



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ



11 КЛАСС. Вариант 1

- [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^9 3^{10} 5^{10}$, bc делится на $2^{14} 3^{13} 5^{13}$, ac делится на $2^{19} 3^{18} 5^{30}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
- [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой BC в точке B , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке F , а катет AC – в точке E . Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 3 : 1$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF .
- [4 балла] Решите уравнение $5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$.
- [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

- [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2}(3^{11}) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

- [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-14; 42)$, $Q(6; 42)$ и $R(20; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$.
- [6 баллов] Дано треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 90, $SA = BC = 12$.
 - Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1 .
 - Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} n1 & \left\{ \begin{array}{l} ab = n \cdot 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10} \\ bc = m \cdot 2^{11} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13} \\ ac = k \cdot 2^9 \cdot 3^3 \cdot 5^{50} \end{array} \right. \\ & m, n, k \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

$$abc = \sqrt{ab^2c^2} = \sqrt{n \cdot m \cdot k \cdot 2^{42} \cdot 3^{41} \cdot 5^{53}}$$

или у нас есть выражение, что
n \cdot m \cdot k делится на $3^{2k+1} \cdot 5^{2g+1}$ (т.к. сюда
поступают делители вида $3^a \cdot 5^b$ (abc \in \mathbb{N})) где
 $k, g \in \{0, 1, \dots, 10\}$

также $a_i -$ степень i в числе a может быть $(a : L^{a_i}) \in \mathbb{Z}$ и a_i (натуральное)

значит

$$\begin{cases} a_1 + b_1 = 9 + n_1 & \text{т.к. } n_1 \text{ натуральное} \\ b_1 + c_1 = 14 + m_1 & \min m_1 \text{ кратно} \\ a_1 + c_1 = 19 + k_1 & n_1 = m_1 = k_1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a_1 + b_1 = 9 \\ b_1 + c_1 = 14 \\ a_1 + c_1 = 19 \end{cases} \quad \begin{cases} a_1 + b_1 = 9 \\ b_1 + c_1 = 14 \\ a_1 + c_1 = 19 \end{cases} \quad \begin{cases} 2c_1 = 28 \\ c_1 = 14 \\ a_1 = 19 - c_1 \end{cases} \quad \begin{cases} c_1 = 12 \\ b_1 = 2 \\ a_1 = 7 \end{cases}$$

одинакового порядка с 3

$$\begin{cases} a_2 + b_2 = 10 \\ b_2 + c_2 = 13 \\ a_2 + c_2 = 18 \end{cases} \quad \begin{cases} a_2 + b_2 = 8 \\ c_2 \in \mathbb{N} \cup \{0\} \Rightarrow 2c_2 \text{ четное} \\ a_2 + c_2 = 18 \end{cases} \quad \begin{cases} a_2 + b_2 = 11 \\ b_2 = 3 \\ a_2 + c_2 = 18 \end{cases}$$

также, т.к. у нас есть ограничение на n , то это означает

значение 5:

$$\begin{cases} a_5 + b_5 = 10 \\ b_5 + c_5 = 13 \\ a_5 + c_5 = 30 \end{cases} \quad \begin{cases} a_5 + b_5 + 2b_5 = 23 \\ a_5 + c_5 = 30 \\ 2b_5 = 7 \text{ мин. возможное } 2b_5 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a_5 + b_5 = 11 \\ b_5 = 3 \\ a_5 + c_5 = 18 \end{cases}$$

также, т.к. у нас есть ограничение на n , то это означает

$$\begin{cases} a_5 + c_5 = 30 \\ b_5 = 0 \\ a_5 = 10 + 7 - 0 \\ c_5 = 13 - 0 \end{cases} \quad n = 3 \cdot 5^2$$

Значит все выполнено,
т.к. если нет $\frac{1}{2}$ делителя хотя бы
одного из трех то оно не делится на 3, поэтому
решения не существует.

$$abc = \sqrt{3 \cdot 5^2 \cdot 2^{42} \cdot 3^{41} \cdot 5^{53}} =$$

$$= \sqrt{2^{41} \cdot 3^{40} \cdot 5^{60}} = 2^{21} \cdot 3^{20} \cdot 5^{30}$$

$$\text{Ответ: } \min abc = 2^{21} \cdot 3^{20} \cdot 5^{30}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

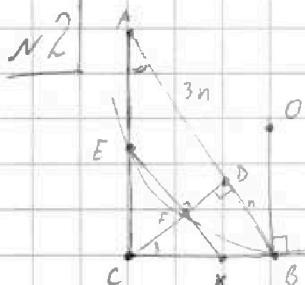
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Дн: продолжить EF до пересечения с BC в точке X

Пусть $\triangle ABC$ -внешний угол при вершине A , то $\triangle CAD \sim \triangle DBA \sim \triangle ABC \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{BD}{DC} = \frac{DC}{AD} \quad DC^2 = 3n^2 \quad DC = n\sqrt{3}$$

$$\tan \angle A = \frac{DC}{AD} = \frac{\sqrt{3}n}{3n} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \angle A = 30^\circ \Rightarrow BC = \frac{1}{2}AB - 2n$$

$$AC = \frac{\sqrt{3}}{2}AB = \sqrt{3}n$$

$$AD = 3n \quad DB = n$$

$$EF \parallel AB \Rightarrow \begin{cases} \angle CEF + \angle CAD = 30^\circ \\ \angle CFE = \angle DBA = 90^\circ \end{cases} \Rightarrow \triangle CEF \sim \triangle CDA \sim \triangle ABC$$

$$AB \parallel EF$$

$$\text{Будем } \triangle CX: \quad XB^2 = XC \cdot XF \quad \triangle CEF \sim \triangle CX \text{ (по } \triangle CEX \text{ - общему, } \angle CEF = \angle CXF)$$

$$\triangle CFX \sim \triangle CEF \sim \triangle ABC \Rightarrow \frac{AD}{DB} = \frac{EF}{FX} \Rightarrow EF = 3FX \quad FX = 4XF$$

$$XB^2 = 4XF^2; \quad \angle DCB = \angle A = 30^\circ \Rightarrow FX = \frac{1}{2}CX \Rightarrow CX^2 = 4FX^2$$

$$XB^2 = CX^2 + XE^2 \quad XE > 0 \Rightarrow XB = CX = \frac{1}{2}BC$$

$$X \text{-середина } BC \Rightarrow EX \text{-средняя линия } \triangle ABC \Rightarrow EF = \frac{1}{2}AD = \frac{3}{2}n; \quad CF = \frac{1}{2}CD = \frac{\sqrt{3}}{2}n$$

$$S_{CEF} = \frac{3}{2}n \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}n \cdot \frac{1}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{8}n^2 \quad S_{ABC} = 2n \cdot 2\sqrt{3}n \cdot \frac{1}{2} = 2\sqrt{3}n^2$$

$$\frac{S_{ABC}}{S_{CEF}} = \frac{2\sqrt{3}n^2}{\frac{3\sqrt{3}}{8}n^2} = \frac{16}{3}$$

Ответ: $16/3$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

н.3

$$\arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2} \quad \text{тогда} \quad \arcsin(\cos x) = d \\ \arcsin(d) \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\sin d = \cos x \Rightarrow d = \frac{\pi}{2} \pm x + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x + \frac{\pi}{2} \in [-7,5\pi, 7,5\pi]$$

$$\text{тогда} \quad 5x = x + \frac{\pi}{2} \quad d = \frac{x}{5} + \frac{\pi}{10}$$

$$x \in [-3\pi, 2\pi]$$

$$\text{тогда} \quad \frac{x}{5} + \frac{\pi}{10} = \frac{\pi}{2} + x + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$2x + 10 = 5\pi + 10\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$1) 8x = -4\pi - 10\pi n$$

$$n=1: x = -3\pi, \text{ если } n < 0 \text{ то } x < \rightarrow \text{запись } n$$

$$\begin{cases} x = -\frac{\pi}{2} - 0,5\pi n \\ n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$n=0: x = -\frac{\pi}{2} \in [-3\pi, 2\pi]$$

$$\begin{cases} x \in [-3\pi, 2\pi] \\ n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$n=-1: x = -2\pi \in [-3\pi, 2\pi] \text{ если число } n \neq 0 \text{ все, что получим}$$

второго краинего ун. в этом случае $x_1 \in \{-3\pi, -\frac{\pi}{2}, 2\pi\}$

$$2) 12x = 4\pi + 10\pi n$$

$$n=1: x = 2\pi \in [-3\pi, 2\pi] \text{ если } n > 0 \rightarrow \text{запись } n$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + \frac{5}{3}\pi n \\ n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$n=0: x = \frac{\pi}{3} \in [-3\pi, 2\pi]$$

$$\begin{cases} x \in [-3\pi, 2\pi] \\ n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$n=-1: x = -\frac{4}{3}\pi \in [-3\pi, 2\pi] \text{ Второе краинее исчисл}$$

$$\text{в этом случае } x_2 \in \{-3\pi, -\frac{4}{3}\pi, \frac{\pi}{3}, 2\pi\}$$

$$\begin{cases} x = x_1 \\ x = x_2 \end{cases}$$

Ответ. $\{-3\pi, -\frac{4}{3}\pi, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, 2\pi\}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{№ 4} \quad \begin{cases} ax + 2y - 36 = 0 \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 18x + 36) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2y = 36 - ax \\ x^2 + y^2 = 9 \end{cases}$$

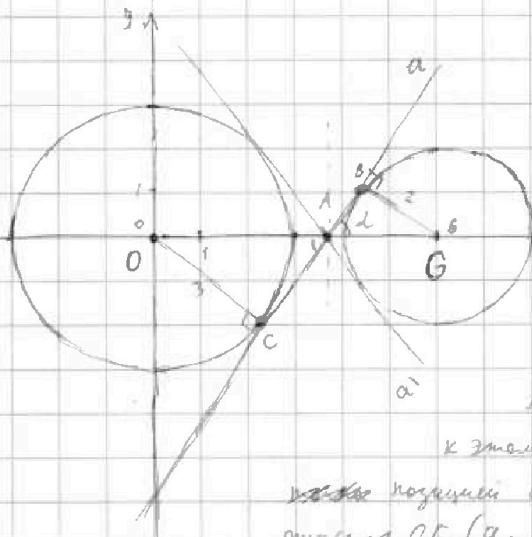
$$\begin{cases} y = -\frac{a}{2}x + 18 \\ x^2 + y^2 = 9 \end{cases}$$

$$(x-6)^2 + y^2 = 3^2$$

нашёл график

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 3^2 \\ (x-6)^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$

для 4 при втором, чтобы прямая, заданная $y = -\frac{a}{2}x + 18$, пересекла эл. 4 раза



мы ищем прямую a в 4 и если хотим
пересечь эл. 4 раза $\Rightarrow 1,56 = \sqrt{a^2 + b^2}$

$-\frac{a}{2}$ задает угол наклона прямой

для прямой a в большую
окр. в 2 разах, тогда ищем в эл. конец

того конца, находящегося дальше от первого раза A
меньшую в 2 раз., делаем решение по координатам

к эллипту введем № радиус с длиной ≤ 1 и O центр

получим будет явление касательного к эллипсу, первое
отрезок OG (a и a' гориз.) Если мы будем отводить пересечения
то будут (представь вспомни А прямая a), и их будут 4 раза

$$-\frac{a}{2} \in (\tan \angle, -\tan \angle)$$

$$\begin{aligned} \angle OAC &= \angle BAG (\text{вн. верх}) \Rightarrow \Delta OAC \sim \Delta BAG \\ \angle OCA &= \angle GBA = 90^\circ \end{aligned}$$

$$\frac{AG}{6-AG} = \frac{2}{3} \quad 3AG = 12 - 2AG \quad AG = 2,4$$

$$\sin \angle = \frac{BG}{AG} = \frac{\sqrt{2}}{2,4} = \frac{5}{6} \quad \cos \angle = \sqrt{1 - \frac{25}{36}} = \frac{11}{12} \quad \tan \angle = \frac{5\sqrt{11}}{11} \quad -\frac{a}{2} \in \left(-\frac{5\sqrt{11}}{11}, \frac{5\sqrt{11}}{11}\right)$$

$$a \in \left(-\frac{10\sqrt{11}}{11}, \frac{10\sqrt{11}}{11}\right)$$

$$\text{Ответ: } a \in \left(-\frac{10\sqrt{11}}{11}, \frac{10\sqrt{11}}{11}\right)$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N 5 | ограничения

$$\begin{cases} x, y > 0 \\ x \neq 1 \\ y \neq \frac{1}{5} \end{cases}$$

$$\log_3 x + 6 \log_3 y = \log_3 3^5 - 8$$

$$\log_3 x + \log_3 3(6-25) + 8 = 0$$

$$\log_3 x + \frac{3,5}{\log_3 x} + 8 = 0 \quad | \cdot \log_3 x \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$$

$$\log_3 x + 8 \log_3 x + 3,5 = 0 \quad a = \log_3 x \neq 0$$

$f = a^5 + 8a + 3,5 \quad f' = 5a^4 + 8 > 0 \Rightarrow$ функция возрастает
 \Rightarrow единственный корень $a^5 + 8a + 3,5 = 0$ и единственный корень x

аналог $\log_3^4(5y) - 3,5 \log_3 y + 8 = 0 \quad b = \log_3 5y \neq 0 \Rightarrow y \neq \frac{1}{5}$

$$f = b^5 + 8b - 3,5 = 0 \quad f' = 5b^4 + 8 > 0 \Rightarrow$$
 единственный корень y

также $x = 1$ и $y = 1$ единственные реш. x, y , если все это найдено то это будет
однозначно

$$\begin{cases} a^4 + \frac{3,5}{a} + 8 = 0 \\ b^4 + \frac{3,5}{b} + 8 = 0 \end{cases}$$

значит, что существует верное решение из равенств и $a = -b$

$$\text{i.e. } \log_3 x = -\log_3 5y \quad \log_3 5xy = 0 \quad 5xy = 1$$

$$xy = 0,2$$

мы знаем что у равенств есть решения \Rightarrow единственный \Rightarrow
 \Rightarrow рассматриваемый также случай подходит и единственный

Ответ. $xy = 0,2$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№6

Пригородная всплеск паромов проходит от пристани

$$y = 42$$

$$y = 0$$

мы можем представить "паромовую" на пристань как линии

прямые вида $y = -3x + n$, где $n \in \mathbb{Z}$, $n \in [0; 60]$

$$y = -3x + 60$$

т.е. $A(x_1, y_1)$ и $A(x_1, -3x_1 + a)$ $a \in \mathbb{Z}$, $a \in [0, 60]$

и $B(x_2, y_2)$ и $B(x_2, -3x_2 + b)$ $b \in \mathbb{Z}$, $b \in [0, 60]$

$$\text{Наше уравнение } 3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$$

$$3x_2 + y_2 - (3x_1 + y_1) = 33$$

$$3x_2 - 3x_1 + b - (3x_1 - 3x_2 + a) = 33$$

$$b - a = 33 \quad a, b \in \mathbb{Z} \quad a, b \in [0, 60]$$

$$b = 60, a = 60 - 33 = 27$$

$$b = 59, a = 59 - 33 = 26$$

$$b = 33, a = 33 - 33 = 0 \quad \text{ничего больше не получается} \Rightarrow \text{всего пар} \quad a+b = 28 \quad (\text{от } 0 \text{ до } 27 \text{ для } a)$$

но это видимо, что разности $b-a$ не дают нам x и y \Rightarrow подсчитаем все пары парок с целочисленными координатами

ΔOP это прямая линия $Ox = 14, y \in [-14; 0]$ т.е. содержит 15 целых значений y .

Контуры целочисленные то дальше 15 парок паромов нам не получится (иначе $x \notin \mathbb{Z}$). Из этих 15 строк x из 15 строк y т.е. $y = \text{целое} \cdot x \Rightarrow$ при $x \in \mathbb{Z}$ $y \in \mathbb{Z}$

т.е. на контуре $42 \geq y = -3x + n \geq 0 \quad n \in \mathbb{Z}, n \in [0, 60]$ кроме 15 целочисленных парок, еще есть.

т.е. с 2 отрицательных $42 \geq y = -3x + a \geq 0$ и $42 \geq y = -3x + b \geq 0$ помимо 15x15 парок парок (каких 78x. есть y а потом обе пары с конца парков $y=0$), а пар $a+b$ тоже 28

$$N_{\text{пар}} = 15 \cdot 15 \cdot 28 = 225 \cdot 4 \cdot 7 = 900 \cdot 7 = 6300 \text{ пар}$$

Ответ: 6300 пар

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$3) 5\sin(\sin(\cos x)) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$x + \frac{\pi}{2} \in [-2\pi, 2\pi]$$

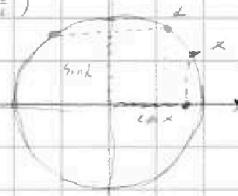
$$x \in [-3\pi, 2\pi]$$

$$\sin(5\sin(\sin(\cos x))) = \sin(x + \frac{\pi}{2})$$

$$d: \sin d = \cos x$$

$$d = x - \frac{\pi}{2}$$

$$d = \frac{x}{2} + \frac{\pi}{10}$$



$$1) 2x + \pi = 5\pi \rightarrow 10x + 2\pi n$$

$$8x = -4\pi - 20\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = -\frac{\pi}{2} + 2.5\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x \in [-3\pi, 2\pi]$$

$$n=-1 \quad x = -\frac{7\pi}{2} \quad \text{✓}$$

$$n=0 \quad x = -\frac{\pi}{2} \quad \text{✓}$$

$$n=1 \quad x = \frac{7\pi}{2} \quad \text{✓}$$

$$d = \frac{\pi}{2} \pm 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$d = x + \frac{\pi}{2}$$

$$x + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \pm 2\pi n$$

$$2) 2x + \pi = 5\pi - 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$12x = 4\pi + 20\pi n \quad x = \frac{\pi}{3} + \frac{5\pi n}{6}$$

$$n=1 \quad x = 2\pi \quad \text{✓}$$

$$n=0 \quad x = \frac{\pi}{3}$$

$$n=-1 \quad x = -\frac{5\pi}{3}$$

$$n=2 \quad x = -3\pi$$

$$\text{Ответ: } \{-3\pi; -\frac{5\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, 2\pi\}$$

$$4) 4\sin^2 \alpha = 2 \Rightarrow \alpha$$

$$\begin{cases} \alpha x + 2y - 3z = 0 \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 + 12x + 36) = 0 \\ x^2 + 12x + 36 + y^2 - 4 = (x+6)^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$

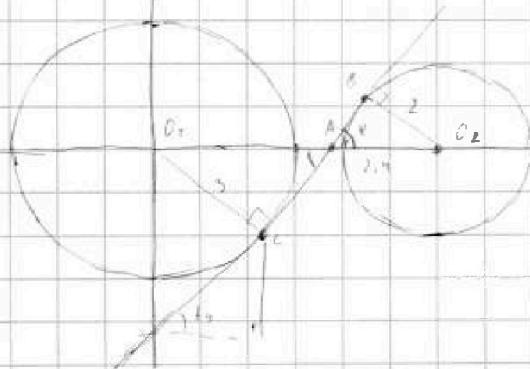
$$\begin{cases} 2y = 36 - 4x \\ x^2 + y^2 = 4 \\ (x+6)^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$

$$y = -\frac{9}{2}x + 6$$

$$\frac{AO_1}{AO_2} = \frac{2}{3}$$

$$3A_0e = 12 - 2A_0e$$

$$5A_0e = 12 \quad A_0e = 2,4$$



$$\sin \varphi = \frac{2}{5} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\cos \varphi = \sqrt{1 - \frac{1}{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\tan \varphi = \frac{2}{11} = \frac{\sqrt{11}}{11}$$

$$\frac{\alpha}{2} \in \left[-\frac{4\sqrt{11}}{11}, \frac{5\sqrt{11}}{11} \right]$$

$$\frac{\alpha}{2} \in \left[-\frac{5\sqrt{11}}{11}, \frac{5\sqrt{11}}{11} \right]$$

$$\alpha \in \left[-\frac{10\sqrt{11}}{11}, \frac{10\sqrt{11}}{11} \right]$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$1) \begin{aligned} ab = n \cdot 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^9 \\ bc = m \cdot 2^{12} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13} \\ ac = k \cdot 2^{13} \cdot 3^{14} \cdot 5^{30} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} a_1 + b_1 = 2^9 \\ b_1 + c_1 = 14 \\ a_1 + c_1 = 19 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} abc \text{ не кратно } 6 &\text{ т.к. } \\ n \cdot 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^9 &= 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^9 \end{aligned}$$

$$n_1 \geq 13 \quad m_1 \geq 13 \quad k_1 \geq 13$$

$$m_{\min} \cdot a \cdot b \cdot c = ?$$

$$\begin{cases} a_2 = 9 - b_2 \\ b_2 + c_2 = 14 \\ 9 - b_2 + c_2 = 19 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_3 + b_3 = 10 \\ b_3 + c_3 = 14 \\ a_3 + c_3 = 18 \end{cases}$$

$$2c_2 = 24 \quad c_2 = 12 \quad b_2 = 2 \quad a_2 = 7$$

$$2c_3 = 22 \quad c_3 = 11$$

$$c_3 = 11 \quad b_3 = 3 \quad a_3 = 7$$

$$m = 2^9 \cdot 3^5 \cdot 5^7$$

$$abc = \sqrt{n_1 \cdot n_2 \cdot 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^9}$$

$$\sqrt{2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{60}}$$

$$= 2^{11} \cdot 3^{11} \cdot 5^{30}$$

$$\begin{cases} a_4 + b_4 = 18 \\ b_4 + c_4 = 16 \\ a_4 + c_4 = 18 \end{cases}$$

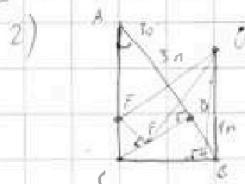
$$\begin{cases} a_5 + b_5 = 17 \\ b_5 + c_5 = 13 \\ a_5 + c_5 = 30 \end{cases}$$

$$a_5 + c_5 = 30$$

$$b_5 = 0$$

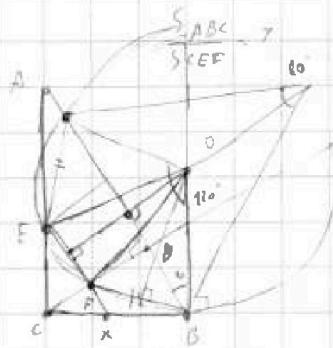
$$a_5 = 17$$

$$c_5 = 13$$



$$\frac{CE}{FE} = \frac{CD}{AD} \quad \frac{n}{CD} = \frac{CD}{3n} \quad CD = n\sqrt{3}$$

$$\frac{EC}{FF} = \frac{CD}{AD} = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad 6\sqrt{3} \cdot 4 = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \angle A = 30^\circ \Rightarrow CB = 2n \quad AC = 2\sqrt{3}n$$



$$XG^2 = XE \cdot XF$$

$$XE = 4XF$$

$$XG^2 = 4XF^2$$

$$CX = 2XF \quad CX^2 = 4XF^2$$

$$XG^2 = CX^2$$

$$\therefore XE \cdot XC > 0 \quad \therefore XE = CX \Rightarrow XE = \text{диаметр окружности} = 2n$$

$$EF^2 = 4X^2 \cdot 4XF^2 = 16XF^2$$

$$CF = \frac{1}{2}n \cdot \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}n$$

$$S_{CEF} = \frac{3}{4}n \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}n \cdot \frac{1}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{8}n^2$$

$$S_{ABC} = 2n \cdot 2\sqrt{3}n \cdot \frac{1}{2} = 2\sqrt{3}n^2$$

$$\frac{4\sqrt{3}}{9} = \frac{16}{3}$$

$$\frac{4\sqrt{3}n^2}{8} = \frac{16}{3}$$

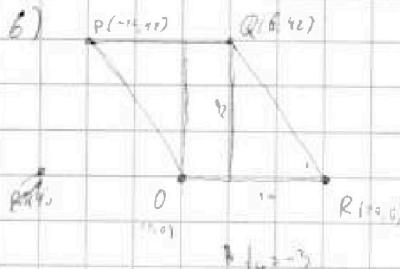
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$A(x_1, y_1)$$

$$B(x_2, y_2)$$

$$\text{угол } \angle X = 20^\circ$$

$$3(x_1 - x_2) + y_1 - y_2 = 33$$

$$3x - 0 = 33 \quad 3x = 33 \quad x = 11$$

$$3x - 6 = 27 \quad 3x = 33 \quad x = 11$$

$$3x - 9 = 24 \quad 3x = 33 \quad x = 11$$

$$3x - 12 = 21 \quad 3x = 33 \quad x = 11$$

$$3x - 15 = 18 \quad 3x = 33 \quad x = 11$$

$$3x - 18 = 15 \quad 3x = 33 \quad x = 11$$

$$3x - 21 = 12 \quad 3x = 33 \quad x = 11$$

$$3x - 24 = 9 \quad 3x = 33 \quad x = 11$$

$$3x - 27 = 6 \quad 3x = 33 \quad x = 11$$

$$3x - 30 = 3 \quad 3x = 33 \quad x = 11$$

$$SP = 10\sqrt{2}$$

$$AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = ?$$

$$S_{ABC} = 90$$

$$SA = SC = 12$$

$$3x_1 - y_1 = 3x_2 - y_2 = 33$$

$$3x_1 - y_1 - (3x_2 - y_2) = 33$$

$$y = -3x + a \quad a \in [0, 60]$$

$$3x_1 - 3y_1 + 6 = (3x_2 - 3y_2 + a)$$

$$6 - a = 33 \quad a \in [0, 60]$$

$$16 \cdot 14 \cdot 12 \approx 672$$

672

$$60 \cdot 27 = 33 \quad 33 - a = 33$$

$$(27)_a \quad a = 6$$

7 13 -

$$y = -3x - 33 \Rightarrow x = -11$$

но $y \geq 0$, т.е. $14 \times 14 \text{ см}$

$$2x_1 - x_2 =$$

$$16 \cdot 23$$

$$16$$

$$16$$

$$16$$

$$16$$

$$16$$

$$16$$

$$16$$

$$16$$

$$16$$

$$16$$

$$16$$

$$16$$

$$16$$

$$16$$

$$16$$

$$16$$

$$16$$

$$16$$

$$16$$

$$16$$

$$16$$

$$16$$

$$16$$

$$16$$

$$16$$

$$16$$

$$16$$

$$16$$

$$16$$

$$16$$

$$16$$

$$16$$

$$16$$

$$16$$

$$16$$

$$16$$

$$16$$

$$16$$

$$16$$

$$16$$

$$16$$

$$16$$

$$16$$

$$16$$

$$16$$

$$16$$

$$16$$

$$16$$

$$16$$

$$16$$

$$16$$

$$16$$

$$16$$

$$16$$

$$16$$

$$16$$

$$16$$

$$16$$

$$16$$

$$16$$

$$16$$

$$16$$

$$16$$

$$16$$

$$16$$

$$16$$

$$16$$

$$16$$

$$16$$

$$16$$

$$16$$

$$16$$

$$16$$

$$16$$

$$16$$

$$16$$

$$16$$

$$16$$

$$16$$

$$16$$

$$16$$

$$16$$

$$16$$

$$16$$

$$16$$

$$16$$

$$16$$

$$16$$

$$16$$

$$16$$

$$16$$

$$16$$

$$16$$

$$16$$

$$16$$

$$16$$

$$16$$

$$16$$

$$16$$

$$16$$

$$16$$

$$16$$

$$16$$

$$16$$

$$16$$

$$16$$

$$16$$

$$16$$

$$16$$

$$16$$

$$16$$

$$16$$

$$16$$

$$16$$

$$16$$

$$16$$

$$16$$

$$16$$

$$16$$

$$16$$

$$16$$

$$16$$

$$16$$

$$16$$

$$16$$

$$16$$

$$16$$

$$16$$

$$16$$

$$16$$

$$16$$

$$16$$

$$16$$

$$16$$

$$16$$

$$16$$

$$16$$

$$16$$

$$16$$

$$16$$

$$16$$

$$16$$

$$16$$

$$16$$

$$16$$

$$16$$

$$16$$

$$16$$

$$16$$

$$16$$

$$16$$

$$16$$

$$16$$

$$16$$

$$16$$

$$16$$

$$16$$

$$16$$

$$16$$

$$16$$

$$16$$

$$16$$

$$16$$

$$16$$

$$16$$

$$16$$

$$16$$

$$16$$

$$16$$

$$16$$

$$16$$

$$16$$

$$16$$

$$16$$

$$16$$

$$16$$

$$16$$

$$16$$

$$16$$

$$16$$

$$16$$

$$16$$

$$16$$

$$16$$

$$16$$

$$16$$

$$16$$

$$16$$

$$16$$

$$16$$

$$16$$

$$16$$

$$16$$

$$16$$

$$16$$

$$16$$

$$16$$

<math display="block

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$5) \log_2 x + 6 \log_x 3 = \log_x 2^3 - 8 \quad (\log_2(5y) + 2 \log_{5y} 3) = (\log_{25y}(13^2)) - 8$$

$$\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \\ x \neq 1 \\ y \neq 1 \end{cases}$$

$$\log_2 x = \frac{6 \log_3 3}{\log_3 x} = \frac{6}{\log_3 x} \log_x 3 - 8$$

$$\log_2 x + \frac{3,5}{\log_2 x} - 8 = 0 \quad \log_2 x \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$$

$$\log_2 x + 3,5 + 8 \log_2 x = 0 \quad f = 2x^2 + 16x + 2 = 0 \quad \cancel{\Delta = 32}$$

$$2 \log_2 x + 16 \log_2 x + 7 = 0 \quad f' = 10x^2 + 16 > 0 \quad \text{ржн вспр.} \quad \cancel{x^2 = 0}$$

$$2x^2 + 16x + 7 = 0$$

$$2x^2 + 16x + 7 = 0$$

$$\frac{18x^2 + 16x + 2}{n^2} = 0 \quad 2 \quad \frac{37}{32} \quad \frac{13}{1}$$

$$\cancel{x^2 = 0}$$

$$\log_2(5y) + 2 \log_{5y} 3 = 5,5 \log_{5y} 3 - 8$$

$$\begin{cases} \log_2(5y) + 3,5 \log_{5y} 3 + 8 = 0 \\ \log_2(5y) + 3,5 \log_2 3 + 8 = 0 \end{cases} \quad \cancel{\log_2(5y) + 3,5 \left(\frac{1}{\log_2 3}\right)^2 - 3,5 \log_{5y} 3 + 8 = 0}$$

$$\begin{cases} \log_2(5y) + 3,5 \log_2 3 + 8 = 0 \\ \left(\frac{1}{\log_2 3}\right)^2 + 3,5 \log_2 3 + 8 = 0 \end{cases}$$

$$0^2 - 3,5 + 8a \quad 94^2 + 8 > 0 \quad \text{ржн вспр.} \Rightarrow \log_2 y = \log_2 3$$

$$\log_2 5y = -\log_2 x$$

$$\log_2 5xy = 0$$

$$5xy = 1$$

$$\cancel{xy = 0,12}$$