МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^9 3^{10} 5^{10}$, bc делится на $2^{14} 3^{13} 5^{13}$, ac делится на $2^{19} 3^{18} 5^{30}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC. Окружность, касающаяся прямой BC в точке B, пересекает высоту CD, проведённую к гипотенузе, в точке F, а катет AC – в точке E. Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 3 : 1$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF.

3. [4 балла] Решите уравнение $5 \arcsin(\cos x) = x + \dfrac{\pi}{2}$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 9)\left(x^2 + y^2 - 12x + 32\right) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4 (5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2}\left(3^{11}\right) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения xy.

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-14;42)$, $Q(6;42)$ и $R(20;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K, лежащей на отрезке AM. Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q. Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 90, $SA = BC = 12$.

   а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1.

   б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N, $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№1 $\begin{cases} ab = n\cdot 2^9\cdot 3^{10}\cdot 5^{10} \\ bc = m\cdot 2^{14}\cdot 3^{13}\cdot 5^{13} \\ ac = k\cdot 2^{19}\cdot 3^{18}\cdot 5^{30} \\ m, n, k \in N \end{cases}$

$abc = \sqrt{a^2b^2c^2} = \sqrt{n\cdot m\cdot k\cdot 2^{42}\cdot 3^{41}\cdot 5^{53}}$ мы уже видим, что т.к. $a, b, c \in N$ $n\cdot m\cdot k$ должно делится на $3^{2k+1}\cdot 5^{2g-1}$ (т.к. степень под корнем должна быть чётной ($abc \in N$)) где $k, g \in \{0\} \cup N$

для наименьшего зн. abc должно быть $\min$ $n\cdot m\cdot k$

пусть a_i - ~~...~~ степень i в числе a такая, что $(a : i^{a_i}) \in Z$ и $\nexists i$ („макс" степень)

тогда:

$\begin{cases} a_2 + b_2 = 9 + n_1 \\ b_2 + c_2 = 14 + m_1 \\ a_1 + c_2 = 19 + k_1 \end{cases}$ т.к. мы хотим min $m\cdot n\cdot k$ до... $n_1 = m_1 = k_1 = 0$

$\begin{cases} a_1 + b_2 = 9 \\ b_2 + c_2 = 14 \\ a_2 + c_2 = 19 \end{cases}$ − $\begin{cases} c_1 - b_1 = 10 \\ c_1 + b_1 = 14 \\ a_2 + c_2 = 19 \end{cases}$ + $\begin{cases} 2c_1 = 24 \\ b_1 = c_1 - 10 \\ a_2 = 19 - c_2 \end{cases}$ $\begin{cases} c_2 = 12 \\ b_2 = 2 \\ a_2 = 7 \end{cases}$ сист. имеет реш. => предп. верное

аналогично пробуем с 3

$\begin{cases} a_3 + b_3 = 10 \\ b_3 + c_3 = 13 \\ a_3 + c_3 = 18 \end{cases}$ $\begin{cases} c_3 - b_3 = 8 \\ c_3 + b_3 = 13 \\ a_3 = 18 - c_3 \end{cases}$ $\begin{cases} 2c_3 = 21 \\ b_3 = c_3 - 8 \\ a_3 = 18 - c_3 \end{cases}$

видим противоречие, т.к. $c_3 \in N \cup \{0\} \Rightarrow 2c_3$ ≠ нечет.
для исправл. нам нужно добав. к ∀ зн. справа 1 (не важно к какому, т.к. зн. $n\cdot m\cdot k$ от этого не изм., пусть это будет n_3)

$\begin{cases} a_3 + b_3 = 11 \\ b_3 + c_3 = 13 \\ a_3 + c_3 = 18 \end{cases}$ $\begin{cases} c_3 = 10 \\ b_3 = 3 \\ a_3 = 8 \\ n_3 = 1 \end{cases}$ т.е. $\min n = 3$

теперь 5:

$\begin{cases} a_5 + b_5 = 10 \\ b_5 + c_5 = 13 \\ a_5 + c_5 = 30 \end{cases}$ + $\begin{cases} a_5 + c_5 + 2b_5 = 23 \\ a_5 + c_5 = 30 \\ 2b_5 = -7 \end{cases}$ мин. возм. зн. $2b_5 = 0$

противор. => нам нужно добавить к m_5 или n_5 (без разницы) в сумме 7, чтобы

$a_5 + c_5 + 2b_5 = 23 + n_5 + m_5 = 30$

(добав. к n_5 бессм. им. нет увел. разряд.)

пусть это опять n

$n_5 = 7$

И тогда $\begin{cases} a_5 + c_5 = 30 \\ b_5 = 0 \\ a_5 = ~~10~~ 17 - 0 \\ c_5 = 13 - 0 \end{cases}$ $n = 3\cdot 5^7$ $m = 1$ $k = 1$

т.е. $abc = \sqrt{3\cdot 5^7\cdot 2^{42}\cdot 3^{41}\cdot 5^{53}} = \sqrt{2^{42}\cdot 3^{42}\cdot 5^{60}} = 2^{21}\cdot 3^{21}\cdot 5^{30}$

это зн. abc минимально, т.к. если мы не умножим хоть на 1 простое число по одной из вышеизл. схем не решится.

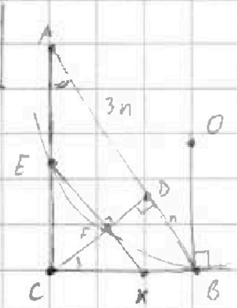
Ответ мин. $abc = 2^{21}\cdot 3^{21}\cdot 5^{30}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№2



$AD = 3n \quad DB = n$

$AB \parallel EF$

ДП: продлеваем EF до перес. с BC в т. X

Т.к. CD - высота к гипотенузе в прямоуг. Δ то $\Delta CAD \sim \Delta CDB \sim \Delta ABC \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{BD}{DC} = \frac{DC}{AD} \quad DC^2 = 3n^2 \quad DC = n\sqrt{3}$

$tg\angle A = DC/AD = \frac{\sqrt{3}n}{3n} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \angle A = 30^\circ \Rightarrow$ $BC = \frac{1}{2}AB = 2n$, $AC = \frac{\sqrt{3}}{2}AB = \sqrt{3}\cdot 2n$

$EF \parallel AB \Rightarrow \left.\begin{matrix}\angle CEF = \angle CAD = 30^\circ \\ \angle CFE = \angle CDA = 90^\circ\end{matrix}\right| \Rightarrow \Delta CEF \sim \Delta CDA \sim \Delta ABC$

в т.ч. Δ т.к. X: $XB^2 = XE \cdot XF$ $\quad$ $\Delta CEF \sim \Delta FX \sim \Delta CEX$ (т.к. ΔCEX - прямоуг., а $CF \perp EX$)

$\Delta CEX \sim \Delta CEF \sim \Delta ABC \Rightarrow \frac{AD}{DB} = \frac{EF}{FX} \Rightarrow EF = 3FX \quad EX = 4XF$

$XB^2 = 4XF^2$; $\angle DCB = \angle A = 30^\circ \Rightarrow FX = \frac{1}{2}CX \Rightarrow CX^2 = 4FX^2$

$XB^2 = CX^2$ т.к. XB и $CX > 0$ то $XB = CX = \frac{1}{2}BC$

$\left.\begin{matrix}X - \text{серед } BC \\ EX \parallel AB\end{matrix}\right| \Rightarrow EX$ - средняя линия $\Delta ABC \Rightarrow EF = \frac{1}{2}AD = \frac{3}{2}n$; $CF = \frac{1}{2}CD = \frac{\sqrt{3}}{2}n$

$S_{CEF} = \frac{3}{2}n \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}n \cdot \frac{1}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{8}n^2 \qquad S_{ABC} = 2n \cdot 2\sqrt{3}n \cdot \frac{1}{2} = 2\sqrt{3}n^2$

$\frac{S_{ABC}}{S_{CEF}} = \frac{2\sqrt{3}n^2}{\frac{3\sqrt{3}}{8}n^2} = \frac{16}{3}$

Ответ: $16/3$

№3

$5\arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$ пусть $\arcsin(\cos x) = \alpha$

$\arcsin(a) \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ $\sin\alpha = \cos x \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} \pm x + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$

$x + \frac{\pi}{2} \in [-2{,}5\pi, 2{,}5\pi]$ при этом $5\alpha = x + \frac{\pi}{2}$ $\alpha = \frac{x}{5} + \frac{\pi}{10}$

$x \in [-3\pi; 2\pi]$ где $\frac{x}{5} + \frac{\pi}{10} = \frac{\pi}{2} \pm x + 2\pi n$ $n \in \mathbb{Z}$

$2x + \pi = 5\pi \pm 10x + 20\pi n$ $n \in \mathbb{Z}$

1) $8x = -4\pi - 20\pi n$ $n=1$: $x = -3\pi$, если увел. n то $x\downarrow$ => уменьш n

$\begin{cases} x = -\frac{\pi}{2} - 2{,}5\pi n \\ n \in \mathbb{Z} \\ x \in [-3\pi, 2\pi] \end{cases}$ $n = 0$: $x = -\frac{\pi}{2} \in [-3\pi, 2\pi]$

$n = -1$: $x = 2\pi \in [-3\pi, 2\pi]$ если умен n то $x\uparrow$ все, мы достигли второго крайнего зн. в этом случае. $x_1 \in \{-3\pi; -\frac{\pi}{2}; 2\pi\}$

2) $12x = 4\pi + 20\pi n$ $n=1$: $x = 2\pi \in [-3\pi, 2\pi]$ если увел. n то $x\uparrow$ => уменьш. n

$\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + \frac{5}{3}n\pi \\ x \in [-3\pi, 2\pi] \end{cases}$ $n = 0$: $x = \frac{\pi}{3} \in [-3\pi, 2\pi]$

$n = -1$: $x = -\frac{4}{3}\pi \in [-3\pi, 2\pi]$

$n = -2$: $x = -3\pi \in [-3\pi, 2\pi]$ вторая крайняя точка

в этом случае $x_2 \in \{-3\pi, -\frac{4}{3}\pi, \frac{\pi}{3}; 2\pi\}$

$\left[\begin{array}{l} x = x_1 \\ x = x_2 \end{array}\right.$

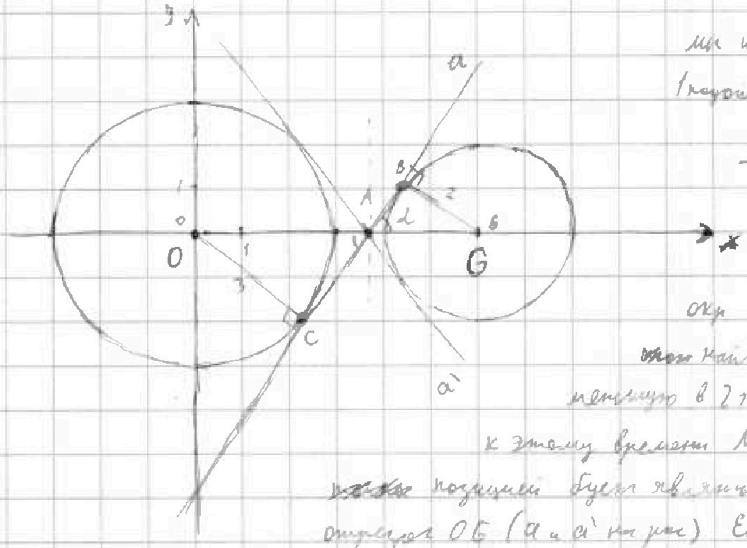
Ответ. $\{-3\pi, -\frac{4}{3}\pi, -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{3}, 2\pi\}$

№ 4

$$\begin{cases} ax+2y-3b=0 \\ (x^2+y^2-9)(x^2+y^2-12x+32)=0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2y=3b-ax \\ \left[\begin{array}{l} x^2+y^2=9 \\ x^2-12x+36+y^2=4 \end{array}\right. \end{cases} \quad \begin{cases} y=-\frac{a}{2}x+1{,}5b \\ \left[\begin{array}{l} x^2+y^2=3^2 \\ (x-6)^2+y^2=2^2 \end{array}\right. \end{cases}$$

постр. график $\left[\begin{array}{l} x^2+y^2=3^2 \\ (x-6)^2+y^2=4 \end{array}\right.$

для 4 реш нужно, чтобы прямая, заданная $y=-\frac{a}{2}x+1{,}5b$ пересекла его 4 раза



мы имеем право брать $\forall$ b и если хоть 1 подойдет то a неугодна $\Rightarrow 1{,}5b = \forall = C^{\circ} \in R$

$-\frac{a}{2}$ задает угол наклона прямой

доп. прямая $a \cap$ большую окр в 2 точках, тогда начнем с ~~...~~ найти положение когда она первый раз $\cap$ меньшую в 2 тч, данное решение не подойдет если к этому времени N перес с большей $\neq$ 1 или 0 крайней ~~...~~ позицией будет являться касательная к 2 окр, пересек отрезок OG (a и a' на рис) Если мы увел α, то очевидно пересечений вообще не будет (представ вр. вокруг A прямой a), и их будет 4 пока

$-\frac{a}{2} \in (tg\,\alpha;\ -tg\,\alpha)$

$$\left.\begin{array}{l} \angle OAC = \angle BAG \text{ (т.к. верт)} \\ \angle OCA = \angle GBA = 90^{\circ} \end{array}\right\} \Rightarrow \triangle OAC \sim \triangle ABG \qquad \frac{AG}{6-AG} = \frac{2}{3} \qquad \begin{array}{l} 3AG = 12 - 2AG \\ AG = 2{,}4 \end{array}$$

$$\sin\alpha = \frac{BG}{AG} = \frac{2}{2{,}4} = \frac{5}{6} \qquad \cos\alpha = \sqrt{1-\frac{25}{36}} = \frac{\sqrt{11}}{6} \qquad tg\,\alpha = \frac{5\sqrt{11}}{11} \qquad -\frac{a}{2} \in \left(-\frac{5\sqrt{11}}{11};\ \frac{5\sqrt{11}}{11}\right)$$

$a \in \left(-\frac{10\sqrt{11}}{11};\ \frac{10\sqrt{11}}{11}\right)$

Ответ: $a \in \left(-\frac{10\sqrt{11}}{11};\ \frac{10\sqrt{11}}{11}\right)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 5

ограничения
$$\begin{cases} x, y > 0 \\ x \neq 1 \\ y \neq \frac{1}{5} \end{cases}$$

$$\log_3^4 x + 6\log_x 3 = \log_{x^2} 3^5 - 8$$

$$\log_3^4 x + \log_x 3(6 - 2{,}5) + 8 = 0$$

$$\log_3^4 x + \frac{3{,}5}{\log_3 x} + 8 = 0 \quad | \cdot \log_3 x \neq 0 \text{ т.к. } x \neq 1$$

$$\log_3^5 x + 8\log_3 x + 3{,}5 = 0 \qquad a = \log_3 x \neq 0$$

$f = a^5 + 8a + 3{,}5$ $\quad f' = 5a^4 + 8 > 0$ => функц возр. =>
=> есть лишь 1 a уд. $a^5 + 8a + 3{,}5 = 0$ и ему соотв лишь 1 x

аналог. $\log_3^4(5y) - \cancel{3{,}5\ldots}\ 3{,}5\log_{5y} 3 + 8 = 0$ $\quad b = \log_3 5y \neq 0$ т.к. $y \neq \frac{1}{5}$

$f = b^5 + 8b - 3{,}5 = 0$ $\quad f' = 5b^4 + 8 > 0$ => лишь 1 возм зн. y

1 зн. x и 1 зн. y => есть единств зн. xy, если мы его найдем то оно будет ответом

$$\begin{cases} a^4 + \frac{3{,}5}{a} + 8 = 0 \\ b^4 - \frac{3{,}5}{b} + 8 = 0 \end{cases}$$

Заметим, что сист. верна если верно одно из равенств и $a = -b$

т.е. $\log_3 x = -\log_3 5y$ $\quad \log_3 5xy = 0$ $\quad 5xy = 1$
$xy = 0{,}2$

мы знаем что у равенств есть решения, причём единств =>
=> рассмотренный нами случай подходит и единственен

Ответ: $xy = 0{,}2$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№6 Территория внутри параллелограмма огр. прямыми:

$y = 42$

$y = 0$

$y = -3x$

$y = -3x + 60$

Мы можем „расчертить" параллелогр. на паррал наклонн. прямые вида $y = -3x + n$, где $n \in Z$ и $n \in [0; 60]$

т.е. $A(x_1; y_1)$ зап. $A(x_1; -3x_1 + a)$ $a \in Z$, $a \in [0, 60]$

и $B(x_2; y_2)$ зап. $B(x_2; -3x_2 + b)$ $b \in Z$, $b \in [0; 60]$

Нате усл: $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$

$3x_2 + y_2 - (3x_1 + y_1) = 33$

$3x_2 - 3x_2 + b - (3x_1 - 3x_1 + a) = 33$

$b - a = 33$ $a, b \in Z$ $a, b \in [0; 60]$

$b = 60$ $a = 60 - 33 = 27$

$b = 59$ $a = 59 - 33 = 26$

...

$b = 33$ $a = 33 - 33 = \underline{0}$ меньше быть не может => всего пар a-b 28 (от 0 до 27 для a)

но мы видим, что разность $b - a$ не зав. от x и y => подходит для всех пар точек с целочисленными координатами.

$\measuredangle$ OP его проекция на $Ox = 14$ и $\in [-14; 0]$ т.е. содерж. 15 целых зн. т.к. обе коорд. целочисленные то больше 15 точек нужных нам там быть не может (иначе $x \notin Z$). Из этих 15 с целыми x у 15 целый y т.к. $y = \text{целое} \cdot x$ => при $x \in Z$ $y \in Z$

т.е. на каждой $42 \geq y = -3x + n \geq 0$ $n \in Z$, $n \in [0; 60]$ есть 15 ~~целочисленных~~ точек, уд. усл.

т.е. с 2 отрезков $42 \geq y = -3x + a \geq 0$ и $42 \geq y = -3x + b \geq 0$ можно взять $15 \cdot 15$ пар точек (кажд. т.к. ~~для~~ у a может обр. пару с кажд. точкой у b), а пар a-b есть 28

$N_{пар} = 15 \cdot 15 \cdot 28 = 225 \cdot 4 \cdot 7 = 900 \cdot 7 = 6300$ пар.

Ответ: 6300 пар

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

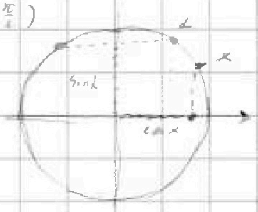
3) $5\arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$

$\arcsin \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$

$x + \frac{\pi}{2} \in [-2{,}5\pi; 2{,}5\pi]$

! $x \in [-3\pi; 2\pi]$

$\sin(5\arcsin(\cos x)) = \sin(x + \frac{\pi}{2})$



$\alpha \quad \sin\alpha = \cos x$

$5\alpha = x + \frac{\pi}{2}$

$\alpha = \frac{x}{5} + \frac{\pi}{10}$

$\begin{cases} \alpha = \frac{\pi}{2} \pm x + 2\pi n, \ n \in Z \\ 5\alpha = x + \frac{\pi}{2} \end{cases}$

$\frac{x}{5} + \frac{\pi}{10} = \frac{\pi}{2} \pm x + 2\pi n$

1) $2x + \pi = 5\pi + 10x + 20\pi n$

$8x = -4\pi - 20\pi n \quad n \in Z$

$x = -\frac{\pi}{2} + 2{,}5\pi n \quad n \in Z$

$x \in [-3\pi; 2\pi]$

$n = -1 \quad x = -3\pi$ ✓

$n = 0 \quad x = -\frac{\pi}{2}$ ✓

$n = 1 \quad x = 2\pi$ ✓

~~$5(2\frac{\pi}{2})$~~

$\frac{20}{12} = \frac{5}{3}$

2) $2x + \pi = 5\pi - 10x + 20\pi n, \ n \in Z$

$12x = 4\pi + 20\pi n \quad x = \frac{\pi}{3} + \frac{5}{3}\pi n$

$n = 1 \quad x = 2\pi$

$n = 0 \quad x = \frac{\pi}{3}$

$n = -1 \quad x = -\frac{4}{3}\pi$

$n = -2 \quad x = -3\pi$

Ответ: $\{-3\pi; -\frac{4}{3}\pi; -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{3}; 2\pi\}$

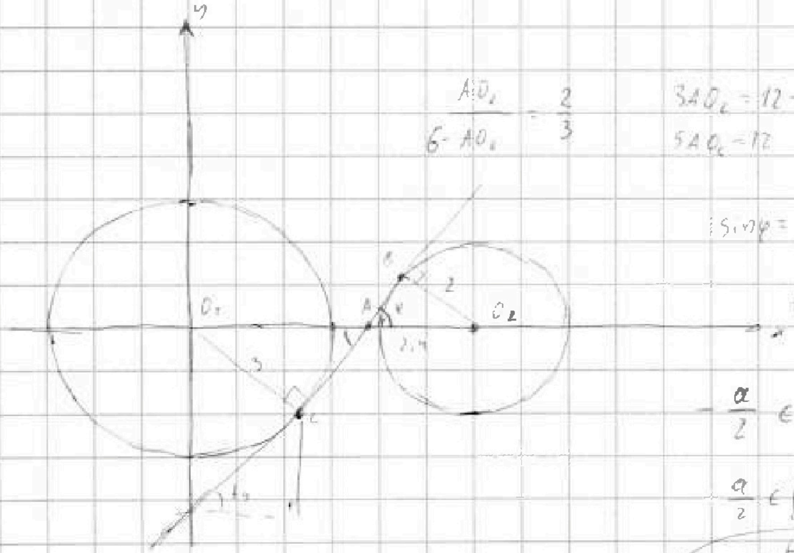
4) 4 реш. в з. a

$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0 \\ (x^2+y^2-9)(\underbrace{x^2+y^2-12x+32}) = 0 \end{cases}$

$x^2 - 12x + 36 + y^2 - 4 = (x-6)^2 + y^2 - 4$

$\begin{cases} 2y = 3b - ax \\ \left[\begin{array}{l} x^2+y^2=9 \\ (x-6)^2+y^2=4 \end{array}\right. \end{cases}$

$y = -\frac{a}{2}x + 1{,}5b$



$\frac{AO_2}{6 - AO_2} = \frac{2}{3}$

$3AO_2 = 12 - 2AO_2$

$5AO_2 = 12 \quad AO_2 = 2{,}4$

$\sin\varphi = \frac{2}{2{,}4} = \frac{5}{6}$

$\cos\varphi = \sqrt{1 - \frac{25}{36}} = \frac{\sqrt{11}}{6}$

$tg = \frac{5\sqrt{11}}{11}$

$-\frac{a}{2} \in \left[-\frac{5\sqrt{11}}{11}; \frac{5\sqrt{11}}{11}\right]$

$\frac{a}{2} \in \left[-\frac{5\sqrt{11}}{11}; \frac{5\sqrt{11}}{11}\right]$

$a \in \left[-\frac{10\sqrt{11}}{11}; \frac{10\sqrt{11}}{11}\right]$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

1)

$ab = n \cdot 2^{9} 3^{10} 5^{13}$

$bc = m \cdot 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13}$

$ac = k \cdot 2^{13} 3^{18} 5^{30}$

$\begin{cases} a_2 + b_2 \geq 9 \\ b_2 + c_2 \geq 14 \\ a_2 + c_2 \geq 19 \end{cases}$

abc ... $2^{n_2} 3^{n_3} 5^{n_5}$

$n_2 \geq$ ~~...~~ 19 $\quad n_3 \geq 18 \quad n_5 \geq 30$

min $abc = ?$

$\begin{cases} a_2 = 9 - b_2 \\ b_2 + c_2 = 14 \\ 9 - b_2 + c_2 = 19 \end{cases}$ $\quad c_2 = 14 - b_2 \quad c_2 = 10 + b_2$

$2c_2 = 24 \quad c_2 = 12 \quad b_2 = 2 \quad a_2 = 7$

2^{21}

$\begin{cases} a_3 + b_3 = 10 \\ b_3 + c_3 = 14 \\ a_3 + c_3 = 18 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} c_3 - b_3 = 8 \\ c_3 + b_3 = 14 \end{cases}$ $\quad 2c_3 = 22$

$c_3 = 11 \quad b_3 = 3 \quad a_3 = 7 \qquad m = 3\,5^{7}$

$abc = \sqrt{mnk \cdot 2^{72} \cdot 3^{41} \cdot 5^{53}}$

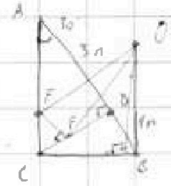
$\sqrt{2^{42} \cdot 3^{72} \cdot 5^{60}} =$

$= \underline{2^{21} 3^{24} \cdot 5^{30}}$

5^{7} $\quad \begin{cases} a_5 + b_5 = 10 \\ b_5 + c_5 = 16 \\ a_5 + c_5 = 30 \end{cases}$ $\quad c_5 - b_5 = 20 \quad c_5 + b_5 = 14 \quad c_5 = 17 \quad b_5 = -3$ невозм.

$\begin{cases} a_5 + b_5 = 17 \\ b_5 + c_5 = 13 \\ a_5 + c_5 = 30 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} a_5 + c_5 + 2b_5 = 30 \\ a_5 + c_5 = 30 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} b_5 = 0 \\ a_5 = 17 \\ c_5 = 13 \end{cases}$

2)

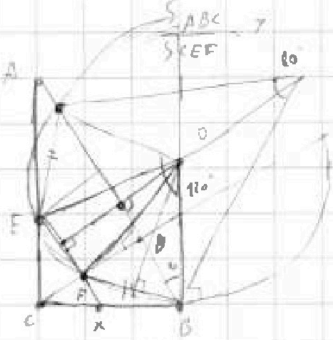


$\frac{CF}{FE} = \frac{CD}{AD} \qquad \frac{n}{CD} = \frac{CD}{3n} \qquad CD = n\sqrt{3}$

$\frac{EC}{FE} = \frac{CD}{AD} = \frac{\sqrt{3}}{3} \qquad tg\,\angle A = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \angle A = 30^\circ \quad \Rightarrow CB = 2n$

$AC = 2\sqrt{3}\,n$

$\frac{S_{ABC}}{S_{CEF}} = ?$



$XB^2 = XE \cdot XF$

$XE = 4XF$

$XB^2 = 4XF^2$

$CX = 2XF \qquad CX^2 = 4XF^2$

$XB^2 = CX^2$

т.к. $XB, CX > 0$ то $XB = CX \Rightarrow XE$ - ср. линия $= 2n$

~~$EF = \frac{3}{4} CM$~~ $\quad EF =$ ср. ли. $\triangle CAM = \frac{3}{2}n$

$CF = \frac{3}{2}n \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}n$

$S_{CEF} = \frac{3}{2}n \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}n \cdot \frac{1}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{8}n^2$

$S_{ABC} = 2n \cdot 2\sqrt{3}n \cdot \frac{1}{2} = 2\sqrt{3}n^2$

$\frac{2\sqrt{3}n^2}{\frac{3\sqrt{3}}{8}n^2} = \frac{16}{3}$

$\frac{4\sqrt{3}}{\frac{3\sqrt{3}}{4}} = \frac{16}{3}$

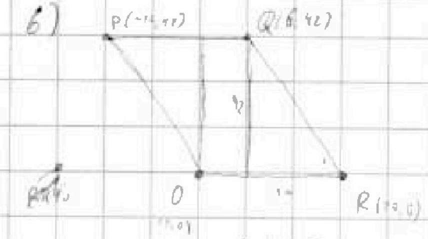
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

6)



$A(x_1; y_1)$

$B(x_2; y_2)$

max $\Delta x = 20$

$3(x_2 - x_1) + y_2 - y_1 = 33$

$33 = 3 \cdot 11$

$\Delta x = 0$	$\Delta y = 33$	$\Delta x = 7$	$\Delta y = 12$
$\Delta x = 1$	$\Delta y = 30$	$\Delta x = 8$	$\Delta y = 9$
$\Delta x = 2$	$\Delta y = 27$	$\Delta x = 9$	$\Delta y = 6$
$\Delta x = 3$	$\Delta y = 24$	$\Delta x = 10$	$\Delta y = 3$
$\Delta x = 4$	$\Delta y = 21$	$\Delta x = 11$	$\Delta y = 0$
$\Delta x = 5$	$\Delta y = 18$		
$\Delta x = 6$	$\Delta y = 15$		

$\Delta x = 0$ $0 + 33$

$\Delta x = 1$ $3 + 30$

$\Delta x = 2$ $6 + 27$

$\Delta x = 3$ $9 + 24$

$\Delta x = 4$ $12 + 21$

$\Delta x = 5$ $15 + 18$

$\Delta x = 6$ $18 + 15$

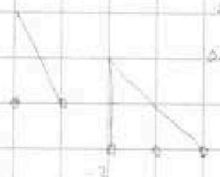
$\Delta x = 7$ $21 + 12$

$\Delta x = 8$ $24 + 9$

$\Delta x = 9$ $27 + 6$

$\Delta x = 10$ $30 + 3$

$\Delta x = 11$ $33 + 0$



7)

$SP = MQ$

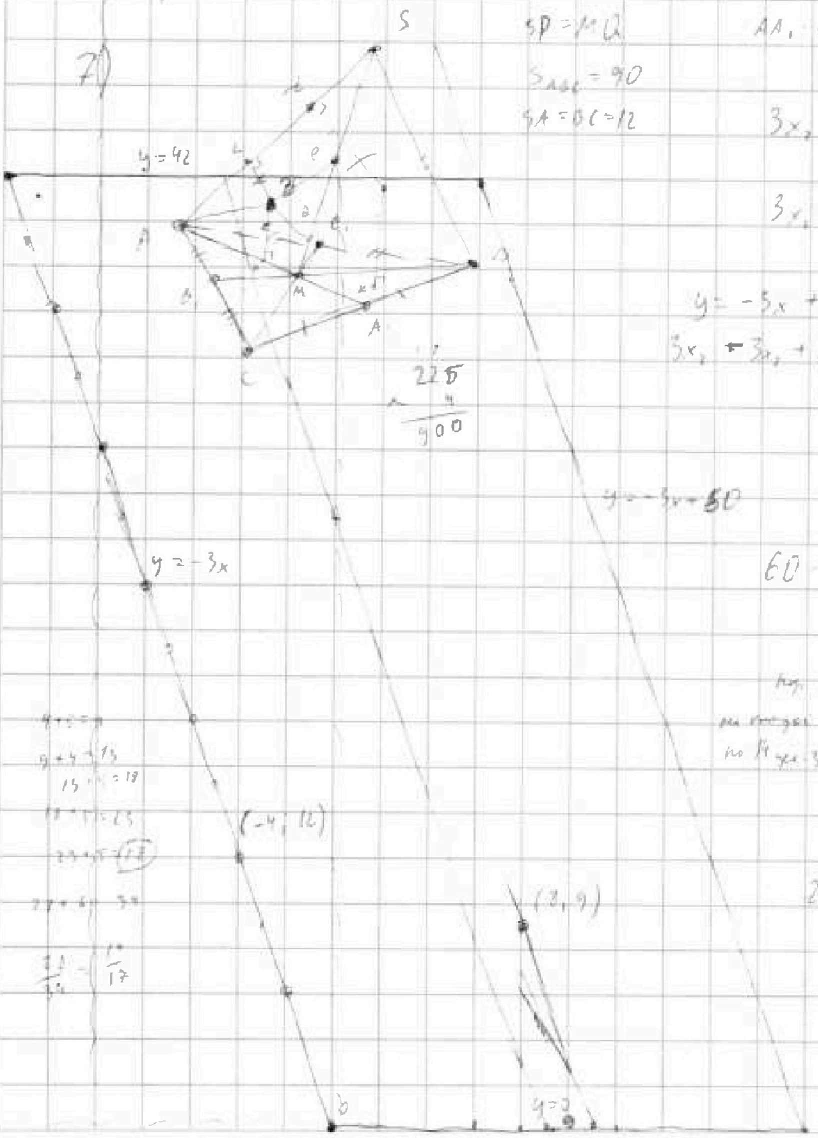
$S_{ABC} = 90$

$SA = BC = 12$

$AA_1, BB_1, CC_1 = ?$

$3x_2 + y_2 - 3x_1 + y_1 = 33$

$3x_2 + y_2 - (3x_1 + y_1) = 33$



$y = -3x + a$ $a \in [0; 60]$

$3x_2 + 3x_2 + b - (3x_1 - 3x_1 + a)$

$b - a = 33$ $b; a \in [0; 60]$

14 чис. $\in \mathbb{Z}$ … b / a

$60 - 27 = 33$ $33 - 0 = 33$

27 пар a и b

$y = -3x + 33$

по 14 x на … 14×14

$x_2 - x_1 =$

$24 + 9$

$14 \cdot 14 \cdot 27 = 7^2 \cdot 4 \cdot 3^3$

$225 \cdot 4 = 900$

$14 \cdot 14 = 196$

$196 \cdot 27 = 5292$

Всего 5292 пары

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте **крестиком номер задачи**,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

5) $\log_3^4 x + 6\log_x 3 = \log_{x^2} 3^{5} - 8$ $\quad \log_3^4(5y) + 2\log_{5y} 3 = \log_{25y^2}(3^{11}) - 8$

$\begin{cases} x>0 & y>0 \\ x\neq 1 & y\neq \frac{1}{5} \end{cases}$

$\log_3^4 x + \frac{6\log_3 3}{\log_3 x} = 2{,}5\log_x 3 - 8$

$\log_3^4 x + \frac{3{,}5}{\log_3 x} + 8 = 0 \quad | \cdot \log_3 x \neq 0 \Rightarrow x\neq 1$

$\log_3^5 x + 3{,}5 + 8\log_3 x = 0 \qquad f = 2a^5 + 16a + 7 = 0$

$2\log_3^5 x + 16\log_3 x + 7 = 0 \qquad f' = 10a^4 + 16 > 0$ возр.

$\Rightarrow$ единств. корень

$\log_3 x$

$2a^5 + 16a = -7$

$2a(a^4 + 8)$

$\frac{(8n+1)2}{n^5} = 7$

$\log_3^4(5y) + 2\log_{5y} 3 = 5{,}5\log_{5y} 3 - 8$

$\begin{cases} \log_3^4(5y) - 3{,}5\log_{5y} 3 + 8 = 0 \\ \log_3^4(x) + 3{,}5\log_x 3 + 8 = 0 \end{cases}$ $\qquad \left(\frac{1}{\log_{5y} 3}\right)^4 - 3{,}5\log_{5y} 3 + 8 = 0$

$\left(\frac{1}{\log_x 3}\right)^4 + 3{,}5\log_x 3 + 8 = 0$

$a^5 - 3{,}5 + 8a \qquad 5a^4 + 8 > 0$ функ. возр. $\Rightarrow$ ед. зн. y

$\log_3 5y = -\log_3 x$

$\log_3 5xy = 0$

$5xy = 1$

$xy = 0{,}2$