA_1 \cdot AB_1 \cdot CC_1 = 150 \cdot 25 = 3750$$

б)

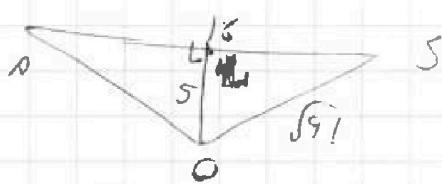


Так как O_1O_2 касательна SBC .

$\angle O_1NO_2 = 90^\circ$, $ON = 5$, $SN = 5$

$$\Rightarrow \text{по Тикуль} \quad OS = \sqrt{ON^2 + SN^2} =$$

Поскольку $\triangle AOS$: Туск. $OS \perp AS \Rightarrow$



$$OS = R = 5 \text{ (из-за касания } AS)$$

$$\Rightarrow AS = \sqrt{OS^2 - ON^2} = 8$$

$$\Rightarrow AK = 10 - 8 = 2.$$

Преу. AK неизвестен, но $AK = AL$, $AL = AK \Rightarrow$

$$AK = 12 \Rightarrow LA_1 = AA_1 - AK = 25 - 12 = 13.$$

Следовательно $LA_1 = 13$.

$\angle A_1A_2A$ касательны $ABC \cup SBC$. Итак, A_1A_2A —



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

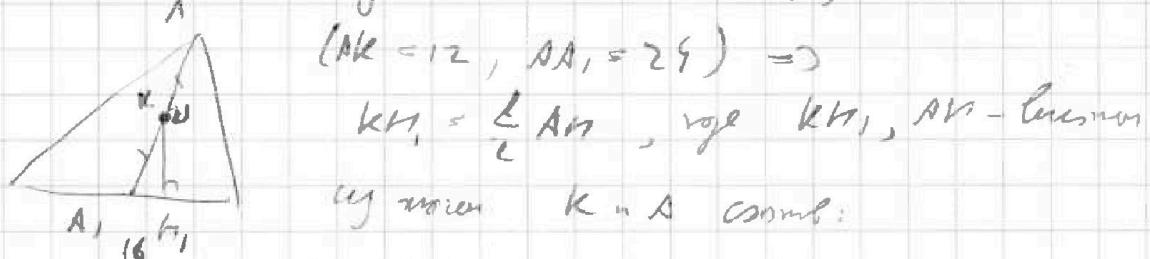
- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input checked="" type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

расстояние от K до BC . Т.к. K -средина AA_1 ,

$$(AK = 12, AA_1 = 24) \Rightarrow$$



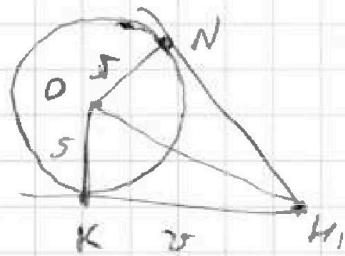
$KK_1 = \frac{1}{2} AK$, т.е. KK_1 , AK - бисектрисы

известен $K \perp A$ соотв.:

$$\text{но } AK \cdot BC \cdot \frac{1}{2} \leq S < 100 \text{ см}^2$$

$$AK = \frac{100}{16} = \frac{25}{4}$$

Т.к. $\angle 2$ касательна ABC в B , то расстояние
от N до BC можно выразить через r и $O \perp BC$.



$$\text{б) } \angle KK_1O = \frac{5}{25} = \frac{1}{5} = \frac{9}{45}$$

$$\Rightarrow \angle NK_1K = \text{заряж} \frac{4}{5}$$

$$\text{Отв: } \boxed{\text{заряж } \frac{4}{5}}$$