



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3



1. [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^8 3^{14} 5^{12}$ ,  $bc$  делится на  $2^{12} 3^{20} 5^{17}$ ,  $ac$  делится на  $2^{14} 3^{21} 5^{39}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник  $ABC$ . Окружность, касающаяся прямой  $BC$  в точке  $B$ , пересекает высоту  $CD$ , проведённую к гипотенузе, в точке  $F$ , а катет  $AC$  – в точке  $E$ . Известно, что  $AB \parallel EF$ ,  $AD : DB = 5 : 2$ . Найдите отношение площади треугольника  $ABC$  к площади треугольника  $CEF$ .

3. [4 балла] Решите уравнение  $10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$ .

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа  $x$  и  $y$  удовлетворяют равенствам

$$\log_5^4(2x) - 3 \log_{2x} 5 = \log_{8x^3} 625 - 3, \quad \text{и} \quad \log_5^4 y + 4 \log_y 5 = \log_{y^3} 0,2 - 3.$$

Найдите все возможные значения произведения  $xy$ .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0;0)$ ,  $P(-16;80)$ ,  $Q(2;80)$  и  $R(18;0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45$ .

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида  $SABC$ , медианы  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $M$ . Сфера  $\Omega$  касается ребра  $AS$  в точке  $L$  и касается плоскости основания пирамиды в точке  $K$ , лежащей на отрезке  $AM$ . Сфера  $\Omega$  пересекает отрезок  $SM$  в точках  $P$  и  $Q$ . Известно, что  $SP = MQ$ , площадь треугольника  $ABC$  равна 100,  $SA = BC = 16$ .

а) Найдите произведение длин медиан  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$ .

б) Найдите двугранный угол при ребре  $BC$  пирамиды, если дополнительно известно, что  $\Omega$  касается грани  $BCS$  в точке  $N$ ,  $SN = 4$ , а радиус сферы  $\Omega$  равен 5.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$N. ab: 2^4 \cdot 3^{14} \cdot 5^{12}, bc: 2^{12} \cdot 3^{20} \cdot 5^{17}, ac: 2^{14} \cdot 3^{24} \cdot 5^{25}$$

$$ab \cdot bc \cdot ac = (abc)^2 : 2^{34} \cdot 3^{55} \cdot 5^{65} \Rightarrow abc: 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{32}, abc: 3^{21}, \text{ так как } abc \in \mathbb{N}$$

$abc$  не может содержать в своем разложении делителей в нечетной степени,

а если стороны треугольника  $\leq 28$ , то  $(abc)^2 : 2^{34} \cdot 3^{55} \cdot 5^{65}$ . Пусть числа  $a = 2^{d_1} \cdot 3^{d_2} \cdot 5^{d_3}$ ,

$$b = 2^{d_1} \cdot 3^{d_2} \cdot 5^{d_3}, c = 2^{d_1} \cdot 3^{d_2} \cdot 5^{d_3}. \text{ Тогда } d_1 + d_2 + d_3 \geq 17, d_1 + d_2 \geq 8, d_2 + d_3 \geq 17, d_1 + d_3 \geq$$

$$\geq 14. \text{ Так как нужно минимизировать сумму } d_1 + d_2 + d_3, \text{ пусть она равна } 17 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$  легко можно найти, что  $d_1 = 5, d_2 = 3, d_3 = 9$ . Аналогично с  $\beta_1, \beta_2$  и  $\beta_3$

получаем, что  $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3$  может быть равно 28 при  $\beta_1 = 7, \beta_2 = 7, \beta_3 = 14$ .

$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \geq 34, \beta_1 + \beta_2 \geq 18, \beta_2 + \beta_3 \geq 17, \beta_1 + \beta_3 \geq 39. \text{ Из последнего условия}$$

следует, что  $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \geq 39$ . Легко можно подобрать, например,  $\beta_1 = 19, \beta_2 = 20, \beta_3 = 0$

(так необходимо минимизировать  $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3$ , без чего наименьшей стороне  $b$

число будет простым множителем, тем число меньше, поэтому чтобы не-

зам  $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3$  не просто  $\geq 39$ , а  $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 39$ . Тогда минимальное

$$\text{значение } abc \text{ равно } 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{32} = 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{32}$$

$$\text{Ответ: } 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{32}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



12. Дано:

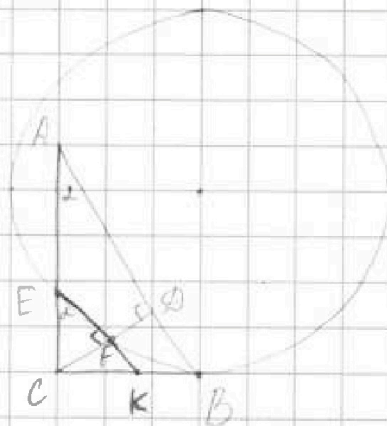
$\triangle ABC$  - равнобедренный

$AB \parallel EF$

$$\frac{AD}{DB} = \frac{5}{2}$$

Найти:  $\frac{S_{ABC}}{S_{EFC}} = ?$

Решение:  $\frac{S_{ABC}}{S_{EFC}} = k^2$ ,  $k$  - коэффициент подобия.



Пусть  $AD = 5x$ ,  $DB = 2x \Rightarrow CA^2 = 7x \cdot 2x$

Поскольку  $EF \parallel AB \Rightarrow \angle EFC = 90^\circ$ , Пусть  $\angle CAB = \alpha \Rightarrow \angle ECF = 90^\circ - \alpha = \angle ABC$

$$\triangle ADC \sim \triangle ACB \text{ (по двум углам)} \Rightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{AC}{AB} \Rightarrow AC^2 = AD \cdot AB = 10x \cdot (5x + 2x)$$

$$\triangle ADC \sim \triangle EFC \text{ (по двум углам)} \Rightarrow \frac{AD}{EF} = \frac{AC}{CF}$$

$$\triangle EFC \sim \triangle ACB \text{ (по двум углам)} \Rightarrow \frac{EF}{AC} = \frac{EC}{AB} = \frac{CF}{BC} \Rightarrow EF \cdot AB = EC \cdot AC$$

По свойству касательной и секущей  $BC^2 = EC \cdot AC$  Пусть  $EF \cap BC = K$

$$\frac{EF}{FK} = \frac{AD}{DB} = \frac{5}{2} \Rightarrow EF = 5y, FK = 2y \Rightarrow CF^2 = 10y^2$$

$$\triangle EFC \sim \triangle BCK \Rightarrow \frac{CF}{BK} = \frac{EF}{CK}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

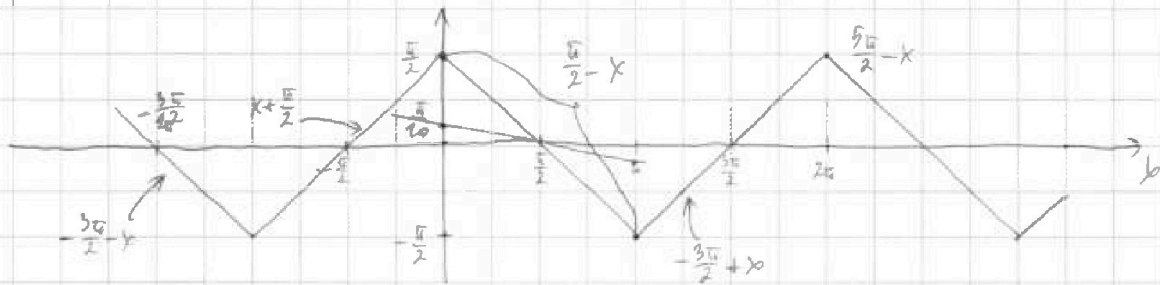
1  2  3  4  5  6  7

МОФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№3.  $\cos \sin(\cos x) = \pi - 2x \Rightarrow \sin(\cos x) = \frac{\pi - 2x}{20}$  ;  $\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\pi - 2x}{20} \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$

Нарисуем график правой и левой части:



$\frac{\pi - 2x}{20} = k \cdot \frac{\pi}{2} - x$ , где  $k = 1, 5, 9, \dots, -3, -7, \dots$  (целые значения, кратные 4 с осевыми)  
 $\frac{\pi - 2x}{20} = h \cdot \frac{\pi}{2}$ , где  $h = -1, 3, 7, \dots, -5, -9, \dots$

$\begin{cases} \pi - 2x = 5k\pi - 20x \\ \pi - 2x = 20x - 5\pi h \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{(5k-1)\pi}{8} \\ x = \frac{(5h+1)\pi}{12} \end{cases}$

При этом  $\frac{\pi - 2x}{20} \geq -\frac{\sqrt{2}}{2}$  и  $\frac{\pi - 2x}{20} \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \begin{cases} \pi - 2x \geq -5\pi \\ \pi - 2x \leq 5\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq 3\pi \\ x \geq -2\pi \end{cases}$

Из первой серии  $x = \frac{(5k-1)\pi}{8}$ :  $\begin{cases} x = \frac{\pi}{8}; 3\pi/8, \dots, \text{ при } k > 1: x > 3\pi \\ x = -2\pi, \dots, \text{ при } k < -3: x < -2\pi \end{cases}$

Из второй серии  $x = \frac{(5h+1)\pi}{12}$ :  $\begin{cases} x = \frac{\pi}{12}; 3\pi/4, \dots, \text{ при } h > 1: x > 3\pi \\ x = -\frac{\pi}{3}; -2\pi, \dots, \text{ при } h < -5: x < -2\pi \end{cases}$

Ответ: уравнение имеет 6 решений:  $x = -2\pi; x = -\frac{\pi}{3}; x = \frac{\pi}{8}; x = \frac{3\pi}{8}; x = 3\pi$ .



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{Ич. } \begin{cases} ax - 3y + 4b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 1) + (x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \end{cases}$$

$$(x^2 + y^2 - 1) + (x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0$$

Второе уравнение системы задает две окружности, уравнения которых:

$$x^2 + y^2 = 1 \quad \text{и} \quad x^2 + (y - 10)^2 = 6^2$$

Нарисуем графики этих окружностей.

Первое уравнение системы задает прямую

$$y = \frac{a}{3}x + \frac{4}{3}b$$

Чтобы система имела решение,

необходимо, чтобы эта прямая  $y = \frac{a}{3}x + \frac{4}{3}b$

пересекла 2 окружности в 4 точках.

Из рисунка видно, что при  $a = a_1$

прямая касается окружностей и при увеличении

$a$  не будет достигаться 4 решений. Заметим, что графики симметричны

относительно оси  $y$ ,  $a_1 = -a_2$ . Осталось найти это граничное

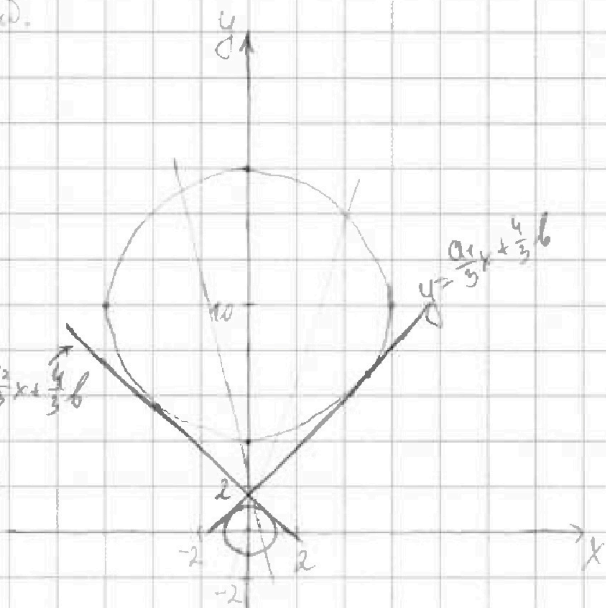
положение. При этом ответ будет выглядеть так:  $a \in (-\infty, -a_1) \cup (a_1, +\infty)$

Точки  $a_1$  и  $-a_1$  исключены, т.к. при них не достигается 4 решений, по-

тому что прямая касается обеих окружностей и подбрав такое  $b$ , что

она пересекает 2 окружности в 4 точках не удастся, потому что  $b$  опреде-

ляет смещение вверх или вниз.  $\rightarrow$  см. англ стр



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

и продолжения). Чтобы найти  $a_1$ , необходимо  $y = \frac{a_1}{3}x + \frac{4}{3}b$  подставить  
в 2 уравнения окружностей.

$$x^2 + \left(\frac{a_1 x}{3} + \frac{4}{3}b\right)^2 = 1 \Rightarrow 9x^2 + a_1^2 x^2 + 8a_1 b x + 16b^2 - 9 = 0$$

Поскольку прямая касается окружности, то  $D_1 = 0 \Rightarrow 16a_1^2 b^2 - (9 + a_1^2)(16b^2 - 9) = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 9a_1^2 + 81 - 9 \cdot 16b^2 = 0 \Rightarrow a_1^2 + 9 = 16b^2 \quad (1)$$

$$x^2 + \left(\frac{a_1 x}{3} + \frac{4}{3}b - 1\right)^2 = 36 \Rightarrow x^2(9 + a_1^2) - x(6a_1 - 8a_1 b) - 240b + 16b^2 + 649 = 0$$

$$D_2 = 0 \Rightarrow (30a_1 - 4a_1 b)^2 - (9 + a_1^2) \cdot (16b^2 - 240b + 649) = 0 \Rightarrow a_1^2(16b^2 - 240b + 900) - (9 + a_1^2) \cdot$$

$$\cdot (16b^2 - 240b + 649) = 0 \Rightarrow (16b^2 - 240b + 900)(a_1^2 - 9) + (9 + a_1^2) \cdot 36 \cdot 9 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (-9) \cdot (9 + a_1^2) \cdot 36 + 16b^2 - 240b + 900 = 0 \Rightarrow -(9 + a_1^2) \cdot 36 + 16b^2 - 240b + 900 = 0$$

С учетом (1), что  $a_1^2 + 9 = 16b^2$ :  $-16b^2 \cdot 36 + 16b^2 - 240b + 900 = 0 \quad | :4$

$$-4b^2 \cdot 60 + 16b^2 - 240b + 900 = 0 \Rightarrow -28b^2 - 60b + 225 = 0 \Rightarrow 28b^2 + 60b - 225 = 0$$

$$D_3 = 3600 + 28 \cdot 45 = 9 \cdot 4 + 9 \cdot 5 \cdot 28 = 9 \cdot 244$$

$$b_{3,2} = \frac{60 \pm 3 \cdot 11}{28} = \frac{42}{28} \text{ или } \frac{72}{28}, \quad b < 0 \text{ не подходит} \Rightarrow b = \frac{42}{28} = \frac{3}{2}$$

$$a_1^2 + 9 = 16 \cdot \frac{9}{4} \Rightarrow a_1^2 = 36 - 9 = 27 \Rightarrow a_1 = 3\sqrt{3}$$

При  $a > 0$ : чем больше  $a$ , тем ближе к оси  $y$  график прямой, при  $a < 0$  — на-  
оборот  $\Rightarrow a \in (-\infty; -3\sqrt{3}) \cup (3\sqrt{3}; +\infty)$

Ответ:  $a \in (-\infty; -3\sqrt{3}) \cup (3\sqrt{3}; +\infty)$ .

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$5 \cdot \log_5^4(2x) - 3 \log_{2x}^5 5 = \log_{2x} 625 - 3$$

$$\log_5^4 y + 4 \log_y 5 = \log_y^5 0,2 - 3$$

$$\log_5^4(2x) - 3 \log_{2x}^5 5 = \frac{4}{3} \log_{2x}^5 5 - 3$$

$$\log_5^4 y + 4 \log_y 5 = -\frac{1}{3} \log_y^5 5 - 3$$

$$\log_5^4(2x) = \frac{13}{3} \log_{2x}^5 5 - 3$$

$$\log_5^4 y = -\frac{13}{3} \log_y^5 5 - 3$$

$$\log_5^4(2x) = \frac{13}{3 \log_5(2x)} - 3$$

$$\log_5^4 y = -\frac{13}{3 \log_5 y} - 3$$

$$3 \log_5^5 2x = 13 - 3 \log_5 2x \quad (1)$$

$$3 \log_5^5 y = -13 - 3 \log_5 y \quad (2)$$

Сложим (1) и (2):  $3(\log_5^5 2x + \log_5^5 y) = -3(\log_5 2x + \log_5 y)$

$$\log_5^5 2x + \log_5^5 y = -(\log_5 2x + \log_5 y)$$

$$\log_5^5 2x + \log_5 2x = -\log_5 y - \log_5 y$$

$$\log_5^5 2x + \log_5 2x = -(\log_5 y + \log_5 y)$$

Введем функцию  $f(t) = \log_5^5 t + \log_5 t$ . Тогда можно записать, что

$f(2x) = -f(y)$ . Функция  $f(t)$  — возрастающая. Есть случаи, когда  $f(2x) =$

$= -f(y) > 0 \Rightarrow 2x = y \Rightarrow x = y = \frac{1}{2}$ .  $f(y) > 0$  при  $y = 1 \Rightarrow xy = \frac{1}{2}$ . В других

случаях, когда  $2x \neq y$ , заметим, что  $f(\frac{1}{2x}) = -f(\frac{1}{y})$ , т.к.  $\log_5^5 t$  будет

иметь тот же знак, что и  $\log_5 t$ , т.е.  $t \cdot \frac{1}{t} = 1 \Rightarrow 2x \cdot y = 1 \Rightarrow xy = \frac{1}{2}$ .

Ответ:  $xy = \frac{1}{2}$ .





На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

16. Так как координаты  $x_1, x_2, y_1, y_2$  точек  $A$  и  $B$  — целые числа ~~то~~ и

$$5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45 \Rightarrow y_2 - y_1 = 5$$

Одна из сторон параллелограмма равна 18, а другая  $-\sqrt{80^2 + 16^2} = 16\sqrt{26}$ .

Если  $y_2 - y_1 = 0$ , то все точки лежат на одной ~~горизонтальной~~ <sup>горизонтальной</sup> прямой,

но  $x_2 - x_1 = 9$ , в первом ряду будет 18 пар таких точек.





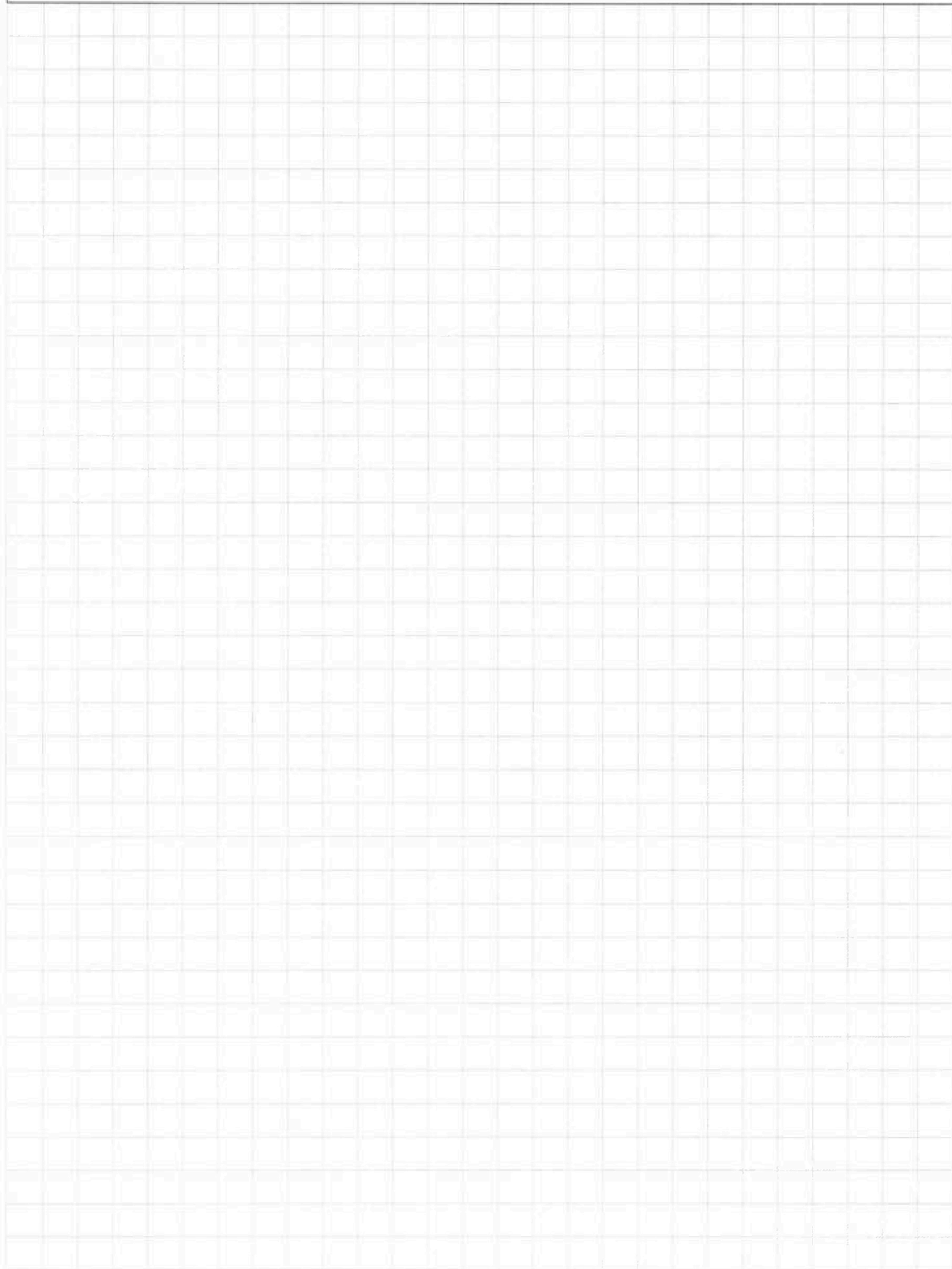
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

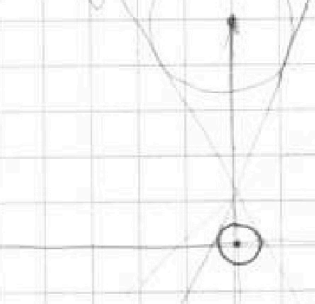
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 1) \cdot (x^2 + y^2 - 2ay + 6) = 0 \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 = 1 \quad x^2 + (y - a)^2 = 6^2$$



Все  $a$ , для которых существует  
 $\exists$  прямая, которая касается  
именно 4 решений.

$$ax - 3y + 4b = 0$$

$$y = \frac{a}{3}x + \frac{4}{3}b$$

$$\frac{6+3a}{27} \quad \frac{6+4a}{27}$$

$$b = \frac{36+2a}{27}$$

$$x^2 + \frac{a^2}{9}x^2 + \frac{8a}{3}bx + \frac{16}{9}b^2 = 1 - 9$$

$$9x^2 + a^2x^2 + 8abx + 16b^2 - 9 = 0$$

$$D_1 = 16a^2b^2 - (9+a^2) \cdot (16b^2 - 9) =$$

$$= 16ab^2 - 9 \cdot 16b^2 - 16ab^2 + 81 + 9a^2 =$$

$$= 9a^2 - 9 \cdot 16b^2 + 81 = 9 \cdot (a^2 - 16b^2 + 9) =$$

$$D_1 = 36 + 2a \cdot 4b \quad a^2 = 0 \quad a^2 = 16b^2 - 9$$

$$x^2 + \left(\frac{ax}{3} - 4b + \frac{4b}{3}\right)^2 = 36$$

$$x^2 + \frac{a^2x^2}{9} - \frac{8axb}{3} + \frac{16ab}{9} - \frac{16ab}{3} + 16b^2 - \frac{16b^2}{3} + 36 = 0$$

$$x^2 + \frac{a^2x^2}{9} - \frac{16ab}{3} + \frac{16b^2}{9} = 36 \quad | \cdot 9$$

$$9x^2 + a^2x^2 - 48ab + 16b^2 - 48ab + 144 - 48ab + 16b^2 - 36 \cdot 9 = 0$$

$$x^2(9+a^2) - x(160a - 8ab) - 240b + 16b^2 + 144 - 36 \cdot 9 = 0$$

$$x^2(a^2+9) - 2x(30a - 4ab) - 240b + 16b^2 + 64 \cdot 9 = 0$$

$$D_1 = (30a - 4ab)^2 - (a^2+9) \cdot (16b^2 - 240b + 576) = 0$$

$$a^2(16b^2 - 240b + 576) - (a^2+9) \cdot (16b^2 - 240b + 576) + (a^2+9) \cdot 36 \cdot 9 =$$

$$= (16b^2 - 240b + 576)(a^2 - a^2 - 9) - (a^2+9) \cdot 36 \cdot 9 + (16b^2 - 240b + 576) \cdot (-9) - (a^2+9) \cdot 36 \cdot 9 =$$

$$= (-9) \cdot (a^2+9) \cdot 36 + 16b^2 + 252a \cdot 16b^2 - 240b + 576$$

$$16b^2 + 252a \cdot 16b^2 - 240b + 576 + (4b - 20)^2 = 0$$

$$36(a^2+9) + (4b - 20)^2 = 0$$

$$16 \cdot 37 b^2 - 240 \cdot 900$$

$$4 \cdot 17b^2 - 60b + 225 = 0$$

$$900$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{aligned}
 & \text{а) } 5 \cdot \log_5^4(2x) - 3 \log_5 5 = \log_5 625 - 3 \\
 & \log_5^4(2x) - 3 \log_5 5 = \log_5 5^4 - 3 \\
 & \log_5^4(2x) - 3 \log_5 5 = \frac{4}{3} \log_5 5 - 3 \\
 & \log_5^4 2x = \frac{13}{3} \log_5 5 - 3 \\
 & \log_5^4 2x = \frac{13}{3} \log_5 2x - 3 \quad | -3 \log_5 2x \\
 & 3 \log_5^3 2x + 9 \log_5 2x - 13 = 0 \\
 & \log_5^4 2x = t \\
 & 3t^3 + 9t - 13 = 0
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 & \log_a b = \frac{\log c}{\log a} \\
 & \log_5^4 y + 4 \log_5 5 = \log_5 625 - 3 \\
 & \log_5^4 y + 4 \log_5 5 = \frac{4}{3} \log_5 5 - 3 \\
 & \log_5^4 y = -\frac{13}{3} \log_5 5 - 3 \\
 & \log_5^4 y = -\frac{13}{3} \cdot \frac{1}{\log_5 5} - 3 \\
 & \log_5^4 y = -\frac{13}{3} - 3 \\
 & \log_5^4 y = -\frac{22}{3} \\
 & \log_5 4 + \log_5 2x = \log_5 4x \\
 & \log_a b = \log_b a \\
 & \log_5 4 = 2 \\
 & \log_5 2 = \frac{1}{2} \\
 & \log_5 4 = \frac{1}{2} \\
 & \log_5 2 = -1 \\
 & \log_5 2 = -1 \\
 & \log_5 2 = -2 \\
 & \log_5 \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \\
 & 4^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{4}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \log_5^4 t = \log_5 t - 3 \\
 & \log_5 t = -\log_5 y - 3 \\
 & 3 \log_5^3 2x + 9 \log_5^2 y = -3 \log_5 y \\
 & \log_5^3 2x = \frac{1}{3}
 \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$4+5+4+5+5+5+6 = 34$$

М.

$$ab = 48$$

$$a+c = 46$$

$$b+c = 21$$

$$b=9$$

$$a=9$$

$$a=2^2 \cdot 3^2$$

$$ab: 2^5 \cdot 3^4 \cdot 2^2$$

$$bc: 2^2 \cdot 3^2 \cdot 3^4$$

$$ac: 2^4 \cdot 3^2 \cdot 3^4$$

$$b=2^2 \cdot 3^2$$

$a \leq c$

$$2a+3b=63$$

$$ab+bc+ac = 2 \cdot 3^4 \cdot 5^5 \cdot 6^6$$

$$a+c = 2 \cdot 3^4 \cdot 5^5 \cdot 6^6$$

$$a+b = 2 \cdot 3^4 \cdot 5^5 \cdot 6^6$$

$$abc \geq 2ac$$

$$S_{ABC} = ?$$

$$S_{CEF} = ?$$

$$ab = 24$$

$$bc = 21$$

$$ac = 21$$

$$a-b = 1$$

$$ab = 21$$

$$bc = 21$$

$$ac = 21$$

$$abc = 21$$

$$a+b+c = 14$$

$$a=4$$

$$b=7$$

$$c=3$$

$$abc = 84$$

$$bc = 21$$

$$ab = 28$$

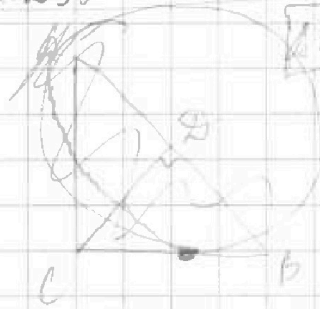
$$2(ab+bc) \geq 69$$

$$abc \geq 39$$

$$39$$

$$a=14$$

$$b=0$$



$$\frac{AE}{EB} = \frac{5}{2}$$

$$S_{ABC} = ?$$

$$S_{CEF} = ?$$

AM || EP

$$\frac{AE}{EB} = \frac{5}{2}$$

$$\triangle ADC \sim \triangle ACB \Rightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{AC}{AB}$$

$$AD = 5, DB = 2$$

$$CF^2 = 2 \cdot 5 = 10$$

$$\triangle ADC \sim \triangle EPC$$

↓

$$\frac{AD}{EP} = \frac{CD}{CP}$$

$$\triangle BCD \sim \triangle CEP$$

↓

$$\frac{CD}{EP} = \frac{BD}{CP}$$

$$\frac{AD}{EP} = \frac{BD}{CP}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

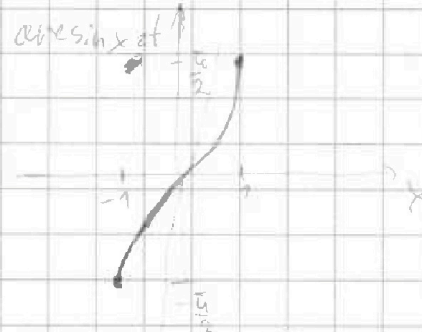
1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Р3.  $10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$

$\sin t = x$   
 $\arcsin 0 = 0$   
 $\arcsin \cos x$



$-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin(\cos x) \leq \frac{\pi}{2}$

$\frac{\pi - 2x}{10} \leq \frac{\pi}{2}$

$\frac{\pi - 2x}{10} - \frac{\pi}{2} \leq 0$

$\frac{\pi - 2x}{10} > -\frac{\pi}{2}$

$\arcsin(\cos x) = \pi - 2x$

$x < 3\pi$

Def:  $x \in [0; \pi]$

$\frac{\pi - 2x}{10} < \frac{\pi}{2}$

$x \in [0; 3\pi]$

$\pi + 2 > 0$

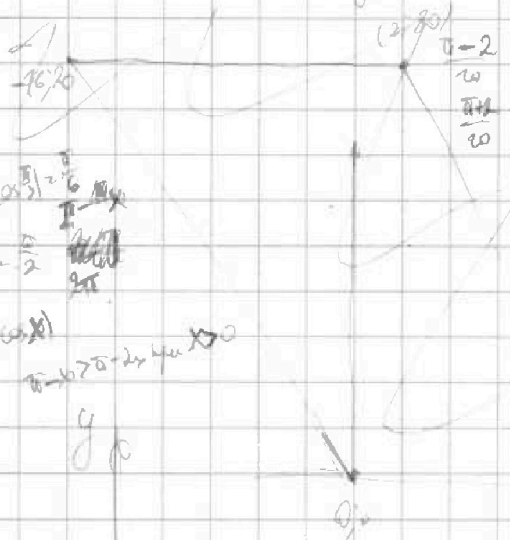
Def:  $x \in [\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}]$

$x > -2\pi$

$\pi - 2 > 0$

$\arcsin(\cos x) > 0$

$\frac{\pi - 2x}{10}$



$5x^2 - 6x + y_2 y_1 = 0$

$5(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 0$

$(x_2 - x_1) + \frac{y_2 - y_1}{5} = 0$

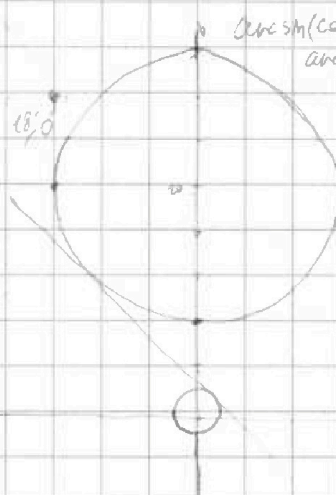
$\arcsin(\cos \frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}$   
 $\arcsin(\cos \frac{3\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}$

$\arcsin(\cos x)$

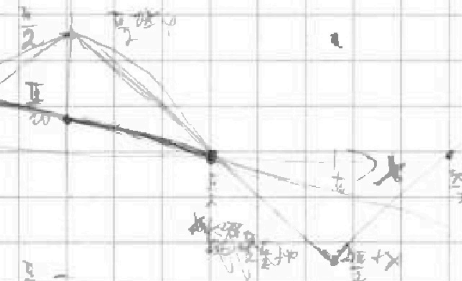
$\arcsin(\sin x) = x$

$\arcsin(\cos x) = \arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - x)) = \frac{\pi}{2} - x$

$\arcsin(\cos \frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}$   
 $\arcsin(\cos \frac{3\pi}{2}) = -\frac{\pi}{2}$



$\frac{\pi - 2x}{10}$





На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$BC^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

$$\frac{BC}{AB} = \frac{a \cos \gamma}{b}$$

$$\frac{EC}{AC} = \frac{EF}{AB}$$

$$CF = b \cos \gamma$$

$$a \cos \gamma$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

