МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^6 3^{13} 5^{11}$, bc делится на $2^{14} 3^{21} 5^{13}$, ac делится на $2^{16} 3^{25} 5^{28}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC. Окружность, касающаяся прямой AC в точке A, пересекает высоту CD, проведённую к гипотенузе, в точке E, а катет BC – в точке F. Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1{,}4$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF.

3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система уравнений

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_{x^3} \frac{1}{121} - 5, \quad \text{и} \quad \log_{11}^4 (0{,}5y) + \log_{0{,}5y} 11 = \log_{0{,}125y^3} \left(11^{-13}\right) - 5.$$

Найдите все возможные значения произведения xy.

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-15;90)$, $Q(2;90)$ и $R(17;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K, лежащей на отрезке AM. Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q. Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 180, $SA = BC = 20$.

а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1.

б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N, $SN = 6$, а радиус сферы Ω равен 8.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 [X] 2 [ ] 3 [ ] 4 [ ] 5 [ ] 6 [ ] 7 [ ]

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№1

Давайте посмотрим на степени вхождения чисел 2,3,5 в разложении на простые чисел a, b, c.

a_2, b_2, c_2 – степень вхождение двойки в разложении на простые в чисел a, b, c соотвенственно

$a_3\ b_3\ c_3$
$a_5\ b_5\ c_5$ – определяется аналогично

Понятно, что степень вхождение двойки в $ab = a_2+b_2$.
И если $ab \vdots 2^6 \Rightarrow a_2+b_2 \geqslant 6$

Аналогичным образом составим уравнения:

$$\begin{cases} a_2+b_2 \geqslant 6 \\ b_2+c_2 \geqslant 14 \\ a_2+c_2 \geqslant 16 \end{cases} \quad \begin{cases} a_3+b_3 \geqslant 13 \\ b_3+c_3 \geqslant 21 \\ a_3+c_3 \geqslant 25 \end{cases} \quad \begin{cases} a_5+b_5 \geqslant \cancel{11} \\ b_5+c_5 \geqslant 13 \\ a_5+c_5 \geqslant 28 \end{cases}$$

Сложим 3 нер-ва:

$2(a_2+b_2+c_2) \geqslant 36$

$a_2+b_2+c_2 \geqslant 18$

$2(a_3+b_3+c_3) \geqslant 59$

$a_3+b_3+c_3 \geqslant 30$
(т.к. все числа целые)

$\cancel{2(a_5+b_5+c_5) \geqslant 52}$

$\cancel{a_5+b_5+c_5 \geqslant 26}$

$a_5+c_5 \geqslant 28$

$a_5+c_5+b_5 \geqslant 28$
(т.к. $b_5 \geqslant 0$)

$$abc \vdots 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$$
$$\Downarrow$$
$$abc \geqslant 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$$

При этом равенство достигается, если:

$a = 2^4 \cdot 3^9 \cdot 5^{14}$

$b = 2^2 \cdot 3^4 \cdot 5^0$

$c = 2^{12} \cdot 3^{17} \cdot 5^{14}$

$ab = 2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{14}$

$bc = 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{14}$

$ac = 2^{16} \cdot 3^{26} \cdot 5^{28}$

$$\boxed{abc = 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}}$$

Отв: $2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$

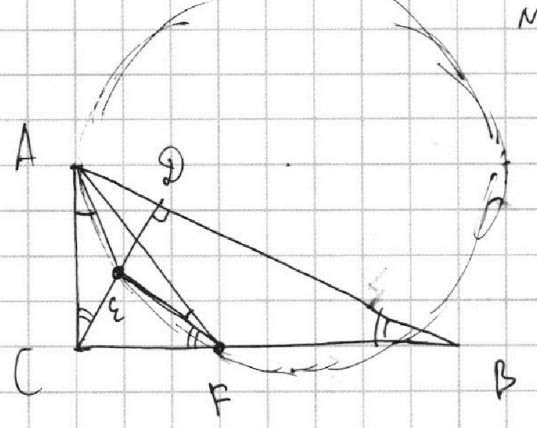
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№2



I) $\angle AFE = \angle CAE$ (угол между кас. и хордой)

II) $\angle EFC = \angle ABC$ ($EF \parallel AB$)

$\angle ABC = \angle ACD$ (высота в прям. $\triangle$ дополняет $\angle DCB$ до $90°$)

$\Downarrow$

$\angle EFC = \angle ACE$

III) Рассмотрим $\triangle AFC$. Рассмотрим окружности AFE и CFE. Заметим, что AC – общая касательная к этим двум окружностям ($\angle CFE = \angle ACE$; $\angle AFE = \angle CAE$), а EF – радось этих двух окружностей.

Тогда EF проходит через середину AC (т.к. только у середины AC степень относительно обоих окружностей будет одинакова)

EF проходит через середину AC и $\parallel AB \Rightarrow EF$ – средняя линия $\triangle ABC$.

IV) EF – средняя линия $\triangle ABC \Rightarrow EF$ – средняя линия $\triangle CDB$

$\Downarrow$

$$\frac{S_{CEF}}{S_{CDB}} = \frac{1}{4}$$

V) $\frac{S_{CDB}}{S_{ACD}} = \frac{BD}{AD} = \frac{BD}{AB-BD}$ (по усл. $AB = 1{,}4BD$) $= \frac{BD}{0{,}4BD} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$

$S_{CDB} = 2{,}5\, S_{ACD}$

VI) $\frac{S_{CEF}}{S_{CDB}} = \frac{S_{CEF}}{2{,}5\, S_{ACD}} = \frac{1}{4}$ $\quad$ $\frac{S_{CEF}}{S_{ACD}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{5}{2} = \frac{5}{8}$ $\Rightarrow$ $\frac{S_{ACD}}{S_{CEF}} = \frac{8}{5} = 1{,}6$

$\boxed{\text{Отв: } 1{,}6}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$10\arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$

$\arccos(\sin x) = \frac{9}{10}\pi - \frac{2}{10}x$

$\cos\left(\frac{9}{10}\pi - \frac{2}{10}x\right) = \sin x$

$\frac{9}{10}\pi - \frac{2}{10}x + x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$

$\frac{8}{10}x = \left(\frac{5}{10} - \frac{9}{10}\right)\pi + 2\pi n \quad n \in \mathbb{Z}$

$8x = -4\pi + 2\pi n$

$\boxed{x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n}$

$0 \le \frac{9}{10}\pi - \frac{2}{10}x \le \pi$

$-\frac{9}{10}\pi \le -\frac{2}{10}x \le \frac{1}{10}\pi$

$\frac{9}{10}\pi \ge \frac{2}{10}x \ge -\frac{1}{10}\pi$

$9\pi \ge 2x \ge -\pi$

$\boxed{\frac{9}{2}\pi \ge x \ge -\frac{\pi}{2}}$

Отв: $-\frac{\pi}{2};\ \frac{3}{2}\pi;\ \frac{7}{2}\pi$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№ 4

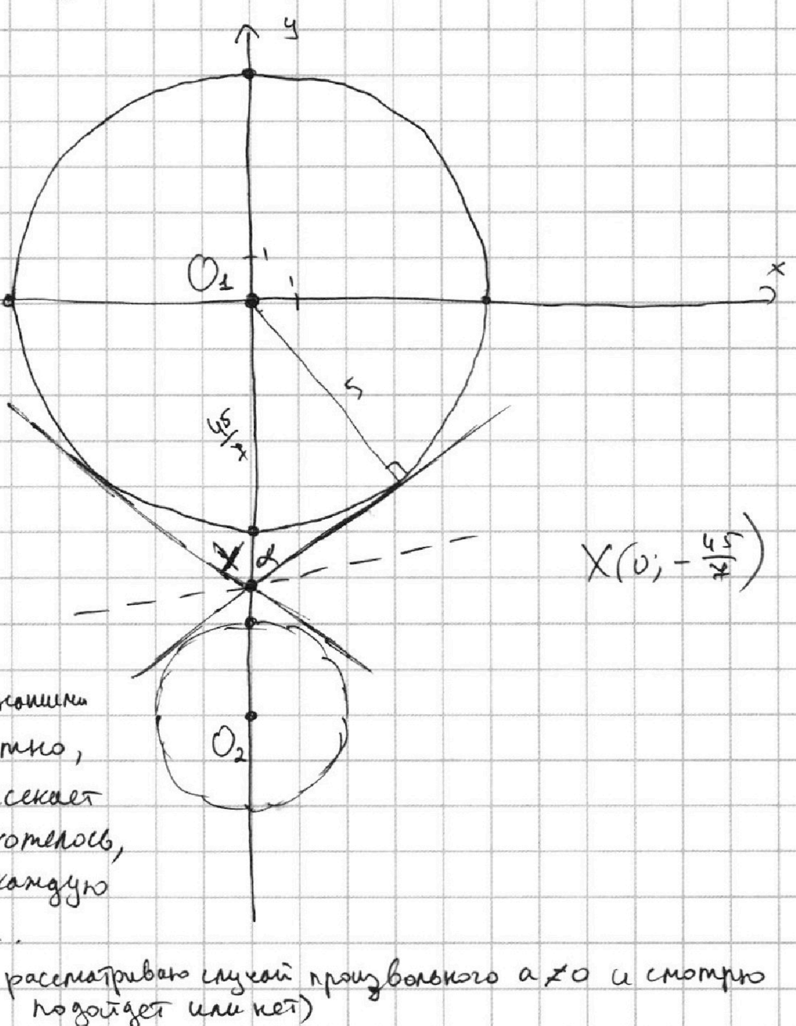
$$\begin{cases} 5x+6ay-b=0 \\ (x^2+y^2-25)(x^2+y^2+18y+77)=0 \end{cases}$$

Заметим, что, если $a \cancel{=} 0$, то решение 1 $\Rightarrow a \neq 0$

Теперь попробуем понять как выглядит решение второго уравнения на графике:

$$\left[\begin{array}{l} x^2+y^2-25=0 \\ x^2+y^2+18y+77 = x^2+(y+9)^2-4=0 \end{array}\right.$$

Это уравнение окружностей. Нарисуем их



А первое уравнение – это уравнение прямой ($a \neq 0$)

$$y = -\frac{5}{6a}x + \frac{b}{6a}$$

Нам бы хотелось, чтобы прямая имела 4 точки пересечения с нашими двумя окружностями. Понятно, что каждую из них она пересекает ≤ 2 раз, то есть нам бы хотелось, что-бы прямая пересекала каждую окружность по два раза.

Выберем b так, чтобы (я рассматриваю случай произвольного $a \neq 0$ и смотрю подойдет или нет)

$$\frac{b}{6a} = -\frac{45}{7}$$

Тогда наша прямая пройдет через точку X на рисунке

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№4 (продолжение)

Разберем два случая:

I) Наша прямая прошла между двумя касательными (как пунктирная прямая на рисунке). (или совпала с касательными) (реш. ≤2)

Тогда поймем, что, меняя b, я могу только сдвинуть прямую вверх или вниз, не меняя угол наклона. Но тогда, сдвигая вверх, я точно не получу точек пересечения с нижней окружностью. Аналогично, сдвигая вниз

⇓

Такая прямая нам не подойдет.

II) Иначе, наша прямая пересекает и верхнюю, и нижнюю окружность (именно пересекает, а не касается). То есть такие прямые нам подойдут.

PS: две общие внутренние касательные проходят через X, т.к.

$$\frac{O_1X}{O_2X} = \frac{R_1}{R_2}$$

$$\frac{\frac{45}{7}}{9-\frac{45}{7}} = \frac{5}{2} \qquad \frac{45}{63-45} = \frac{5}{2} \qquad \frac{45}{18} = \frac{5}{2}$$

То есть существует гомотетия в т. X, переводящая одну окружность в другую ⇒ внутр. касательные проходят через X.

Осталось понять, какие прямые проходят там, где мне надо.

~~Угол наклона~~ Тангенс угла наклона касательных равен:

$$tg\alpha\,(\text{см. рис.}) = \frac{5}{\sqrt{\frac{45^2}{49}-25}} = \frac{5}{\sqrt{\frac{(81-49)\cdot 25}{49}}} = \frac{5\cdot 7}{\sqrt{32}\cdot 5} = \frac{7}{\sqrt{32}}$$

$$tg(90-\alpha) = ctg\alpha = \frac{\sqrt{32}}{7}$$ (другой кас. соответственно $-\frac{\sqrt{32}}{7}$)

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Мне нужно, чтобы угол наклона моей прямой удовлетворял нер-ву:

I $\quad -\frac{5}{6a} > \frac{\sqrt{32}}{7} \qquad \left(-\frac{5}{6a} > 0\right) \qquad -\frac{5}{6a} \neq 0$ очев.

II $\quad -\frac{5}{6a} < -\frac{\sqrt{32}}{7} \qquad \left(-\frac{5}{6a} < 0\right)$

I $\quad -\frac{5}{6a} > 0 \qquad 6a < 0 \qquad \boxed{a<0}$

$$-\frac{5}{6a} > \frac{\sqrt{32}}{7}$$

$$\frac{5}{6a} < -\frac{\sqrt{32}}{7}$$

$$\frac{1}{6a} < -\frac{\sqrt{32}}{35}$$

$$\frac{1}{a} < -\frac{6\sqrt{32}}{35} \qquad \boxed{a<0}$$

$$1 > \frac{-6\sqrt{32}\,a}{35}$$

$$35 > -6\sqrt{32}\,a$$

$$\frac{35}{-6} < \sqrt{32}\,a$$

$$\boxed{a > -\frac{35}{6\sqrt{32}}}$$

II $\quad -\frac{5}{6a} < 0 \qquad \boxed{a>0}$

$$-\frac{5}{6a} < -\frac{\sqrt{32}}{7}$$

$$\frac{5}{6a} > \frac{\sqrt{32}}{7} \qquad \boxed{a>0}$$

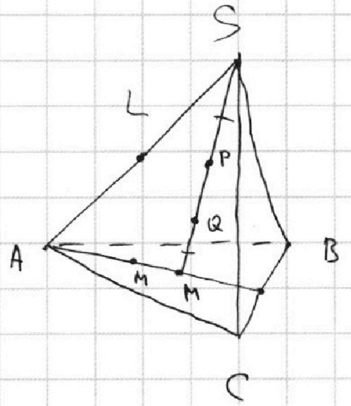
$$\frac{5}{6} > \frac{\sqrt{32}\,a}{7}$$

$$\frac{35}{6} > \sqrt{32}\,a$$

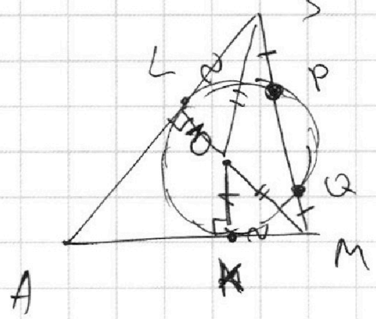
$$\boxed{\frac{35}{6\sqrt{32}} > a}$$

$$\boxed{\text{Отв: } \left(-\frac{35}{6\sqrt{32}};0\right) \cup \left(0;\frac{35}{6\sqrt{32}}\right)}$$

№7



1) Рассмотрим отдельно плоскость ASM. Понятно, что Ω пересекает её по окружности, при том на этой окружности лежат KLPQ. Пусть O – центр этой окружности.



I) ~~Очевидно~~ O равноудалена от P и Q $\Rightarrow$ O на серпере к PQ

$SP = MQ$

$\Downarrow$

O на серпере к SM

$OS = OM$

II) L и K точки касание Ω с ~~...~~ отрезками AM и AS

$\Downarrow$

$OL \perp AS$; $OL = OK$; $OK \perp AM$ $\Rightarrow$ $\Delta OKM = \Delta OLS$ (по гипотенузе и катету)

$\Downarrow$

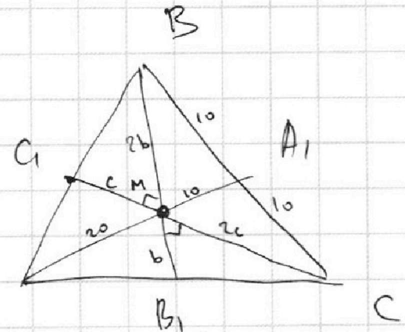
$\boxed{SL = MK}$

III) $AL = AK$ отрезки касательной

$\Downarrow$

$20 = AS = AM$

Рассмотрим плоскость ABC



$AM = 20 \Rightarrow MA_1 = \frac{20}{2} = 10$ (т.к. медианы т. пересечение делятся 2:1)

$\Downarrow$

$BA_1 = CA_1 = MA_1 = 10$ (т.к. $BC = 20$)

$\Rightarrow \angle BMC = 90°$ (медиана равна половине гипотенузы)

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№7 (продолжение)

$$S_{ABC} = S_{AB_1C_1} + S_{C_1MB_1} + S_{BMC_1} + S_{CMB_1} + S_{BCM}$$

пусть $BB_1 = 3b$
$CC_1 = 3c$

$$S_{ABC} = \frac{1}{4}S_{ABC} + \frac{bc}{2} + \frac{2bc}{2} + \frac{2bc}{2} + \frac{4bc}{2}$$

(площадь прямоугольного Δ)

$$\frac{3}{4}S_{ABC} = \frac{9bc}{2}$$

$$\frac{3}{2}S_{ABC} = 9bc$$

$$\frac{3}{\cancel{2}}\cdot \cancel{180}^{90} = 9bc$$

$$30 = bc$$

а) Нас интересует значение выражение:

$$AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = 30 \cdot 3b \cdot 3c = 270bc = 270 \cdot 30 = 8100$$

$\boxed{\text{Отв: а) } 8100}$

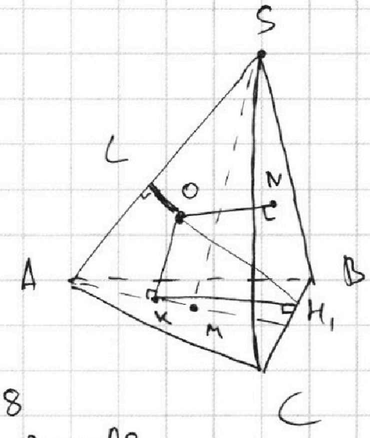
б)

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№7 б



$R=8$
$BC=20=AS$
$SN=6$

Сразу заметим, что O (центр Ω) лежит на биссекторной плоскости двугранного угла при ребре BC (т.к. Ω касается SBC и ABC)

I) $SO^2=ON^2+SN^2$ (т. Пифагора $\triangle SON$)

$SO^2=8^2+6^2$

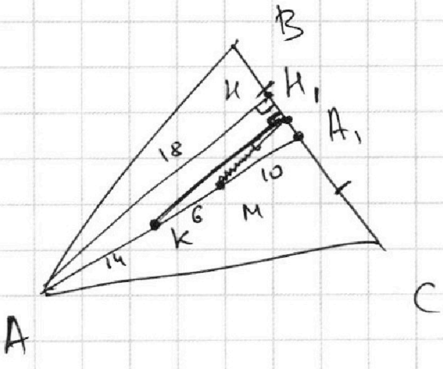
$SO=10$

$SL^2=SO^2-OL^2$ (т. Пифагора $\triangle SLO$)

$SL^2=10^2-8^2$

$SL=6$

Как мы уже доказали в пункте а; $\boxed{SL=KM}$ и $\triangle AMS$-равнобед
Рассмотрим $\triangle ABC$



AH – высота $\triangle ABC$

$\frac{AH\cdot BC}{2}=S_{ABC}$

$\frac{AH\cdot 20}{2}=180$

$AH=18$

KH_1 – перпендикуляр из K на BC

$\triangle KH_1A_1 \sim \triangle AHA_1$ ($KH_1\perp BC$ и $AH\perp BC$)

$\Downarrow$

$\frac{KH_1}{AH}=\frac{KA_1}{AA_1}$ (по пункту а) $AA_1=30$, $A_1M=10$, $AM=20$)

$KH_1=\cancel{18}^{3}\cdot\frac{16}{\cancel{30}_5}=\frac{48}{5}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№7Б (продолжение)

$48 = 6\cdot 8 =$
$= 2\cdot 3\cdot 2^3 =$
$= 2^4\cdot 3$

K — перпендикуляр из O на ABC

KH_1 — перпендикуляр из K на BC

$\Downarrow$

OH_1 — перпендикуляр из O на BC (по ТТП)

$OH_1^2 = OK^2 + KH_1^2$ (т. Пифагора $\triangle OKH_1$)

$$OH_1^2 = 64 + \frac{48^2}{25} = \frac{64\cdot 25 + 2^8\cdot 3^2}{5^2} = \frac{2^6\cdot 5^2 + 2^8\cdot 3^2}{5^2} = \frac{2^6(25+36)}{5^2} =$$

$$= \frac{2^6\cdot 61}{5^2}$$

$$OH_1 = \frac{8}{5}\sqrt{61}$$

$$\sin\angle OH_1K = \frac{OK}{OH_1} = \frac{8}{\frac{8}{5}\sqrt{61}} = \frac{5}{\sqrt{61}}$$

$$\angle OH_1K = \arcsin\left(\frac{5}{\sqrt{61}}\right)$$

Двугранный угол, который мы ищем в два раза больше, т.к. O лежит на биссекторной плоскости ABC и SBC

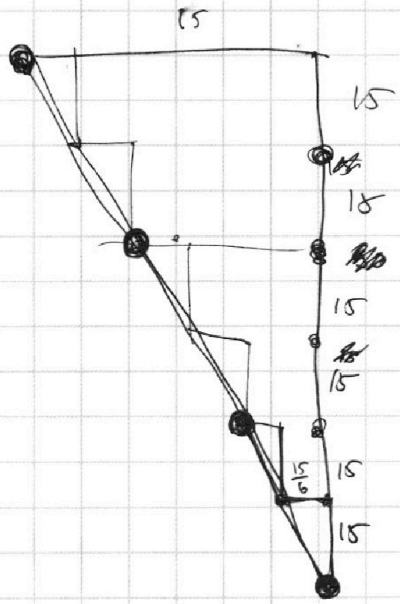
$\Downarrow$

$$\boxed{\text{Отв: } 2\arcsin\left(\frac{5}{\sqrt{61}}\right)}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

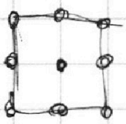
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



5

4клетки

$\frac{5}{2}$

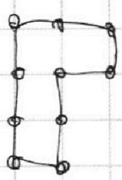


0 1 2

$\boxed{91}$

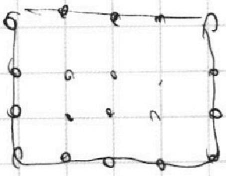
$1+\frac{8}{2}-1$

$B+\frac{5}{2}-2$



$17 \times 90 = 1530$

$0+\frac{10}{2}-1$



$6+\frac{14}{2}-1=12$

$\frac{18+18+2+2}{2}+B-1=17\cdot 90$

$20+B-1=1530$

$B-1=1510$

$\boxed{B=1509}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

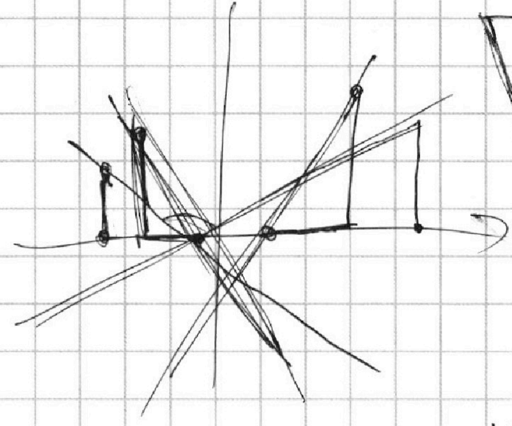
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

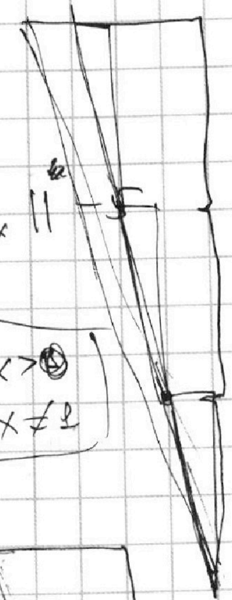
МФТИ



$$\log_{11}^4 x - 6\log_x 11 = \log_{x^3}\frac{1}{121} - 5$$

$$\log_{11}^4 x - \frac{6}{\log_{11} x} =$$

$$\frac{1}{\log_x^4 11} - 6\log_x 11 = -\frac{2}{3}\log_x 11 - 5$$



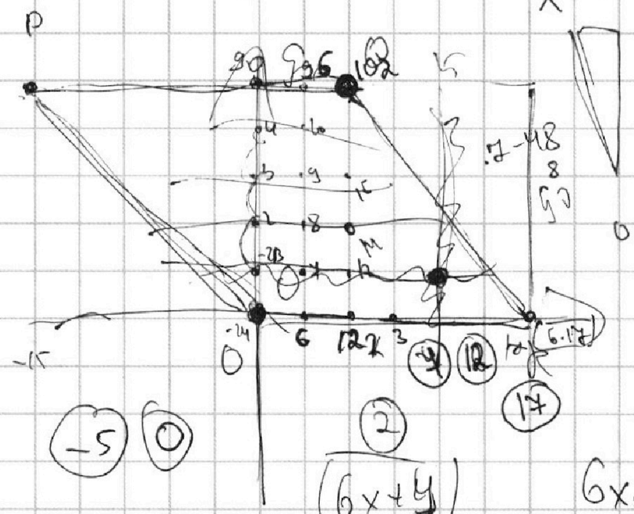
$$\boxed{\begin{matrix} x>0 \\ x\neq 1 \end{matrix}}$$

-90 90

-90 -84

$11^a = x$

$x^{\frac{1}{a}} = \sqrt[a]{x} = \sqrt[a]{11^a} = 11$



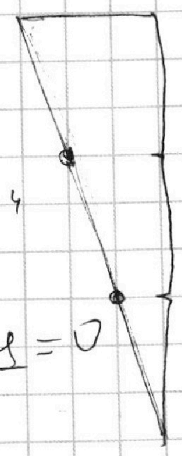
$$\frac{1}{t^4} - 6t = -\frac{2}{3}t - 5$$

$$1 - 6t^5 = -\frac{2}{3}t^5 - 5t^4$$

54 :48 = 6·17

9 8

0 17



(-5) (0) (2) (17)

$(6x+y)$

$6x_2 -$

$$\left(6 - \frac{2}{3}\right)t^5 - 5t^4 - 1 = 0$$

$6x_2 + y_2$

$$6(x_2 - x_1) + y_2 - y_1 = 48$$

$$\frac{16}{3}t^5 - 5t^4 - 1 = 0$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$\exists b$, что

$$\begin{cases} 5x+6ay-b=0 \\ (x^2+y^2-25)(x^2+y^2+18y+77)=0 \end{cases}$$

$6ay=b-5x$

$y=-\frac{5}{6a}x+b$

$\boxed{a=0}$

4 реш.

$5x-b=0$

$x=\frac{b}{5}$

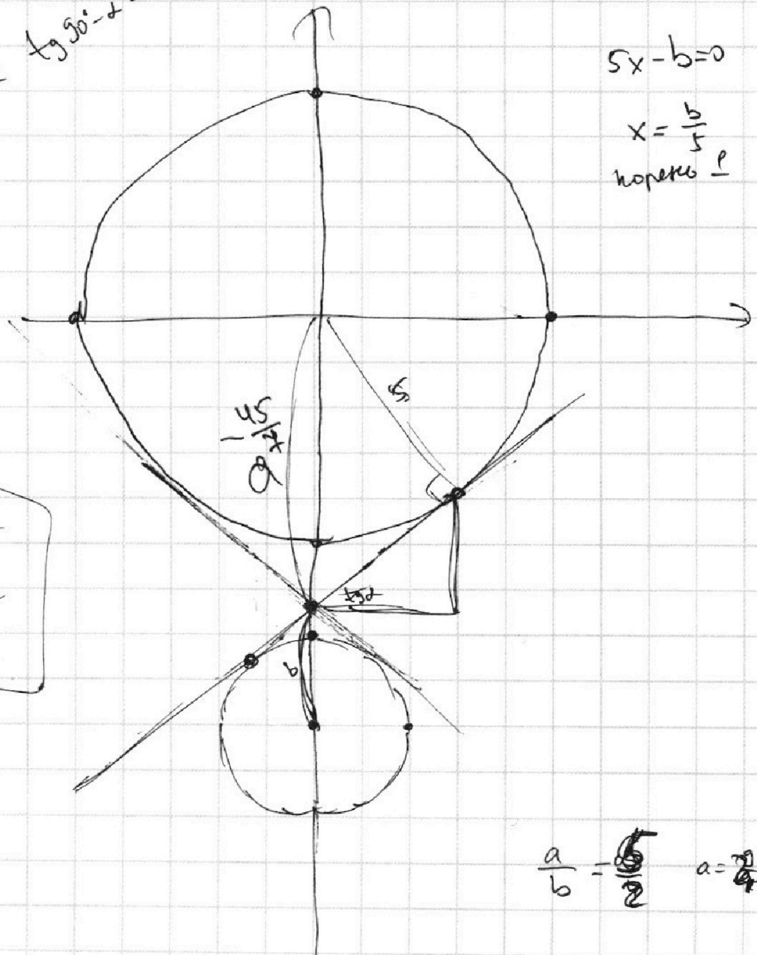
корень ?

$x^2+y^2=25$

$tg\,\alpha \quad tg\,90^\circ-\alpha=\frac{\sin 90-\alpha}{\cos 90-\alpha}=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

$x^2+y^2+2\cdot 9y+9^2$

$x^2+(y+9)^2=4$



$\frac{35}{47}$

$\boxed{\frac{47}{35}-\frac{45}{7}}$

кас.

x^2+y^2-25

$\sqrt{\frac{45^2}{49}-25}=$

$=\sqrt{\frac{81\cdot25-25\cdot49}{49}}=\sqrt{\frac{25(81-49)}{49}}=\frac{\sqrt{25\cdot32}}{7}=\frac{5}{7}\sqrt{32}$

$\frac{a}{b}=\frac{5}{2}$ $a=\frac{5}{2}b$

$a+b=$

$\cancel{\frac{9}{4}b+\frac{4}{4}b=\frac{13}{4}b=}$

$3{,}5b=9$

$b=\frac{18}{7}$ $9\cdot\frac{2}{7}$

$\frac{a}{9-a}=\frac{5}{2}$

$2a=45-5a$

$7a=45$

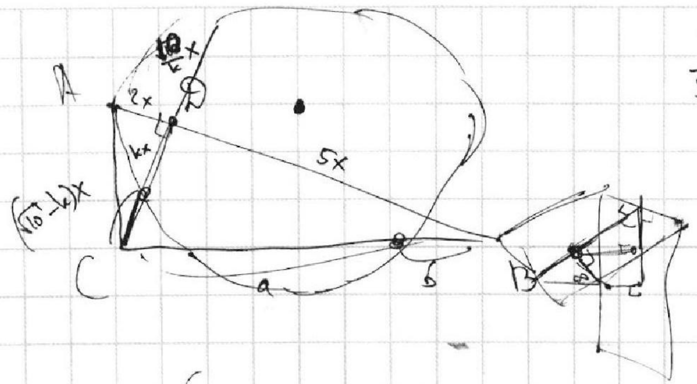
$a=\frac{5}{2}\cdot\frac{18}{7}=\frac{45}{7}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



$\frac{7x}{5x} = \frac{7}{5} = \cancel{...}$

$\left(\sqrt{10}\,\cancel{x} - kx\right)\cdot\left(\sqrt{10}x + \frac{10}{k}x\right) =$

$= 10x^2 - k\sqrt{10}x^2 + \frac{10\sqrt{10}}{k}x^2 \cancel{-10x^2}$

$= x^2k\left(\frac{10\sqrt{10}}{k^2} - \sqrt{10}\right)$

$\frac{20\cdot h}{2} = 180$

$20\cdot h = 360$

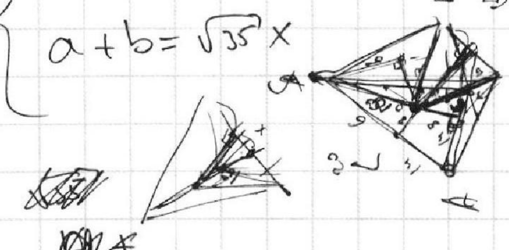
$h = 18$

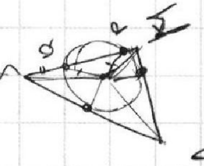
$CD = \sqrt{10}x$

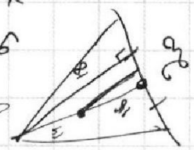
$BC = \sqrt{10x^2 + 25x^2} = \sqrt{35}x$

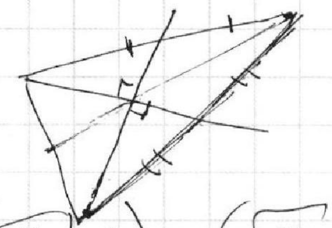
$$\begin{cases} \frac{a}{b} = \frac{\sqrt{10} - k}{k} \\ a + b = \sqrt{35}x \end{cases}$$

(21)









$ab = \left(\frac{\sqrt{10} - k}{k}\cdot\left(\sqrt{\frac{7}{2}}xk\right)\cdot\left(\sqrt{\frac{7}{2}}xk\right)\right)$

$= \frac{\sqrt{10} - k}{k}\cdot\frac{7}{2}\cdot x^2\cdot k^2 = \boxed{\frac{(\sqrt{10} - k)7x^2k}{2}}$

$b\,\frac{\sqrt{10} - k}{k} + b = \sqrt{35}\,\cancel{x}$

$b = \frac{\sqrt{35}k}{\sqrt{10} - k}x$

$b = \frac{\sqrt{35}}{\frac{\sqrt{10} - k}{k} + 1}x = \frac{\sqrt{35}k}{\sqrt{10} - \cancel{k} + \cancel{k}}x = \frac{\sqrt{35}}{\sqrt{10}}\;\sqrt{\frac{35}{10}}xk = \sqrt{\frac{7}{2}}xk$

$\frac{4bc}{2} + \frac{2bc}{2} + \frac{2bc}{2}\cdot 4\,\frac{bc}{2} + \frac{180}{4} = 180$

$\frac{9bc}{2} = \frac{3}{4}\cdot 180$

$8bc = \frac{3\cdot 180}{2}$ $bc = \frac{60}{2}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$10\arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$ $\qquad 10\pi = 10\pi$

$\arccos(\sin x) = \frac{9}{10}\pi - \frac{2}{10}x$

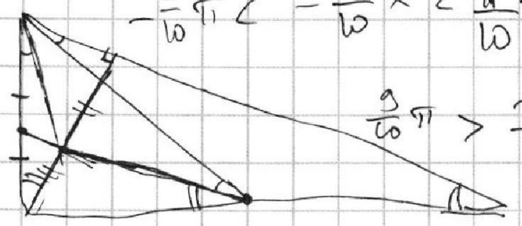
$\cos\left(\frac{9}{10}\pi - \frac{2}{10}x\right) = \sin x$

$\cos\left(\frac{9}{10}\pi - \frac{2}{10}x\right) - \sin x = 0$

$\cos\frac{9}{10}\pi \cdot \cos\frac{2}{10}x - \sin\frac{9}{10}\pi \cdot \sin\frac{2}{10}x - \sin x = 0$

$0 \le \frac{9}{10}\pi - \frac{2}{10}x \le \pi$

$-\frac{9}{10}\pi < -\frac{2}{10}x < \frac{1}{10}\pi$



$\frac{9}{10}\pi > \frac{2}{10}x \geq -\frac{1}{10}\pi$

$9\pi > 2x > -\pi$

$-\frac{\pi}{2}$

$\frac{9}{2}\pi > x > -\frac{\pi}{2}$

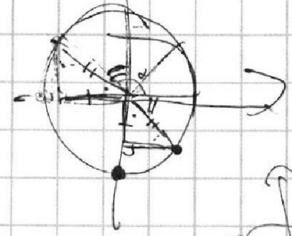
$-\frac{\pi}{2} + 2\pi = 1{,}5\pi$

$3{,}5\pi$

$5{,}5\pi$

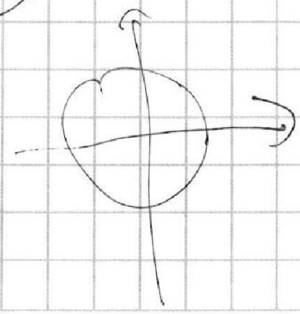
$x = -\frac{\pi}{2}$

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$



$\frac{\pi}{2}$

$\frac{9}{10}\pi - \frac{2}{10}x = \frac{\pi}{2}$ $\qquad x = \frac{\pi}{2}$



$\frac{8}{10}x = \frac{\pi}{2} - \frac{9}{10}\pi$

$8x = \pi(-4)$

$\frac{8}{10}x = \pi\left(\frac{5}{10} - \frac{9}{10}\right)$

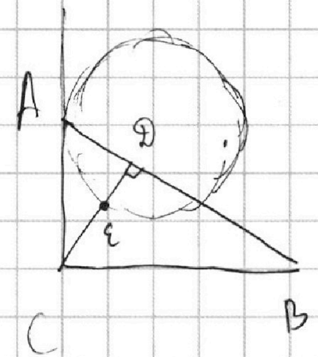
$2x = -\pi$

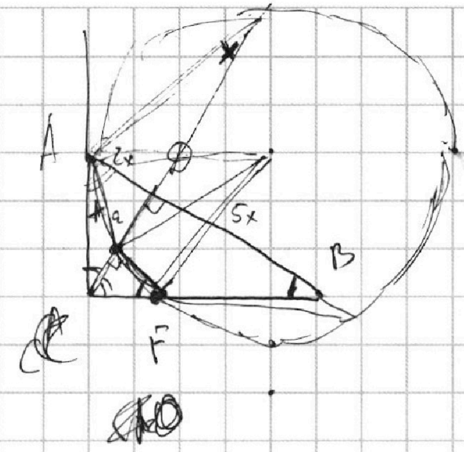
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

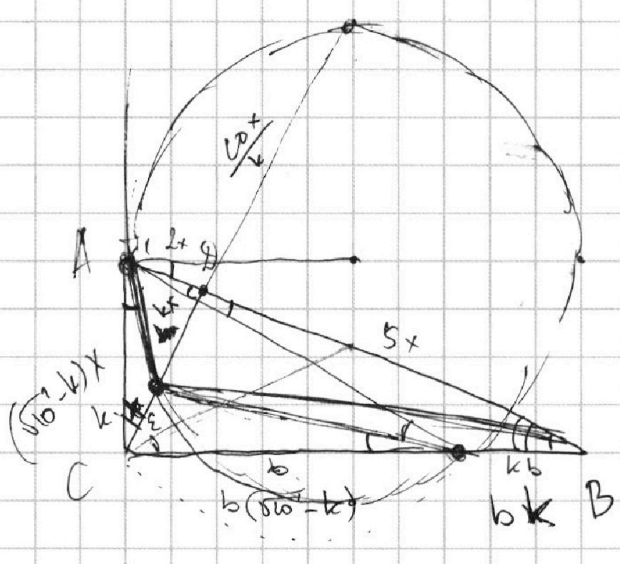
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ







$AB = 1{,}4BD$

$AD + BD = 1{,}4BD$

$AD = 0{,}4BD$ $\left(\sqrt{10}\cdot 10 - k^2\sqrt{10}\right)\left(\frac{x^2}{k}\right)$

$\frac{S_{ACD}}{S_{CEF}}$ $\left(\frac{\sqrt{10}\cdot 10}{k} - k\sqrt{10}\right)x^2$

$(b\sqrt{10} - kb)\cdot bk =$

$= b^2k\sqrt{10} - b^2k^2$

$b^2(k\sqrt{10} - k^2)$

$CD^2 = AC^2 - AD^2$

$CD^2 = BC^2 - BD^2$

$2CD^2 = AC^2 + BC^2 - AD^2 - BD^2$

$2CD^2 = AB^2 - AD^2 - BD^2$

$2CD^2 = AD^2 + BD^2 + 2BD\cdot AD - AD^2 - BD^2$

$2CD^2 = 2BD\cdot AD$

$CD^2 = BD\cdot AD$

$kx\cdot ? = 10x^2$

$? = \frac{10x^2}{kx} = \frac{10x}{k}$

$CD = \sqrt{10}\,x$

$\left((\sqrt{10}-k)x\right)\cdot x\left(\sqrt{10} - \cancel{k} + \cancel{k} + \frac{10}{k}\right) = (\sqrt{10}\,x - kx)\left(x\sqrt{10} + \frac{10x}{k}\right) = 10x^2 - k\sqrt{10}\,x^2 + \frac{\sqrt{10}\cdot 10x^2}{k} - \cancel{10x^2}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

a, b, c – нат.

$ab \vdots 2^6 \cdot 3^{15} \cdot 5^{11}$ $\quad bc \vdots 2^{14} 3^{21} 5^{13}$ $\quad ac \vdots 2^{16} 3^{25} 5^{28}$

$\underbrace{13+21}_{34} + 25$ 59

a_2	b_2	c_2
a_3	b_3	c_3
a_5	b_5	c_5

$$\begin{cases} a_2+b_2 \geq 6 \\ b_2+c_2 \geq 14 \\ a_2+c_2 \geq 16 \end{cases}$$

20 36

$\underbrace{11+13}_{24}+28 = 52$

$2a_2+2b_2+2c_2 \geq 36$

$a_2+b_2+c_2 \geq 18$

$a_2+b_2=6$

$b_2+c_2=14$

$c_2-a_2=8$

$c_2=a_2+8$

$a_3 \neq b$.

$c_5-a_5=2$

$c_3-a_3=8$

$c_3=a_3+8$

$a_2+a_2+8=16$

$2a_5+2=28$

$2a_3+8=25$

$2a_2=8$

$2a_5=26$

$2a_3=17$

$a_2=4$ $\quad c_2=12$

$a_5=13$

$b_2=2$

$c_5=$

$a_5=c_5=14$

$b_5=0$

$a_3=9$ $\quad c_3=17$

$b_3=4$

18

30