



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ



## 11 КЛАСС. Вариант 1

- 1. [4 балла] Натуральные числа  $a, b$ , с таковы, что  $ab$  делится на  $2^9 3^{10} 5^{10}$ ,  $bc$  делится на  $2^{14} 3^{13} 5^{13}$ ,  $ac$  делится на  $2^{19} 3^{18} 5^{30}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
- 2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник  $ABC$ . Окружность, касающаяся прямой  $BC$  в точке  $B$ , пересекает высоту  $CD$ , проведённую к гипотенузе, в точке  $F$ , а катет  $AC$  – в точке  $E$ . Известно, что  $AB \parallel EF$ ,  $AD : DB = 3 : 1$ . Найдите отношение площади треугольника  $ABC$  к площади треугольника  $CEF$ .
- 3. [4 балла] Решите уравнение  $5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$ .
- 4. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

- 5. [5 баллов] Некоторые числа  $x$  и  $y$  удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2}(3^{11}) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения  $xy$ .

- 6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0; 0)$ ,  $P(-14; 42)$ ,  $Q(6; 42)$  и  $R(20; 0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$ .
- 7. [6 баллов] Дано треугольная пирамида  $SABC$ , медианы  $AA_1, BB_1$  и  $CC_1$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $M$ . Сфера  $\Omega$  касается ребра  $AS$  в точке  $L$  и касается плоскости основания пирамиды в точке  $K$ , лежащей на отрезке  $AM$ . Сфера  $\Omega$  пересекает отрезок  $SM$  в точках  $P$  и  $Q$ . Известно, что  $SP = MQ$ , площадь треугольника  $ABC$  равна 90,  $SA = BC = 12$ .
  - Найдите произведение длии медиан  $AA_1, BB_1$  и  $CC_1$ .
  - Найдите двугранный угол при ребре  $BC$  пирамиды, если дополнительно известно, что  $\Omega$  касается грани  $BCS$  в точке  $N$ ,  $SN = 4$ , а радиус сферы  $\Omega$  равен 5.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



1

2

3

4

5

6

7

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

### Задача 1

Пусть  $a_2$  — степень двойки, входит в

8 числа  $a$ . Аналогично:  $a_3; a_5; b_2; b_3; b_5; c_2; c_3; c_5$ .

$$U_3 \text{ ус. } ab : 2^9 3^{10} 5^{10} \Rightarrow \begin{cases} a_2 + b_2 \geq 9 \\ a_3 + b_3 \geq 10 \\ a_5 + b_5 \geq 10 \end{cases} \quad (\text{все натур. или } 0)$$

$$bc : 2^{14} 3^{13} 5^{13} \Rightarrow \begin{cases} b_2 + c_2 \geq 14 \\ b_3 + c_3 \geq 13 \\ b_5 + c_5 \geq 13 \end{cases}$$

$$ac : 2^{13} 3^{18} 5^{30} \Rightarrow \begin{cases} a_2 + c_2 \geq 19 \\ a_3 + c_3 \geq 18 \\ a_5 + c_5 \geq 30 \end{cases}$$

(сложив все получим):

$$\begin{cases} 2(a_2 + b_2 + c_2) \geq 42 \\ 2(a_3 + b_3 + c_3) \geq 41 \\ 2(a_5 + b_5 + c_5) \geq 53 \end{cases}$$

Вспомним, что все числа натуральные или равенки:

$$\Rightarrow a_3 + b_3 + c_3 \geq 21$$

$$a_5 + b_5 + c_5 \geq 27 \text{ но } a_5 + c_5 \geq 30$$

$$\Rightarrow a_5 + b_5 + c_5 \geq 30$$

$$a_2 + b_2 + c_2 \geq 21$$

$$\Rightarrow abc : 2^{21} 3^{21} 5^{30} \quad abc \geq 2^{21} 3^{21} 5^{30}$$

$\Rightarrow$  меньшие такие числа быть не может.

При этом  $abc$  удел. этому существует:

$$a = 2^7 3^7 5^{15} \quad b = 2^3 3^3 \quad c = 2^{12} 3^{11} 5^{15}$$

$$OABC = 2^{21} 3^{21} 5^{30}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



- |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                                   | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 2.

$$\frac{AD}{DB} = \frac{3}{1}$$

$\triangle ADC \sim \triangle EFC$  по звукам равных  
углов.

Также

$\triangle ADC \sim \triangle ADB \sim \triangle ACB \sim \triangle EFC$  по звукам равных углов.

$\Rightarrow \triangle ADC \sim \triangle ADB \sim \triangle ACB \sim \triangle EFC$

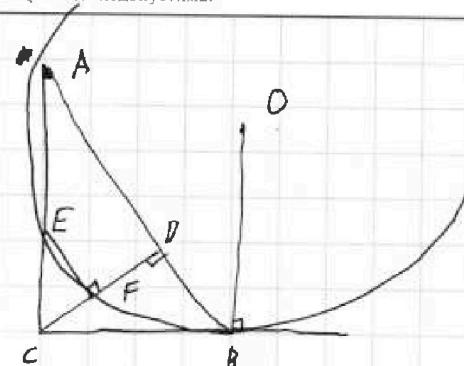
$$CD = \sqrt{AD \cdot DB} = \sqrt{3} \cdot a \quad \text{т.к. } BD = a$$

$$\Rightarrow \angle CAB = 30^\circ \quad \angle CBA = 60^\circ \Rightarrow \angle CEF = 30^\circ$$

$$BC = 2a$$

$$AC = 2\sqrt{3}a$$

$$\begin{aligned} S_{FEC} &= \left( \frac{EC}{2\sqrt{3}a} \right)^2 \cdot \frac{2\sqrt{3}a \cdot 2a}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{EC^2 \cdot \frac{3}{4}a}{2\sqrt{3}a} = \\ &= EC^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{8} \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



- |                            |                            |                                       |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

**МФТИ.**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 3.  $\arcsin(\cos \pi) = \frac{\pi}{5} + \frac{\pi}{10}$

Но область опр.  $\arcsin \frac{x}{5} + \frac{\pi}{10} \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$   
 $\Rightarrow \pi \in [-3\pi; 2\pi] \text{ no ch3.}$

$$\cos \pi = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \pi\right)$$

$$\arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - \pi\right)\right) = \frac{\pi}{5} + \frac{\pi}{10}$$

$$\sin\left(\arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - \pi\right)\right)\right) = \sin\left(\frac{\pi}{5} + \frac{\pi}{10}\right)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \pi\right) = \sin\left(\frac{\pi}{5} + \frac{\pi}{10}\right)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{5} + \frac{\pi}{10}\right) + \sin\left(\pi - \frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$2 \sin\left(\frac{\frac{\pi}{5} + \frac{\pi}{10} + \pi - \frac{\pi}{2}}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\frac{\pi}{5} + \frac{\pi}{10} - \pi + \frac{\pi}{2}}{2}\right) = 0$$

$$2 \sin\left(\frac{3}{5}\pi - \frac{3\pi}{5}\right) \cdot \cos\left(\frac{2}{5}\pi - \frac{3}{10}\pi\right) = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{3}{5}\pi - \frac{3\pi}{5} = \pi n \quad n \in \mathbb{Z} \\ \frac{2}{5}\pi - \frac{3}{10}\pi = \frac{\pi}{2} + \pi k \quad k \in \mathbb{Z} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \pi = \frac{\pi}{3} + \frac{5\pi}{3}n \quad n \in \mathbb{Z} \\ \pi = 2\pi + \frac{\pi}{2}k \quad k \in \mathbb{Z} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\pi}{3} + \frac{5\pi n}{3} \geq -3\pi \\ \frac{\pi}{3} + \frac{5\pi n}{3} \leq 2\pi \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} n \geq -2 \\ n \leq 1 \\ k \geq -\frac{2}{5} \text{ no } k \in \mathbb{Z} \Rightarrow k \geq 0 \\ k \leq 0 \end{array} \right.$$

$$n \in \{-2; -1; 0; 1\} \quad k \in \{0\}$$

$$\downarrow \\ x \in \{-3\pi; -\frac{4\pi}{3}; \frac{\pi}{3}; 2\pi\} \cup \{2\pi\}$$

$$\text{Ответ: } -3\pi; -\frac{4\pi}{3}; \frac{\pi}{3}; 2\pi$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                                   | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

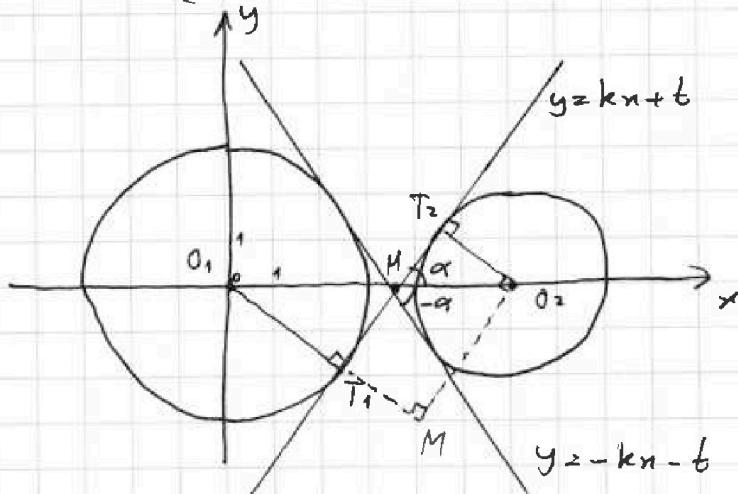
**МФТИ**

Задача 4.

$$\begin{cases} ax+2y-3b=0 \\ (x^2+y^2-9)(x^2+y^2-12x+32)=0 \end{cases}$$

Перепишем исходное уравнение в логарифме:

$$\begin{cases} y = -\frac{a}{2} + \frac{3}{2}b & \text{линейная прямая (прямая)} \\ \begin{cases} x^2+y^2=9 \\ (x-6)^2+y^2=4 \end{cases} & \begin{cases} \text{уравн. окружн. с центром } \\ \text{и центрами } \end{cases} \end{cases} \begin{array}{l} \text{с радиусом } 3 \text{ и } 2 \\ \text{и центрами } (0;0) \text{ и } (6;0) \end{array}$$



Заметим, что любая прямая пересекающая две окружности сразу будет ~~наличества~~ иметь угол с Ох меньше, чем где касательные, показанные на графике.

Линия  $y = kn + b$  образует с Ох угол  $\alpha$ .  
По определению линейной функции  $k = \tan \alpha$ .  
~~Также~~  $\angle T_2 M O_2 = \alpha \Rightarrow \angle O_1 M T_1 = \alpha$  т.к.  
эти углы падают леммингами. из т.  $O_2$  допустим  
перенести диаметр на прямую  $O_1 T_1$  в т. М

$$\Rightarrow O_2 M \parallel M T_1 \Rightarrow \angle O_1 M T_1 = \angle O_1 O_2 M = \alpha$$

$$T_1 M = T_2 O_2 = 2 \quad O_1 T_1 = 3 \Rightarrow O_1 M = 5$$

$$O_1 O_2 = 6 \Rightarrow \text{по Пифагору } O_2 M = \sqrt{6^2 - 5^2} = \sqrt{11}$$

$$\Rightarrow \tan \alpha = \frac{O_1 M}{O_2 M} = \frac{5}{\sqrt{11}} = k$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                                   | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Продолжение задачи 4.

$$\text{Рассмотрим } y = -\frac{\alpha}{2} + \frac{3}{2} b$$

Мы видим

угол этой прямой с Ои не  
меньше чем  $\alpha$ , если она пересекает  
 $od$  окр-стн.  
 $-\operatorname{tg}\alpha \leq -\frac{\alpha}{2} \leq \operatorname{tg}\alpha$

$$-\frac{5}{\sqrt{11}} \leq -\frac{\alpha}{2} \leq \frac{5}{\sqrt{11}}$$

$$-\frac{10}{\sqrt{11}} \leq \alpha \leq \frac{10}{\sqrt{11}}$$

Очевидно, что любая прямая проходящая  
через точку пересеч. касат. Н, пересекает  
окружность в двух точках. (см. рисунок),  
если  $\alpha \in (-\operatorname{tg}\alpha; \operatorname{tg}\alpha)$

Такие же для каждого такого  $\alpha$  на дёжн  
число ~~b~~ т.к. все прямые, проходящие  
через Н под углами  $\in (-\alpha; \alpha)$  с Ои, имеют  
свою запись в виде  $y = kx + t$ .

$$\text{Отвт: } \left( -\frac{10}{\sqrt{11}}, \frac{10}{\sqrt{11}} \right)$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



- |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                                   | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 5.

$$\begin{cases} \log_3^4 n + 6 \log_n 3 = \log_{n^2} 243 - 8 \\ \log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{5y^2} (3^{\prime\prime}) - 8 \end{cases}$$

Рассмотрим  $\log_3^4 n + 6 \log_n 3 = \log_{n^2} 243 - 8$

$$\frac{\log_3^4 n + 6}{\log_3 n} = \frac{5 \log_3 n - 8}{2 \log_3 n}$$

$$1 - \text{т.ч. } a = \log_3 n$$

$$a^4 + \frac{6}{a} = \frac{5a^5 - 8}{a} \quad | \cdot 2a \quad (a \neq 0, \text{ т.ч. } \log_3 n \neq 0)$$

$$2a^5 + 16a = 5 - 16a$$

$$2a^5 + 16a + 7 = 0$$

$$f(a) = 2a^5 + 16a + 7 \quad f'(a) = 10a^4 + 16$$

$$f'(a) > 0 \quad \text{всегда}$$

$\Rightarrow$  у  $f(a)$  не более одного корня.

Значит, что  $f(-1) < 0$   $f(0) > 0$  и  $f(a)$

$\Rightarrow$  у  $f(a)$  есть один корень  $a \in [-1; 0]$  <sup>возраст.</sup>

Рассмотрим  $\log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{5y^2} (3^{\prime\prime}) - 8$

$$b = \log_3 5y$$

$$b^4 + \frac{2}{b} = \frac{11}{2b} - 8 \quad | \cdot 2b \quad (b \neq 0 \text{ no } \log_3 5y)$$

$$2b^5 + 16b - 7 = 0$$

$$g(b) = 2b^5 + 16b - 7$$

$$g'(b) = 10b^4 + 16 > 0 \quad \text{всегда}$$

$\Rightarrow g(b)$  возрас.

$\Rightarrow$  у  $g(b)$  не более одного корня.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                                   | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что  $g(0) < 0$ ,  $g(1) > 0$  и  $g(b)$  везде.

$\Rightarrow$  у  $g(b)$  есть <sup>также</sup> один корень и  $b \in [0;1]$

Рассмотрим сумму двух уравн.

$$2a^5 + 16a + 7 + 2b^5 + 16b - 7 = 0$$

$$a^5 + b^5 + 8(a+b) = 0$$

$$(a+b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4 + 8) = 0$$

$$\begin{cases} a+b=0 \\ (a^4 - a^3b + 8) + (a^2b^2 - ab^3 + b^4) = 0 \end{cases}$$

Заметим, что  $a^4 - a^3b + 8 > 0$ , т.к.  $a \in [0;1]$   
и  $b \in [0;1]$

Также заметим, что у второй скобки:

$$D = b^4 - 4b^2 = -3b^2$$

$D < 0$   ~~$D > 0$~~  при  $b \neq 0$ ; при  $b = 0$   $a^2b^2 - ab^3 + b^4 = 0$

При этом <sup>единий</sup> корп.  $b^2 > 0 \Rightarrow a^2b^2 - ab^3 + b^4 > 0$

$$\Rightarrow a^4 - a^3b + 8 + a^2b^2 - ab^3 + b^4 \neq 0$$

$$\Rightarrow a+b=0 \Rightarrow \log_3 n + \log_3 (5y) = 0$$

$$\Rightarrow \log_3 (5ny) = 0 \Rightarrow 5ny = 1 \Rightarrow ny = \frac{1}{5}$$

Ответ: 0,2



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

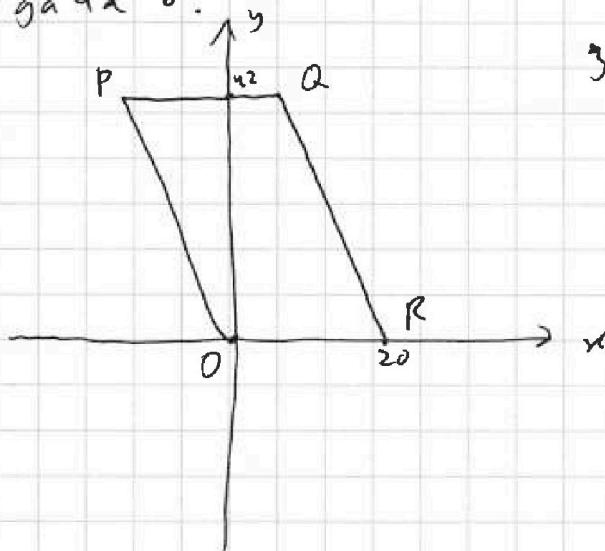
Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                            |                            |                            |                            |                            |                                       |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input checked="" type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Использование QR-кода недопустимо!

Задача 6.



$$3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$$

$$\Delta x - \Delta x = x_2 - x_1$$

$$\Delta y = y_2 - y_1$$

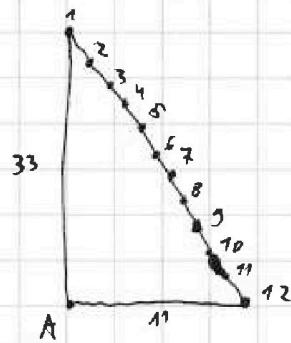
Torga

A( $x_1; y_1$ )

B( $x_1 + \Delta x; y_1 + \Delta y$ )

$$\text{Torga} \quad 3\Delta x + \Delta y = 33 \quad \Delta y = -3\Delta x + 33$$

Тогда или точки A точки B можно расположить  
таким образом:



12 возможных расположений  
т. B на гипотенузе  
треуг. ABC с катетами  
33 и 11

Заметим, что для гипотенузы  
будет параллельна дополнительная  
сторона параллелограмма

Тогда остаётся лишь посчитать кол-во точек  
B для каждой области расположения т. A.

Заметим, что на  $y_1 : 3$  мы можем  
расположить т. A. Внутри параллелограмма т. A  
может для т. B было место 10 способами.  
 $(20 - 11 + 1 = 10)$

А при  $y_1 : 3$  всего 9

Также начиная с  $y_1 = 10$  уменьшается ...



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                                   | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Продолжение задачи номер 6.

... удаляются не все 12 точек, а

их количество уменьшается на 1 каждые 3

значения  $y_1$

Тогда в работе каскада точек:

$$10 \cdot 12 + (10 + 9 + 9)(12 + 12 + 12 + 11 + 10 + \dots + 1) = \\ = 120 + 28 \cdot 102 = 120 + 2856 = 1976$$

Ответ: 1976

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



- |                            |                            |                            |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

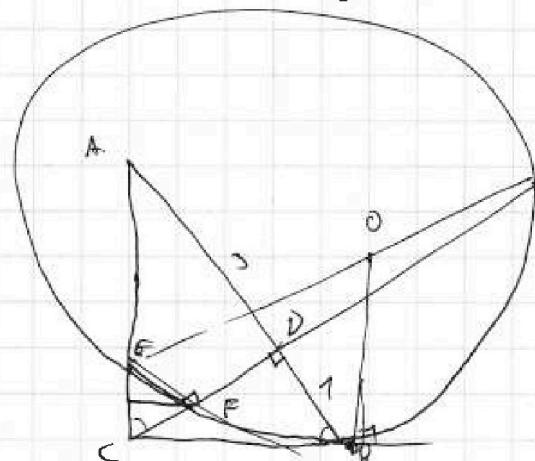
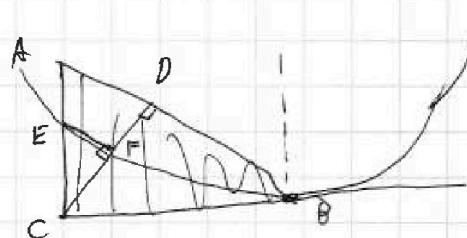
1

$$\begin{aligned}ab &: 2^{3^3} 3^{10} 5^{10} \\bc &: 2^{14} 3^{13} 5^{13} \\ac &: 2^{19} 3^{17} 5^{10} \\abc &: 2^{19} 3^{17} 5^{20}\end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_2 + b_2 \geq 9 \\ b_2 + c_2 \geq 14 \\ c_2 + a_2 \geq 19 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} a_2 = 7 \\ b_2 = 2 \\ c_2 = 12 \end{array}$$

$$a_2 + b_2 + c_2 \geq 21$$

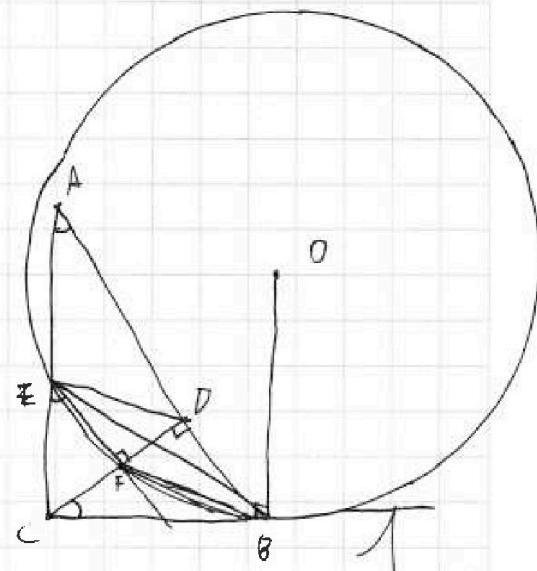
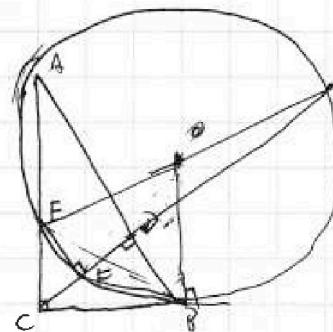
2



$$AC = 2\sqrt{3}$$

$$BC = \sqrt{3}$$

$$AB = 4$$



$$\frac{EC \cdot h}{2} = \frac{EC^2 \sqrt{3}}{8} \alpha$$

~~h = \frac{\sqrt{3}}{4} EC~~

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

③

$$5 \arcsin(\cos n) = n + \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Otgz: } \arcsin(\cos n) = \frac{n}{5} + \frac{\pi}{10}$$

$$\text{Otgz: } \frac{n}{5} + \frac{\pi}{10} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$$

$$n \in [-3\pi; 2\pi] \quad \text{A---n}$$

$$\sin(\arcsin(\cos n)) = \sin\left(\frac{n}{5} + \frac{\pi}{10}\right)$$
$$\cos n = \sin\left(\frac{n}{5} + \frac{\pi}{10}\right)$$

$$(a) \arcsin(\cos n) = \frac{\pi}{2} - n + 2k\pi \quad \text{При } n \in [0, \pi] \quad n \in \mathbb{Z}$$

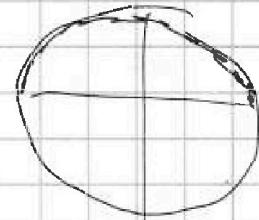
$$(b) \arcsin(\cos n) = n - \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad \text{При } n \in [-\pi + 2k\pi, 2k\pi] \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$a) n \in [2\pi n; \pi + 2\pi n] \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$5\left(\frac{\pi}{2} - n\right) = n + \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{5\pi}{2} - 5n = n + \frac{\pi}{2}$$

$$6n = 2\pi \quad n = \frac{\pi}{3} \quad \text{багаж в Offz}$$



④

$$\begin{cases} ax+2y-3b=0 \\ (x^2+y^2-9)(x^2+y^2-12x+32)=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -\frac{a}{2}x + \frac{3}{2}b \\ x^2 + y^2 = 9 \\ (x-6)^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$

2 n.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\left\{ \begin{array}{l} \log_3 n + \frac{6 \log_3 5y}{\log_3 x} = \cancel{2 \log_3 x} - 8 \\ \log_3(5y) + \frac{2 \log_3 x}{\log_3 5y} = \frac{11}{2 \log_3 5y} - 8 \end{array} \right. \quad \begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\ 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \\ 1 & 6 & 1 & & & \end{matrix}$$

$(x^4 - 8)x = -3,5$

$$\left\{ \begin{array}{l} \log_3^5 x + 10 = \cancel{\frac{11}{2}} - 8 \log_3 n \\ \log_3^5(5y) + 10 = \cancel{\frac{11}{2}} - 8 \log_3 5y \end{array} \right.$$

$$\log_3^5 n + \log_3^5(5y) = -8(\log_3 n + \log_3 5y)$$
$$\log_3 n + \log_3(5y) = 20 \quad \log_3 n \cdot \log_3(5y) = 6$$

$$\left( \log_3 n + \log_3 5y \right) \left( \log_3^5 n - \log_3^3 n \cdot \log_3 5y + \log_3^2 n \cdot \log_3^2 5y - \log_3 n \cdot \log_3^3 5y + \log_3^4 5y \right) = -8(\log_3 n + \log_3 5y)$$
$$\text{от} \quad \log_3^5 n - \log_3^4 5y = \frac{3,5}{\log_3 n} - \frac{3,5}{\log_3 5y}$$

$$a) 5y = n -$$

б)

$$\frac{3,5}{\log_3 n \cdot \log_3 5y}$$

ч.



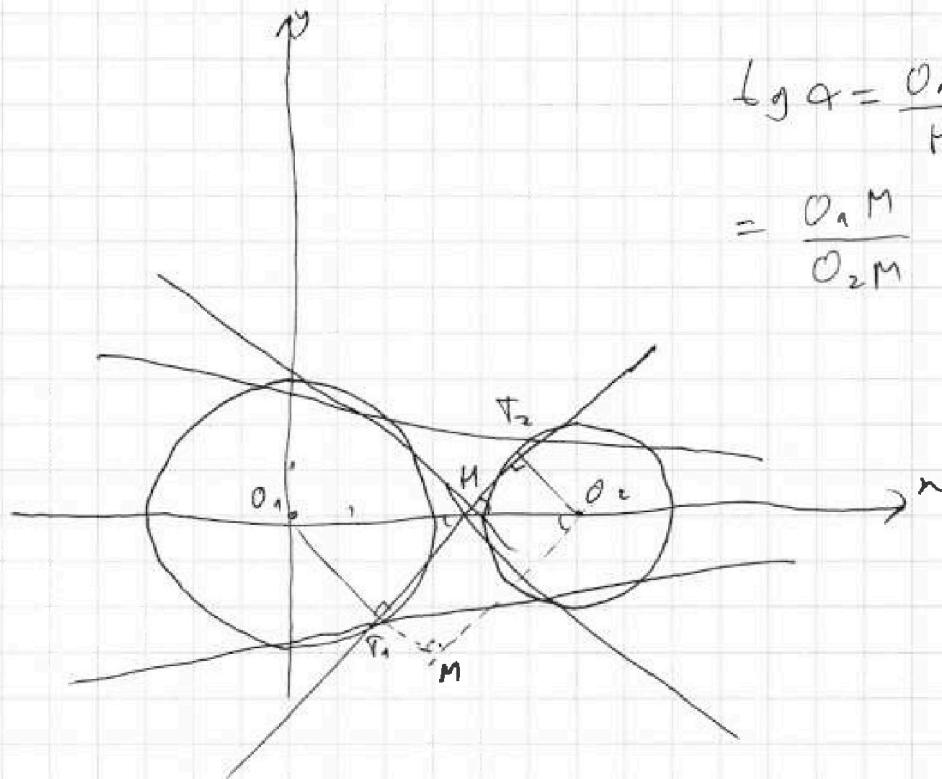
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                            |                            |                            |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha &= \frac{O_1 T_1}{M T_1} = \frac{O_2 T_2}{M T_2} \\ &= \frac{O_1 M}{O_2 M} \end{aligned}$$

$$O_1 O_2 = 6$$

$$O_1 M = 3 + 2 = 5$$

$$O_2 M = \sqrt{6^2 - 5^2} = \sqrt{11}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{5}{\sqrt{11}}$$

$$a \in \left( -\frac{10}{\sqrt{11}}, \frac{10}{\sqrt{11}} \right)$$

$$\textcircled{5} \quad \left\{ \begin{array}{l} \log_3 x + 6 \log_x 3 = \log_x 243 - 8 \\ \log_3 (\gamma_y) + 2 \log_{\gamma_y} 3 = \log_{25y^2} (3^{11}) - 8 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \log_3 (\gamma_y) + 2 \log_{\gamma_y} 3 = \log_{25y^2} (3^{11}) - 8 \end{array} \right.$$

31.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

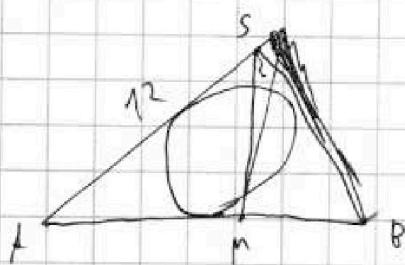
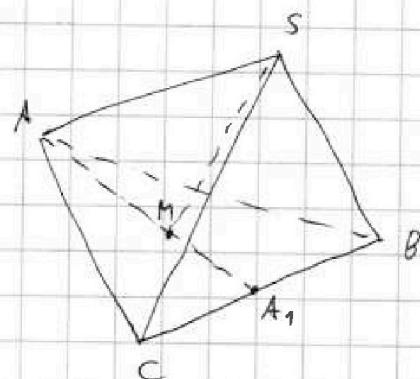
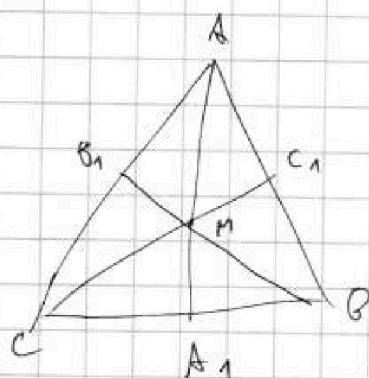
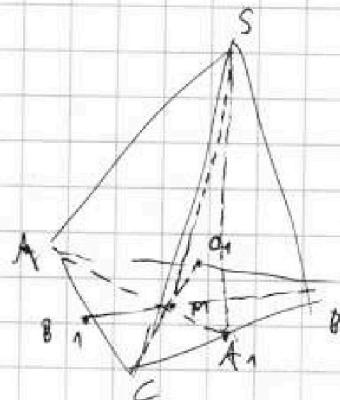
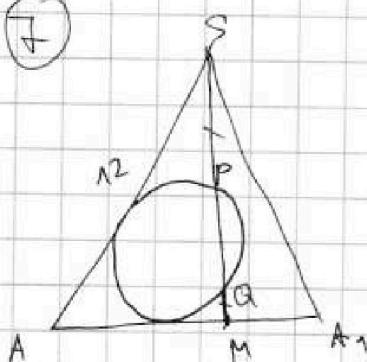
Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                            |                            |                            |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

7



$$m^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

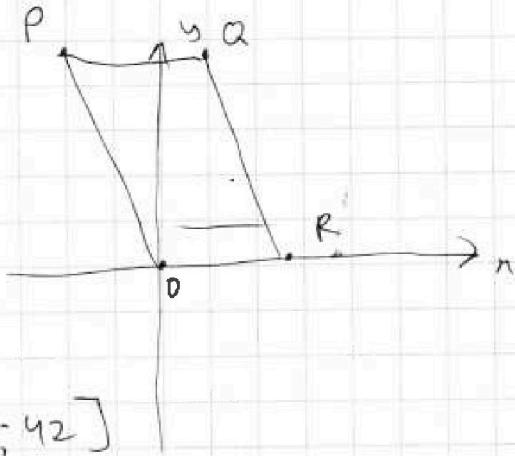
Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

6



$$y \in [0; 42]$$

$$n \in [-\frac{y}{3}; 20 - \frac{y}{3}]$$

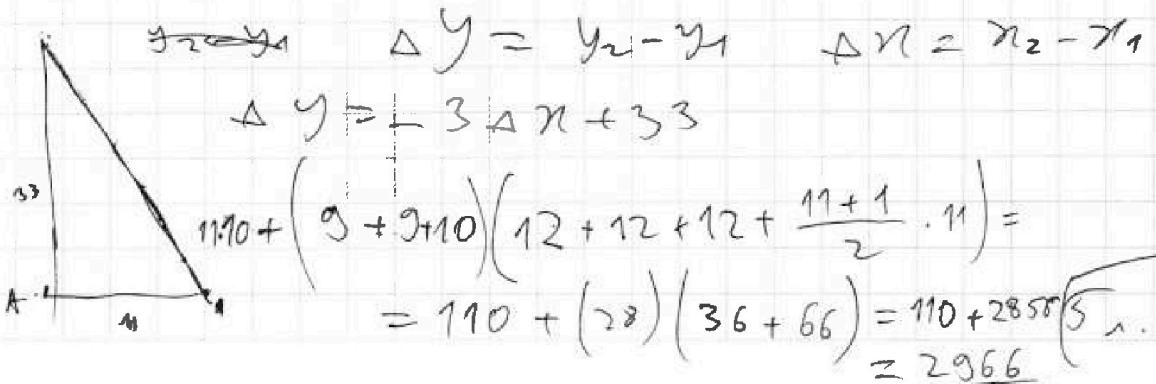
$$n_2 = n_1 + \frac{y_1 - y_2 + 11}{3}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} n_1 + \frac{y_1 - y_2 + 11}{3} \geq -\frac{y_2}{3} \\ n_1 + \frac{y_1 - y_2}{3} - 11 \leq 20 - \frac{y_2}{3} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} n_1 + \frac{y_1}{3} \geq -11 \\ n_1 + \frac{y_1}{3} \leq 49 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1 \geq -33 \\ y_1 \leq 33 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} n_1 \geq -\frac{y_1}{3} - 11 \\ n_1 \leq -\frac{y_1}{3} + 49 \end{array} \right.$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

(5)

$$\log_3 n + 6 \log_3 3 = \log_3 243 - 8$$

$$a = \log_3 n$$

$$a^4 + \frac{6}{a} = \frac{5}{2a} - 8$$
$$2a^5 + 16a + 7 = 0$$

$$f(a) = 10a^4 + 16$$

$$\log_3 n \neq 6$$

$$243 = 81 \cdot 3 = 3^5$$

$$a^4 + \frac{6}{a} = \frac{5}{2a} - 8$$

$$2a^5 + 16a + 7 = 0$$

$$a \in [-1; 0]$$

$$f(a) = \frac{1}{a}$$
$$7a^5 + 16a + 2 = 0$$

$$\log_3^4(5y) + 2 \log_3 y = \log_{25y^2} (3^n) - 8$$

$$b = \log_3 5y$$

$$b^4 + \frac{2}{b} = \frac{11}{2b} - 8$$

$$b^5 + 8b - 3,5 = 0$$

$$2b^5 + 16b - 7 = 0 \quad b \in [0; 1]$$

$$2(a^5 + b^5) + 16(a + b) = 0$$

$$(a+b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4 + 8) = 0$$

$$(a^4 + a^3b + 8 + a^2b^2 + ab^3 + b^4) = 0$$

$$\log_3 n \neq \log_3 5y = 0$$

$$a^4 \leq 1$$

$$a^3 b < 0$$

$$D < 0$$

$$\log_3 5ny = 0 \Rightarrow a^4 + a^3b + 8 > 0$$

$$ny = \frac{1}{5}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задание 1.

$$a, b, c \in \mathbb{N}$$

$$ab : 2^9 3^{10} 5^{10}$$

$$bc : 2^{14} 3^{15} 5^{13}$$

$$ac : 2^{19} 3^{18} 5^{30}$$

При  $a_2, b_2, c_2$  — минимальные удовл. условие  
степени числа 2, для множества чисел  $a, b, c$   
т.е.  $a : 2^{a_2}, b : 2^{b_2}, c : 2^{c_2}$

Аналогично  $a_3, b_3, c_3$  — степени 3.

Аналогично  $a_5, b_5, c_5$  — степени 5.

Из утверждения  $ab : 2^9 3^{10} 5^{10}$  следует, что

$$a_2 + b_2 \geq 9 \quad a_3 + b_3 \geq 10 \quad a_5 + b_5 \geq 10$$

Аналогично из  $bc : 2^{14} 3^{15} 5^{13}$

$$b_2 + c_2 \geq 14 \quad b_3 + c_3 \geq 13 \quad b_5 + c_5 \geq 13$$

Так же из  $ac : 2^{19} 3^{18} 5^{30}$

$$a_2 + c_2 \geq 19 \quad a_3 + c_3 \geq 18 \quad a_5 + c_5 \geq 30$$

$$\begin{cases} a_2 + b_2 = 9 \\ b_2 + c_2 = 14 \\ a_2 + c_2 = 19 \end{cases} \quad \begin{cases} a_3 + b_3 = 10 \\ b_3 + c_3 = 13 \\ a_3 + c_3 = 18 \end{cases} \quad \begin{cases} a_5 + b_5 = 10 \\ b_5 + c_5 = 13 \\ a_5 + c_5 = 30 \end{cases}$$
$$\begin{aligned} c_2 &= b_2 + 10 \\ b_2 &= 2 \\ c_2 &= 12 \\ a_2 &= 7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_3 &= 8 + b_3 \\ b_3 &= 2,5 \\ C_3 &= 10,5 \\ a_3 &= 7,5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_5 + b_5 &\leq 10 \\ b_5 + c_5 &= 13 \\ a_5 + c_5 &= 30 \\ C_5 &= 20 + b_5 \end{aligned}$$

Получили решение  
степени, т.к. неудобно  
решать это линейное уравнение

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> |

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

 МФТИ



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

5

6

7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ