



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 10



1. [3 балла] При каком наименьшем натуральном  $n$  число  $(n-1)! + n! + (n+1)!$  делится на 289?
2. [3 балла] Из суммы квадратов семи последовательных натуральных чисел вычли число 28 и получили пятую степень натурального числа  $N$ , большего 8. Найдите наименьшее возможное значение  $N$ .
3. [4 балла] Решите неравенство

$$\left| \sqrt{x^2 - x - 2} + 5 \right| \geq \left| \sqrt{x^2 - x - 2} + x - 1 \right| + |6 - x|.$$

4. [5 баллов] На координатной плоскости рассматриваются ромбы с длиной стороны 5 такие, что абсциссы и ординаты всех четырёх вершин каждого ромба — целые числа из промежутка  $[1; 45]$ . Сколько существует таких ромбов? Напомним, что квадрат также является ромбом.
5. [5 баллов] Найдите все пары целых чисел  $(x; y)$ , удовлетворяющих уравнению

$$23 \cdot 2^x + 2025 = y^2.$$

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых для множества точек плоскости  $Oxy$ , задаваемых уравнением  $x^2 + y^2 = a^2$ , наибольшее значение выражения  $y^2 - 4y - a$  равно 6.
7. [6 баллов] На сторонах  $AB$  и  $BC$  треугольника  $ABC$  выбраны точки  $M$  и  $N$  соответственно так, что  $\angle MNB = \angle ANC = 70^\circ$ . Найдите  $\angle CAN$ , если известно, что  $BN \cdot MA = 2BM \cdot NC$ .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача №1

Разложим 289 на простые множители:  $289 = 17^2$

Преобразуем данное выражение:

$$(n-1)! + n! + (n+1)! = (n-1)! (1 + n + n(n+1)) = (n-1)! (n^2 + 2n + 1) = (n-1)! (n+1)^2$$

Поскольку 17 простое, то при  $n < 16$  в разложении выражения на простые множители 17 не будет.

При  $n = 16$  выражение равно  $(16-1)! \cdot (16+1)^2 = 15! \cdot 17^2 = 17^2 \cdot \dots = 289$

Ответ: при  $n = 16$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  
☐

2  
☒

3  
☐

4  
☐

5  
☐

6  
☐

7  
☐

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача №2

Распишем сумму как  $(a-3)^2 + (a-2)^2 + (a-1)^2 + a^2 + (a+1)^2 + (a+2)^2 + (a+3)^2$ , где  $a \in \mathbb{Z}$   
 $a > 3$

$$(a-3)^2 + (a-2)^2 + (a-1)^2 + a^2 + (a+1)^2 + (a+2)^2 + (a+3)^2 =$$
$$= a^2 + 3^2 + a^2 + 2^2 + a^2 + 1^2 + a^2 + a^2 + 1^2 + a^2 + 2^2 + a^2 + 3^2 = 7a^2 + 2(3^2 + 2^2 + 1^2) = 7a^2 + 28$$

Получим  $N^5 = 7a^2 \Rightarrow N : 7$   $N > 8$

$$\Downarrow$$
$$7^5 \cdot k^5 = 7a^2 \Leftarrow N = 7k, \text{ где } k > 1, k \in \mathbb{N}$$
$$\Downarrow$$
$$7^4 \cdot k^5 = a^2 \Leftarrow a \in \mathbb{N}$$

$$7^4 \cdot k^5 = a^2 \Rightarrow k - \text{нечетный квадрат}$$

$$\Downarrow$$

минимальное  $k = 2^2 = 4 \leq k > 1$

$$\Downarrow$$

минимальное  $N = 7 \cdot 4 = 28$

Ответ: 28



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача №3

$$\left| \sqrt{x^2 - x - 2} + 5 \right| \geq \left| \sqrt{x^2 - x - 2} + x - 1 \right| + |6 - x|$$

$\Leftrightarrow$  так как  $\sqrt{x^2 - x - 2} + 5 \geq 0$

$$\sqrt{x^2 - x - 2} + 5 \geq |x - 6| + \left| \sqrt{x^2 - x - 2} + x - 1 \right|$$

Ограничение на  $x$ :  $x^2 - x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-2) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -1 \\ x \geq 2 \end{cases}$

Рассмотрим случаи:

①  $x \geq 6 \Rightarrow x - 6 \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x^2 - x - 2} + 5 \geq x - 6 + \sqrt{x^2 - x - 2} + x - 1$

$\Rightarrow \sqrt{x^2 - x - 2} + x - 1 \geq 0$

$\Leftrightarrow x = 6 \Leftarrow x \leq 6 \Leftrightarrow 12 \geq 2x$

②  $6 > x \geq 2 \Rightarrow x - 6 < 0 \Rightarrow \sqrt{x^2 - x - 2} + 5 \geq 6 - x + \sqrt{x^2 - x - 2} + x - 1$

$\Rightarrow \sqrt{x^2 - x - 2} + x - 1 \geq 1 > 0$

$\Leftrightarrow 6 > x \geq 2 \Leftarrow x \in \mathbb{R} \Leftarrow 5 \geq 5 + 0x$

③  $-1 \geq x \Rightarrow x - 6 < 0 \Rightarrow \sqrt{x^2 - x - 2} + 5 \geq 6 - x - \sqrt{x^2 - x - 2} - x + 1$

$\Rightarrow \sqrt{x^2 - x - 2} + x - 1 < 0$

$\Downarrow$

$2\sqrt{x^2 - x - 2} + 2x - 2 \geq 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 - x - 2} + x - 1 \geq 0$

$\Rightarrow$

Получим  $x \in [2; 6]$

Ответ:  $x \in [2; 6]$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача №4

Найдём все возможные положения таких рёбер. Для этого найдём все такие пары чисел  $a, b$ , что  $a^2 + b^2 = 25^2$ . Это пары 0, 5 и 3, 4.

Тогда существует шесть видов рёбер:  $\overline{5}$ ;  $\overline{15}$ ;  $\overline{3}$ ;  $\overline{4}$ ;  $\overline{3}$ ;  $\overline{4}$ .

Тогда однозначно задаётся форма своих рёбрами, а значит существует

$\frac{6 \cdot 5}{2} = 15$  видов ромбов. нас интересуют их размеры. Вспомогательные:

| Вид | Размер по<br>гор. оси | Размер по<br>верт. оси | Кол-во возможных<br>положений | Найдём общее кол-во:                                                                                                                                                                                                       |
|-----|-----------------------|------------------------|-------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|     | 5                     | 5                      | $(45-5) \cdot (45-5)$         | $  \begin{aligned}  & 40^2 + 2 \cdot 37 \cdot 39 + 4 \cdot 41 \cdot 37 + 4 \cdot 42 \cdot 36 + 4 \cdot 38^2 = \\  & = 1600 + 2886 + 6068 + 6048 + 5776 = \\  & = 20000 + 2100 + 250 + 28 = \\  & = 22378  \end{aligned}  $ |
|     | 2, 4                  | 2, 3                   | $(45-8) \cdot (45-6)$         |                                                                                                                                                                                                                            |
|     | 2, 3                  | 2, 4                   | $(45-6) \cdot (45-8)$         |                                                                                                                                                                                                                            |
|     | 4                     | 5, 3                   | $(45-4) \cdot (45-8)$         |                                                                                                                                                                                                                            |
|     | 4                     | 5, 3                   | $(45-4) \cdot (45-8)$         |                                                                                                                                                                                                                            |
|     | 5, 4                  | 3                      | $(45-9) \cdot (45-3)$         |                                                                                                                                                                                                                            |
|     | 5, 4                  | 3                      | $(45-9) \cdot (45-3)$         |                                                                                                                                                                                                                            |
|     | 4, 3                  | 4, 3                   | $(45-7) \cdot (45-7)$         |                                                                                                                                                                                                                            |
|     | 4, 3                  | 4, 3                   | $(45-7) \cdot (45-7)$         |                                                                                                                                                                                                                            |
|     | 4, 3                  | 4, 3                   | $(45-7) \cdot (45-7)$         |                                                                                                                                                                                                                            |
|     | 4, 3                  | 4, 3                   | $(45-7) \cdot (45-7)$         |                                                                                                                                                                                                                            |
|     | 5, 4                  | 3                      | $(45-9) \cdot (45-3)$         |                                                                                                                                                                                                                            |
|     | 5, 4                  | 3                      | $(45-9) \cdot (45-3)$         |                                                                                                                                                                                                                            |
|     | 5, 3                  | 4                      | $(45-8) \cdot (45-4)$         |                                                                                                                                                                                                                            |
|     | 5, 3                  | 4                      | $(45-8) \cdot (45-4)$         |                                                                                                                                                                                                                            |

Ответ: 22378



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача № 5

Преобразуем уравнение:

$$23 \cdot 2^x + 2025 = y^2 \Leftrightarrow 23 \cdot 2^x = y^2 - 45^2 \Leftrightarrow 23 \cdot 2^x = (y - 45)(y + 45)$$

Итак, одна из скобок имеет вид  $23 \cdot 2^a$ , а другое  $2^{x-a}$  или  $-23 \cdot 2^a$  и  $-2^{x-a}$

$$\begin{cases} y - 45 = 23 \cdot 2^a \\ y + 45 = 2^{x-a} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y = 23 \cdot 2^a + 2^{x-a} \\ 2 \cdot 45 = 2^{x-a} - 23 \cdot 2^a \end{cases}$$

$$\begin{cases} y - 45 = 2^{x-a} \\ y + 45 = 23 \cdot 2^a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y = 23 \cdot 2^a + 2^{x-a} \\ 2 \cdot 45 = 23 \cdot 2^a - 2^{x-a} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y - 45 = -23 \cdot 2^a \\ y + 45 = -2^{x-a} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y = -23 \cdot 2^a - 2^{x-a} \\ 2 \cdot 45 = -2^{x-a} + 23 \cdot 2^a \end{cases}$$

$$\begin{cases} y - 45 = -2^{x-a} \\ y + 45 = -23 \cdot 2^a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y = -2^{x-a} - 23 \cdot 2^a \\ 2 \cdot 45 = -23 \cdot 2^a + 2^{x-a} \end{cases}$$

$|2^{x-2a} - 23|$  либо нечётное (при  $x-2a > 0$ ) целое, тогда  $2^{a-1}$  должно быть нечётным целым, значит  $a=1$ , значит  $45 = \pm(2^{x-2} - 23)$

$$x-2a \leq 0 \quad \Rightarrow \begin{cases} 68 = 2^{x-2} \Rightarrow x \notin \mathbb{Z} \\ 22 = 2^{x-2} \Rightarrow x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

При  $x-2a=0$ :  $45 = 2^{a-1}(\pm 23) \Rightarrow \pm \frac{45}{23} = 2^{a-1} \Rightarrow a \notin \mathbb{Z}$

Поскольку  $2^{x-2a}$  - нецелое, а  $2^{x-2a} \cdot 2^{a-1}$  - целое, то  $x-a-1 \geq 0$

Сложим неравенства, получим  $x-a-1 > x-2a \Rightarrow a > 1$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐

СТРАНИЦА  
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Поскольку  $x-2a < 0$ , то  $2^{x-2a} < 1 < 23$

$$\Downarrow \quad \Downarrow$$

$$23 - 2^{x-2a} > 0 \quad 2^{x-2a} - 23 < 0$$

$$\Downarrow$$

У уравнения  $45 = 2^{a-1}(2^{x-2a} - 23)$  нет корней, будем смотреть только на уравнение  $45 = 2^{a-1}(23 - 2^{x-2a})$

При  $a=2$ :  $45 = 2(23 - 2^{x-4}) \Leftrightarrow 22,5 = 23 - 2^{x-4} \Leftrightarrow 0,5 = 2^{x-4}$

$$|y| = 2(2^{x-4} - 23) = 2 \cdot 23,5 = 47$$

$$\Downarrow$$

$$x=1 \Leftrightarrow -1 = x-2$$

$$y = \pm 47$$

При  $a=3$ :  $45 = 4(23 - 2^{x-6}) \Leftrightarrow 11,25 = 23 - 2^{x-6}$

$$\Downarrow$$

$$23 - 11,25 = 2^{x-6}$$

корней нет  $\Leftarrow 1$ , но не степень двойки

При  $a \geq 3$ :  $45 = 2^{a-1}(23 - 2^{x-2a}) \Leftrightarrow \frac{45}{2^{a-1}} = 23 - 2^{x-2a}$

$$\Downarrow$$

$$2^{x-2a} = 23 - \frac{45}{2^{a-1}}$$

$\Leftarrow 1$ , но не степень двойки

Ответ:  $(1; 47)$  и  $(1; -47)$

$\Leftarrow$  корней нет



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

## Задача № 6

Наибольшее значение выражения  $y^2 - y - a$  равно 6

$$y^2 - y - a \leq 6 \Leftrightarrow y^2 - y - (6+a) \leq 0$$

Решим вспомогательное уравнение

$$y^2 - y - (6+a) = 0$$

$$D = 1 + 4(6+a) = 4(10+a) = (\sqrt{4(10+a)})^2 = 2\sqrt{10+a}$$

$$y = \frac{1 \pm \sqrt{4(10+a)}}{2} = 2 \pm \sqrt{10+a}$$

$$2 - \sqrt{10+a} \leq y \leq 2 + \sqrt{10+a}$$

$$y \in [2 - \sqrt{10+a}; 2 + \sqrt{10+a}]$$

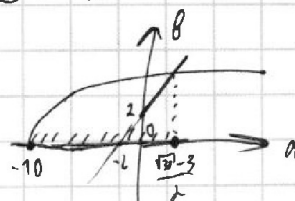
$$a \geq -10$$

В множестве точек плоскости  $Oxy$ , задаваемых уравнением  $x^2 + y^2 = a^2$   
 $y \in [-a; a]$

Если для каждого элемента этого множества выполняется условие, то  $[-a; a]$  является подмножеством  $[2 - \sqrt{10+a}; 2 + \sqrt{10+a}]$

$$\begin{cases} -a \geq 2 - \sqrt{10+a} \\ a \leq 2 + \sqrt{10+a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \leq \sqrt{10+a} - 2 \\ a \leq \sqrt{10+a} + 2 \end{cases} \Leftrightarrow a \leq \sqrt{10+a} - 2 \Leftrightarrow a + 2 \leq \sqrt{10+a}$$

Решим вспомогательное уравнение  $a + 2 = \sqrt{10+a}$



$$b^2 - b - 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = b - 2 \\ a = b^2 - 10 \\ a \geq -10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = a + 2 \\ b = \sqrt{10+a} \end{cases}$$

$$b = \frac{1 \pm \sqrt{1+4 \cdot 8}}{2}$$

$$a = \frac{1 \pm \sqrt{33}}{2} - 2$$

$$a = \frac{\sqrt{33} - 3}{2}$$

При  $a > \frac{\sqrt{33} - 3}{2}$  :  $a + 2 > \sqrt{10+a}$   
 при  $a \leq \frac{\sqrt{33} - 3}{2}$  :  $a + 2 \leq \sqrt{10+a}$

Ответ:  $a \in [-10; \frac{\sqrt{33} - 3}{2}]$

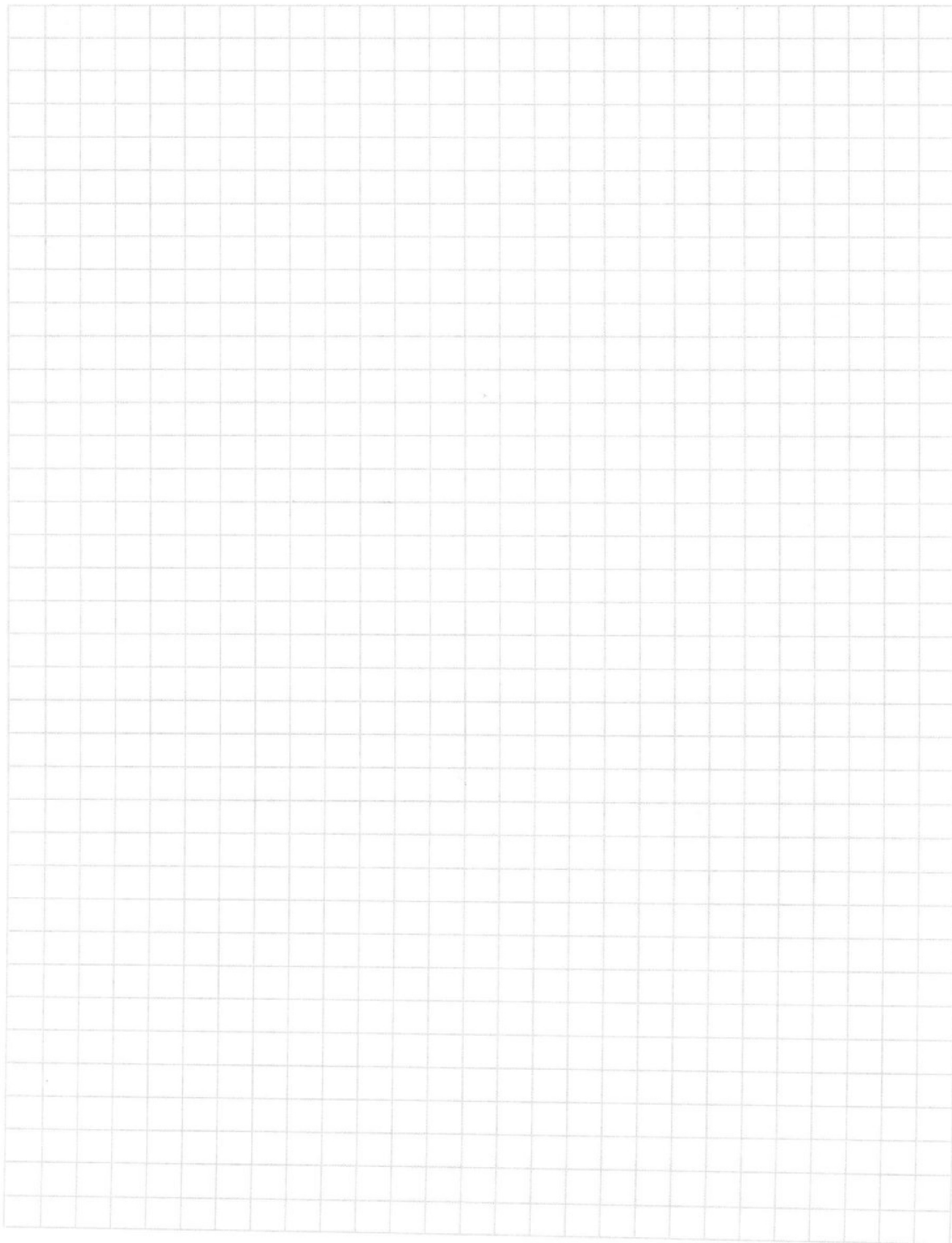


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$23 \cdot 2^x + 2025 = y^2 \quad \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{matrix}$$

$$23 \cdot 2^x = (y-45)(y+45)$$

$$23 \cdot 2^a = y-45$$

$$2^{x-a} = y+45$$

$$2 \cdot 45 = 2^{x-a} - 23 \cdot 2^a$$

$$2 \cdot y = 23 \cdot 2^a + 2^{x-a}$$

$$y^2 - 4y - a \leq 6$$

$$y^2 - 4y - (a+6) \leq 0$$

$$D = 16 + 4a + 24 = 40 + 4a$$

$$\sqrt{D} = 2\sqrt{10+a}$$

$$y = \frac{4 \pm 2\sqrt{10+a}}{2} = 2 \pm \sqrt{10+a}$$

$$2 - \sqrt{10+a} \leq y \leq 2 + \sqrt{10+a}$$

$$y \in [2 - \sqrt{10+a}; 2 + \sqrt{10+a}]$$

$$x^2 + y^2 = a^2$$

$\Downarrow$

$$y \in [a; -a]$$

$$a \leq \sqrt{10+a} - 2$$

$$a^2 + 4a + 4 \leq a^2 + 10a + 100$$

$$-96 \leq 16a$$

$$-48 \leq 8a$$

$$-24 \leq 4a$$

$$-12 \leq 2a$$

$$-6 \leq a$$

$$45 \cdot 2 = 90 = 23 \cdot 2^2$$

$$a = 2$$

$$45 = 2(23 - 2^{x-2})$$

$$22,5 = 23 - 2^{x-2}$$

$$2^{x-2} = 0,5$$

$$\begin{cases} x < 2a \\ x \geq a-1 \end{cases}$$

$\Downarrow$

$$2a > a-1$$

$$a > -1$$

$$45 = 2^{a-1} \left( 2^{x-a-1} + 23 \right)$$

$$45 = 2^{a-1} \left( 2^{x-2a} + 23 \right)$$

$$a=1 \Rightarrow 45 = 2^{x-2} + 23$$

$$2^{x-2} = 68$$

$$2^{x-2} = 22$$

*Handwritten signature*

*Handwritten signature*

$$2 \cdot 45 = 2^{x-a} - 23 \cdot 2^a$$

$$2 \cdot 45 + 46 \cdot 2^{a-1} = 2^{x-a}$$

$$45(1+2^{a-1}) + 2^{a-2} = 2^{x-a-1}$$

$$45(1+2^{a-1})$$

$$45 = 2^{a-1} (23 - 2^{x-2a})$$

$$x = y + 2 = \frac{1+\sqrt{13}}{2} + 2 = \frac{3+\sqrt{13}}{2}$$

$$y = \frac{1+\sqrt{13}}{2}$$

$$D = 1 + 32 \sqrt{13} = 133$$

$$y^2 - y - 8 = 0$$

$$y-2=y$$

$$y^2-10=y$$

$$y=x+2$$

$$y=\sqrt{10x}$$

