



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 14



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $3^{14}7^{13}$, bc делится на $3^{19}7^{17}$, ac делится на $3^{23}7^{42}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-9ab+b^2}$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2-5x+6}-\sqrt{3x^2+x+1}=5-6x.$$

4. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , диаметр AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC=1$ и $BC=25$. Найдите длину общей касательной к окружностям ω и Ω .
5. [4 балла] Ненулевые действительные числа x, y, z удовлетворяют равенствам

$$5x-y=3z \quad \text{и} \quad \frac{8}{x}+\frac{1}{y}=\frac{15}{z}.$$

Найдите наименьшее возможное значение выражения $\frac{25x^2-y^2-z^2}{y^2+3z^2}$.

6. [5 баллов] Из пункта A в пункт B выезжают одновременно велосипедист и мотоциклист. Оба они движутся с постоянной скоростью, и мотоциклист прибывает в пункт B на 1 час раньше велосипедиста. Если бы велосипедист ехал со своей скоростью в течение того времени, что понадобилось мотоциклисту на дорогу от A к B , а мотоциклист – в течение того времени, что понадобилось велосипедисту на этот путь, то мотоциклист проехал бы на 49 километров больше. Если бы скорость каждого из них возросла на 7 км/ч, то велосипедист приехал бы в B на 36 минут позже велосипедиста. Найдите расстояние между A и B .
7. [6 баллов] Вписанная окружность ω прямоугольного треугольника ABC с прямым углом B касается его сторон CA, AB, BC в точках D, E, F соответственно. Луч ED пересекает прямую, перпендикулярную BC , проходящую через вершину C , в точке Y ; X – вторая точка пересечения прямой FY с окружностью ω . Известно, что $EX=\sqrt{2}XY$. Найдите отношение $AD:DC$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

МФТИ

- 1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$ab : 3^{14} \cdot 7^{13}$$

$$\Rightarrow db^2c : 3^{33} \cdot 7^{30}$$

$$bc : 3^{19} \cdot 7^{17}$$

$$db^2c : ac : 3^{23} \cdot 7^{42}$$

$$ac : 3^{23} \cdot 7^{42}$$

$$\Rightarrow db^2c : 3^{33} \cdot 7^{42}$$

$$\Rightarrow db^2c \geq 3^{33} \cdot 7^{42} \cdot \frac{1}{b}$$

$$\Rightarrow abc \geq \frac{3^{33} \cdot 7^{42}}{b} \Rightarrow abc - \text{min при } d \text{ и } c \text{ min и } b - \text{max}$$

Тогда для минимизации abc берем b минимальным \Rightarrow

$$abc = \frac{3^{33} \cdot 7^{42}}{b}$$

$$ac = \frac{3^{33} \cdot 7^{42}}{b^2} \Rightarrow b^2 = \frac{3^{33} \cdot 7^{42}}{ac}$$

$$\Rightarrow 3^{10} = b^2 \Rightarrow b = 3^5$$

если ac возрастает, то b уменьшится, b возрастает, то ac уменьшится.

$$\Rightarrow abc = 3^{28} \cdot 7^{42} \text{ - мин значение.} \Rightarrow ac - \text{min. при } b = 3^5$$

Ответ: $abc_{\text{min}} = 3^{28} \cdot 7^{42}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



из того, что дано следует:

~~Дано:~~ $\text{НОД}(a, b) = 1$; $\text{НОД}(a+b; a^2 - 9ab + b^2)$

Найти m .

m
11

$$\Rightarrow \text{НОД}(a+b, a^2 - 9ab + b^2) = \text{НОД}(a+b, 11b^2)$$

Так как a и b взаимно-просты, то $a+b$ не делится ни на один простой множитель b и a

$$\text{НОД}(a, b) = \text{НОД}(a+b, b) = \text{НОД}(a, b+d)$$

Ответ: $m = 11$.

Известно, что для любых чисел c и d верно:

$$\text{НОД}(c, d) = \text{НОД}(c, \text{ост. от деления } d \text{ на } c)$$

$$\begin{array}{r} d^2 + 9db + b^2 \quad | \quad a+b \\ \underline{d^2 + db} \quad \quad \quad | \quad a-10b \\ -10db + b^2 \\ \underline{-10db - 10b^2} \\ 11b^2 \text{ (ост.)} \end{array}$$

\Rightarrow Число $(a+b)$ и b^2 - взаимно просты \Rightarrow

$$\text{НОД}(a+b, 11b^2) \leq 11$$

(достигает 11 например при $a=b$; $b=5$) тогда

$$\begin{aligned} \frac{6}{5} - \text{решок}; \quad \frac{6}{5} &= \frac{36 - 270 + 25}{5} = \frac{11}{5} \\ &= \frac{11}{5} \text{ (осток на 11)} = \frac{1}{5} \end{aligned}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

При помощи подстановки можно показать,
что $x = \frac{5}{6}$ будет ^{единственным} корнем уравнения:

$$\sqrt{3 \cdot \frac{25}{36} - \frac{25}{6} + 6} - \sqrt{3 \cdot \frac{25}{36} + \frac{5}{6} + 1} = 5 - 5$$

$$\sqrt{3 \cdot \frac{25}{36} + 1 \frac{5}{6}} - \sqrt{3 \cdot \frac{25}{36} + 1 \frac{5}{6}} = 0$$

$0=0$
верно.

~~$$\sqrt{(x - \frac{5}{6})(3x - \frac{5}{2}) + 3\frac{11}{12}} - \sqrt{\dots}$$~~

Ответ: $x = \frac{5}{6}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Пусть S - расстояние от А до В; V_m -
скорость ~~мотоцикла~~ ^{мотоцикла}; V_b - скорость
велосипеда.

$$\begin{cases} \frac{S}{V_b} = \frac{S}{V_m} - 1 & (1) \\ \frac{V_m}{V_b} \cdot S - \frac{V_b S}{V_m} = 49 & (2) \\ \frac{S}{V_b+7} = \frac{S}{V_m+7} - \frac{36}{60} & (3) \end{cases} \Rightarrow (2) \text{ и } (4):$$
$$\frac{V_m}{147 + (2S+21)V_m} \cdot S(2S-21)$$

$$1) S(V_b - V_m) = V_b \cdot V_m$$

$$3) 5V_m + 7S = 5V_b + 7S - \frac{3}{5}(V_b+7)(V_m+7)$$

$$S(V_b - V_m) = \frac{3}{5}(V_b+7)(V_m+7)$$

$$\Rightarrow 5V_b - V_m = 3V_b V_m + 21V_b + 21V_m + 147$$

$$2V_b V_m = \frac{21V_b + 21V_m + 147}{2}$$

$$\Rightarrow 2S(V_b - V_m) = 21V_b + 21V_m + 147$$

$$(2S-21)V_b - (2S+21)V_m = 147$$

$$V_b = \frac{147 + (2S+21)V_m}{2S-21} \quad (4)$$

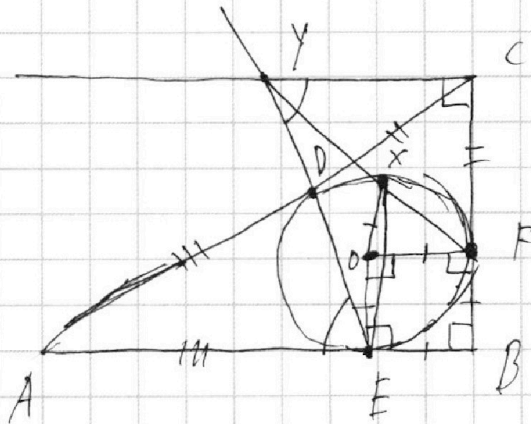
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Точка O - центр
окр ω ; r - ее радиус.

П.к. $\triangle ABC$ - прямоугольн.,
а ω внутр. окр., то

$$r = OE = OF = EB = BF; AE = AD; DC = CF.$$

$CY \parallel AB$, т.к. они перп. BC.

$\Rightarrow \angle DEA = \angle DYC$ - как накр.

$\triangle ADE$ - р.б. $\Rightarrow \angle ADE = \angle AED$

$\Rightarrow \angle YDC = \angle AED = \angle ADE = \angle DYC$
как верш

$\Rightarrow \triangle YDC$ - р.б. $\Rightarrow YC = DC = CF \Rightarrow$

$\triangle YCF$ - пр. с равными кат. $\Rightarrow YF$ - гипот.
 $\angle CYF = \angle CFY = 45^\circ$
 $= \sqrt{2} CF$; т.к. окр. внутр. в прямоугольн. \triangle

$\Rightarrow \angle EOF = \angle OFB = \angle FBE = \angle BEO \Rightarrow OF \parallel BE$

$\Rightarrow OF \parallel AB \parallel YC \Rightarrow \angle CYF = \angle XFO$ - как накр.
 $= 45^\circ$

$OX = OF = r \Rightarrow \triangle XOF$ - р.б. $\Rightarrow \angle OFX = \angle XFO = 45^\circ$
 \Rightarrow следовательно $XF = \sqrt{2} r \Rightarrow YX = YF - XF = \sqrt{2} CF - \sqrt{2} r$

$\angle EOF = 90^\circ$ (центральный) $\Rightarrow \angle EXF = 45^\circ$ (как в. окр.). На той же дуге $\Rightarrow \angle EXF$ и $\angle OXF$ совп. $\Rightarrow EX$ - диаметр $\omega \Rightarrow EX = 2r$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



(Тригонометрия)

По углу $E X = \sqrt{2} \times Y$

$$\Rightarrow 2r = (\sqrt{2} CF - \sqrt{2} h) \cdot \sqrt{2}$$

$$2r = 2CF - 2h$$

$$2r = CF = CD$$

По теореме Пифагора:

$$AB^2 + BC^2 = AC^2$$

$$(AE + EB)^2 + (BF + CF)^2 = (AD + CD)^2$$

$$\stackrel{\approx AD}{(AE + r)^2} + (r + 2r)^2 = (AD + 2r)^2$$

$$AD^2 + 2ADr + r^2 + 9r^2 = AD^2 + 4ADr + 4r^2$$

$$2ADr = 6r^2$$

$$2AD = 6r$$

$$AD = 3r$$

$$\Rightarrow AD : DC = 3r : 2r = 3 : 2$$

Ответ: 3 : 2.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$25x^2 = 9z^2 + y^2 + 6yz$$

$$25x^2 - z^2 - y^2 = 8z^2 + 6yz$$

$$\sqrt{3x^2 - 5x + 6} - \sqrt{3x^2 + x + 1} = 5 - 6x \quad (\text{возведем в } 6 \text{ квадратов})$$

$$\frac{xy}{8y+x} = \frac{2}{15} \quad 3x^2 - 5x + 6 + 3x^2 + x + 1 - 2\sqrt{(3x^2 - 5x + 6)(3x^2 + x + 1)} = 25 - 60x + 36x^2$$

$$-30x^2 + 56x - 18 = 2\sqrt{(3x^2 - 5x + 6)(3x^2 + x + 1)} \quad | :2$$

$$-15x^2 + 28x - 9 = \sqrt{(3x^2 - 5x + 6)(3x^2 + x + 1)} \quad \text{избавимся}$$

П.к. квадрат стороны у нас корень, то отсюда можно увидеть, что мы имеем квадратные уравнения \Rightarrow левая часть.

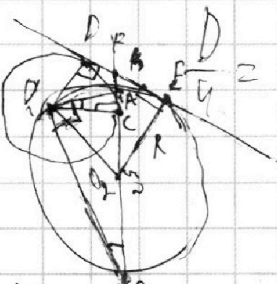
Рассмотрим функцию $f(x) = -15x^2 + 28x - 9$ (выражение слева)

$$-15x^2 + 28x - 9 = 0$$

$$\begin{array}{r} 3x^2 - 5x + 6 \\ 3x^2 - 5x \\ \hline 6 - 2 \cdot \frac{1}{2} \\ -3x + 6 \\ -3x + 3 \\ \hline 3 \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} x - \frac{5}{6} \\ 3x - 2.5 \end{array} \right.$$

$$5S(V_M - V_B) = 3(V_B + 7)(V_M + 7)$$

$$2S(V_M - V_B) = 21 V_M + 21 V_B + 147$$



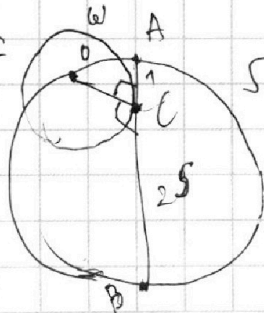
$DF = FK$

$$5S(V_M - V_B) = \left(\frac{3}{2} + 1\right)(21V_M + 21V_B + 147)$$

$$5V_M V_B = 3V_B V_M + 21V_M + 21V_B + 147$$

$$2S(V_M - V_B) =$$

$$\frac{21V_M + 21V_B + 147}{2}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$\frac{5}{\sqrt{b}} = \frac{5}{\sqrt{a}} - 1$
 $\frac{5}{\sqrt{b+7}} = \frac{5}{\sqrt{a+7}} - \frac{36}{\sqrt{a}}$
 $\frac{55}{\sqrt{b+7}} = \frac{55}{\sqrt{a+7}} - \frac{36}{\sqrt{a}}$
 $abc \cdot 3^{23} \cdot 7^{42} = ac$
 $55(\sqrt{a+7}) = 55(\sqrt{b+7}) - 3(\sqrt{a+7})(\sqrt{a+7})$
 $\Rightarrow bc \geq 3^{19} \cdot 7^{17}$
 $bc: 3^{19} \cdot 7^{17}$
 $ac: 3^{23} \cdot 7^{42}$
 $ab^2c^2: 3^{33} \cdot 7^{30}$
 $abc^2: 3^{23} \cdot 7^{42}$
 $abc^3: 3^{23} \cdot 7^{42}$
 $ac^2: 3^{23} \cdot 7^{42}$
 $abc^2: 3^{23} \cdot 7^{42}$
 $abc^3: 3^{23} \cdot 7^{42}$
 $abc^4: 3^{23} \cdot 7^{42}$
 $abc^5: 3^{23} \cdot 7^{42}$
 $abc^6: 3^{23} \cdot 7^{42}$
 $abc^7: 3^{23} \cdot 7^{42}$
 $abc^8: 3^{23} \cdot 7^{42}$
 $abc^9: 3^{23} \cdot 7^{42}$
 $abc^{10}: 3^{23} \cdot 7^{42}$
 $abc^{11}: 3^{23} \cdot 7^{42}$
 $abc^{12}: 3^{23} \cdot 7^{42}$
 $abc^{13}: 3^{23} \cdot 7^{42}$
 $abc^{14}: 3^{23} \cdot 7^{42}$
 $abc^{15}: 3^{23} \cdot 7^{42}$
 $abc^{16}: 3^{23} \cdot 7^{42}$
 $abc^{17}: 3^{23} \cdot 7^{42}$
 $abc^{18}: 3^{23} \cdot 7^{42}$
 $abc^{19}: 3^{23} \cdot 7^{42}$
 $abc^{20}: 3^{23} \cdot 7^{42}$
 $abc^{21}: 3^{23} \cdot 7^{42}$
 $abc^{22}: 3^{23} \cdot 7^{42}$
 $abc^{23}: 3^{23} \cdot 7^{42}$
 $abc^{24}: 3^{23} \cdot 7^{42}$
 $abc^{25}: 3^{23} \cdot 7^{42}$
 $abc^{26}: 3^{23} \cdot 7^{42}$
 $abc^{27}: 3^{23} \cdot 7^{42}$
 $abc^{28}: 3^{23} \cdot 7^{42}$
 $abc^{29}: 3^{23} \cdot 7^{42}$
 $abc^{30}: 3^{23} \cdot 7^{42}$
 $abc^{31}: 3^{23} \cdot 7^{42}$
 $abc^{32}: 3^{23} \cdot 7^{42}$
 $abc^{33}: 3^{23} \cdot 7^{42}$
 $abc^{34}: 3^{23} \cdot 7^{42}$
 $abc^{35}: 3^{23} \cdot 7^{42}$
 $abc^{36}: 3^{23} \cdot 7^{42}$
 $abc^{37}: 3^{23} \cdot 7^{42}$
 $abc^{38}: 3^{23} \cdot 7^{42}$
 $abc^{39}: 3^{23} \cdot 7^{42}$
 $abc^{40}: 3^{23} \cdot 7^{42}$
 $abc^{41}: 3^{23} \cdot 7^{42}$
 $abc^{42}: 3^{23} \cdot 7^{42}$
 $abc^{43}: 3^{23} \cdot 7^{42}$
 $abc^{44}: 3^{23} \cdot 7^{42}$
 $abc^{45}: 3^{23} \cdot 7^{42}$
 $abc^{46}: 3^{23} \cdot 7^{42}$
 $abc^{47}: 3^{23} \cdot 7^{42}$
 $abc^{48}: 3^{23} \cdot 7^{42}$
 $abc^{49}: 3^{23} \cdot 7^{42}$
 $abc^{50}: 3^{23} \cdot 7^{42}$
 $abc^{51}: 3^{23} \cdot 7^{42}$
 $abc^{52}: 3^{23} \cdot 7^{42}$
 $abc^{53}: 3^{23} \cdot 7^{42}$
 $abc^{54}: 3^{23} \cdot 7^{42}$
 $abc^{55}: 3^{23} \cdot 7^{42}$
 $abc^{56}: 3^{23} \cdot 7^{42}$
 $abc^{57}: 3^{23} \cdot 7^{42}$
 $abc^{58}: 3^{23} \cdot 7^{42}$
 $abc^{59}: 3^{23} \cdot 7^{42}$
 $abc^{60}: 3^{23} \cdot 7^{42}$
 $abc^{61}: 3^{23} \cdot 7^{42}$
 $abc^{62}: 3^{23} \cdot 7^{42}$
 $abc^{63}: 3^{23} \cdot 7^{42}$
 $abc^{64}: 3^{23} \cdot 7^{42}$
 $abc^{65}: 3^{23} \cdot 7^{42}$
 $abc^{66}: 3^{23} \cdot 7^{42}$
 $abc^{67}: 3^{23} \cdot 7^{42}$
 $abc^{68}: 3^{23} \cdot 7^{42}$
 $abc^{69}: 3^{23} \cdot 7^{42}$
 $abc^{70}: 3^{23} \cdot 7^{42}$
 $abc^{71}: 3^{23} \cdot 7^{42}$
 $abc^{72}: 3^{23} \cdot 7^{42}$
 $abc^{73}: 3^{23} \cdot 7^{42}$
 $abc^{74}: 3^{23} \cdot 7^{42}$
 $abc^{75}: 3^{23} \cdot 7^{42}$
 $abc^{76}: 3^{23} \cdot 7^{42}$
 $abc^{77}: 3^{23} \cdot 7^{42}$
 $abc^{78}: 3^{23} \cdot 7^{42}$
 $abc^{79}: 3^{23} \cdot 7^{42}$
 $abc^{80}: 3^{23} \cdot 7^{42}$
 $abc^{81}: 3^{23} \cdot 7^{42}$
 $abc^{82}: 3^{23} \cdot 7^{42}$
 $abc^{83}: 3^{23} \cdot 7^{42}$
 $abc^{84}: 3^{23} \cdot 7^{42}$
 $abc^{85}: 3^{23} \cdot 7^{42}$
 $abc^{86}: 3^{23} \cdot 7^{42}$
 $abc^{87}: 3^{23} \cdot 7^{42}$
 $abc^{88}: 3^{23} \cdot 7^{42}$
 $abc^{89}: 3^{23} \cdot 7^{42}$
 $abc^{90}: 3^{23} \cdot 7^{42}$
 $abc^{91}: 3^{23} \cdot 7^{42}$
 $abc^{92}: 3^{23} \cdot 7^{42}$
 $abc^{93}: 3^{23} \cdot 7^{42}$
 $abc^{94}: 3^{23} \cdot 7^{42}$
 $abc^{95}: 3^{23} \cdot 7^{42}$
 $abc^{96}: 3^{23} \cdot 7^{42}$
 $abc^{97}: 3^{23} \cdot 7^{42}$
 $abc^{98}: 3^{23} \cdot 7^{42}$
 $abc^{99}: 3^{23} \cdot 7^{42}$
 $abc^{100}: 3^{23} \cdot 7^{42}$

$25 - 60x + 36x^2$
 Как как мы работаем с натуральными числами...

$6x^2 - 4x + 7 - 25 + 60x - 36x^2 = 2(3x^2 - 5x + 6)(3x^2 + 2x + 1)$
 $-30x^2 + 56x - 18 = \sqrt{d^2 b^2 c^2} \geq \sqrt{3 \cdot 56 \cdot 7 \cdot 72^2}$
 $-15x^2 + 28x - 9 = \sqrt{d^2 b^2 c^2} \geq \sqrt{3 \cdot 56 \cdot 7 \cdot 72^2}$
 $x = \frac{32+y}{5}$
 $d - 9ab + b^2$
 $a^2 - 9ab + b^2 \pmod{m} = 11ab^2$
 $d + b = a^2 - 9ab + b^2 \pmod{m} + 11ab^2$
 $d + b \equiv (a+b)^2 - 11ab \pmod{m}$
 $11ab \equiv (a+b)(a+b-1) \pmod{m}$
 $(a+b)(a+b-1) - 11ab$
 $2(25x+3y-2) = \frac{y^2+32^2}{y^2+32^2}$
 $z = \frac{25xy}{8y+2x} = \frac{2(82xy)}{y^2+32^2}$
 $25xy = \frac{8y^2+2x^2}{y^2+32^2} = \frac{2(32+3y+34-2)}{y^2+32^2}$

$\log(a+b, a+b) = m$
 $a+b \equiv (a+b)^2 - 11ab \pmod{m}$
 $11ab \equiv (a+b)(a+b-1) \pmod{m}$
 $(a+b)(a+b-1) - 11ab$
 $z = \frac{5x-y}{3}$
 $\frac{8y+x}{xy} = \frac{75}{z}$
 $(5x-y)(8y+x) = 45xy$
 $z = \frac{25xy}{8y+2x} = \frac{2(82xy)}{y^2+32^2}$
 $25xy = \frac{8y^2+2x^2}{y^2+32^2} = \frac{2(32+3y+34-2)}{y^2+32^2}$

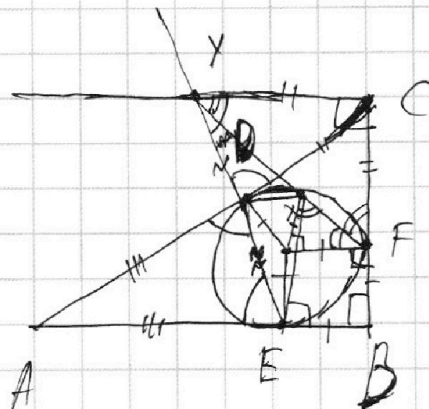
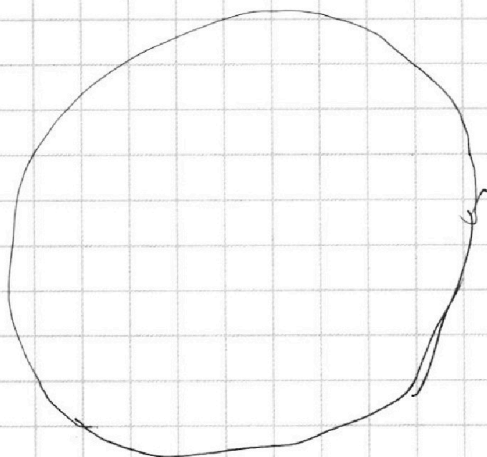
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

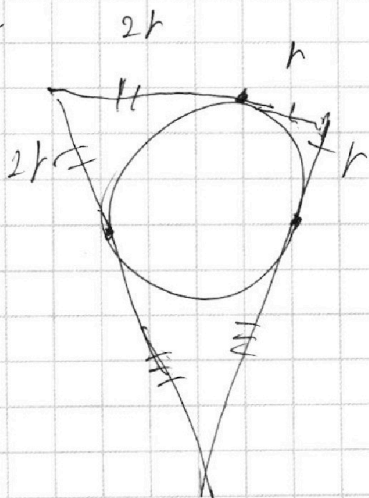
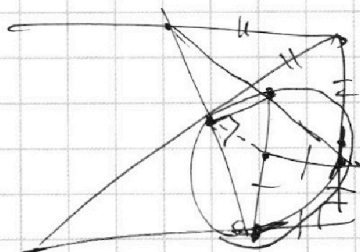


$$XF = \sqrt{2}r$$

$$XF = \sqrt{2}(BC-r)$$

$$\frac{AD}{DC} = \frac{AE}{CF} = \frac{AB-r}{BC-r}$$

$$\frac{EX}{XY} = \frac{\sqrt{2}}{1} \quad EX = d = 2r$$



$$\sqrt{2}(YF - XF) = 2r$$

$$\sqrt{2}(\sqrt{2}(BC-r) - \sqrt{2}r) = 2r$$

$$2(BC-r) - 2r = 2r$$

$$BC - r = 2r$$

$$BC = 3r$$

$$(3r)^2 + (r+x)^2 = (2r+x)^2$$

$$9r^2 + r^2 + 2rx + x^2 =$$

$$= 4r^2 + 4rx + x^2$$

$$2rx = 9r^2 + r^2 - 4r^2$$

$$2rx = 6r^2 \quad 2x = 6r \quad x = 3r$$