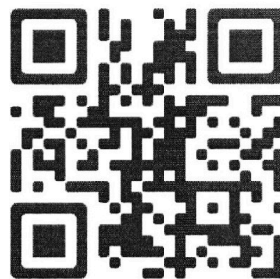




МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 10



1. [3 балла] При каком наименьшем натуральном n число $(n-1)! + n! + (n+1)!$ делится на 289?
2. [3 балла] Из суммы квадратов семи последовательных натуральных чисел вычли число 28 и получили пятую степень натурального числа N , большего 8. Найдите наименьшее возможное значение N .
3. [4 балла] Решите неравенство

$$\left| \sqrt{x^2 - x - 2} + 5 \right| \geq \left| \sqrt{x^2 - x - 2} + x - 1 \right| + |6 - x|.$$

4. [5 баллов] На координатной плоскости рассматриваются ромбы с длиной стороны 5 такие, что абсциссы и ординаты всех четырёх вершин каждого ромба — целые числа из промежутка $[1; 45]$. Сколько существует таких ромбов? Напомним, что квадрат также является ромбом.
5. [5 баллов] Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющих уравнению

$$23 \cdot 2^x + 2025 = y^2.$$

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при каждом из которых для множества точек плоскости Oxy , задаваемых уравнением $x^2 + y^2 = a^2$, наибольшее значение выражения $y^2 - 4y - a$ равно 6.
7. [6 баллов] На сторонах AB и BC треугольника ABC выбраны точки M и N соответственно так, что $\angle MNB = \angle ANC = 70^\circ$. Найдите $\angle CAN$, если известно, что $BN \cdot MA = 2BM \cdot NC$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.



СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N1

$$(n-1)! + n! + (n+1)! = (n-1)! (1 + n + n(n+1)) = \\ = (n-1)! (n^2 + 2n + 1) = (n-1)! (n+1)^2$$

$$289 = 17^2 \Rightarrow \text{при } n-1 < 17, (n-1)! \not\div 17 \text{ т.к. } 17\text{-простое}$$

$$\text{При } n+1 < 17, (n+1)^2 \not\div 17$$

$\Rightarrow$ при $n < 16$ ни один из множителей не $\div$ на 17

$$\text{при } n=16 \quad (16-1)! \cdot 17^2 \div 289 \Rightarrow n=16$$

Ответ: $n=16$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N2

Пусть $n, n+1, n+2, \dots, n+6$ - 7 послед. натур. чисел.

$$\Rightarrow n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 + \dots + (n+6)^2 - 28 = N^5$$

$$7n^2 + 2(1+2+\dots+6)n + (1^2+2^2+3^2+\dots+6^2) - 28 = N^5$$

$$7n^2 + 6 \cdot 7n + \underbrace{(1+4+9+16+25+36)}_{30} - 28 = N^5$$

$$\Rightarrow 7n^2 + 42n + 63 = N^5 \Rightarrow 7(n^2 + 6n + 9) = N^5$$

$$\Rightarrow 7(n+3)^2 = N^5 \Rightarrow N^5 : 7 \Rightarrow N : 7, \text{ ~~тогда~~ }$$

$$\Rightarrow N = 7k, \text{ но } N > 8 \Rightarrow \text{ ~~тогда~~ } k > 1$$

Вхождение любого простого числа кроме 7 в N должно

быть четно т.к. оно равно степени вхождения этого

простого в $(n+3)^2 \Rightarrow$ т.к. $k \neq 1$ мин $k = 2^2$

$$\Rightarrow N = 28, \quad 7(n+3)^2 = 7^{8^4} \cdot 2^{16} \Rightarrow (n+3)^2 = 7^4 \cdot 2^{16}$$

$$\Rightarrow n+3 = 7^2 \cdot 2^5 \Rightarrow n = 7^2 + 2^5 \text{ подходит}$$

$$\Rightarrow \text{Ответ: } N = 28$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N3

$$|\sqrt{x^2-x-2}+5| \geq |\sqrt{x^2-x-2}+x-1| + |6-x|$$

$$\underbrace{\sqrt{x^2-x-2}+5}_{\geq 0} > 0 \quad (x^2-x-2 \geq 0 \Leftrightarrow (x-2)(x+1) \geq 0) \\ \Rightarrow x \in (-\infty; -1] \cup [2; +\infty)$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2-x-2}+5 \geq |\sqrt{x^2-x-2}+x-1| + |6-x|$$

$$1) \sqrt{x^2-x-2}+x-1 \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x^2-x-2} \geq 1-x \quad (\text{при } x \geq 1 \text{ возм.} \rightarrow [2; +\infty) \text{ возм.})$$

$$2) x^2-x-2 \geq x^2-2x+1 \quad (x < 1)$$

$$2) x \geq 3 \quad (x < 1) \Rightarrow x \in \emptyset$$

$$\Rightarrow x \in [2; +\infty)$$

$$2) \sqrt{x^2-x-2}+5 \geq \sqrt{x^2-x-2}+x-1 + |6-x|$$

$$\Rightarrow |6-x| \leq 6-x \Rightarrow \text{при } x \leq 6 \quad |6-x| = 6-x \Rightarrow \text{возм. } [2; 6]$$

$$\text{при } x > 6 \Rightarrow |6-x| \leq 6-x \quad \text{нельзя} \Rightarrow (x \in [2; 6])$$

$$2) \sqrt{x^2-x-2}+x-1 \leq 0 \Rightarrow \text{осн. часть } 0 \text{ и } 3: x \in (-\infty; -1]$$

$$\text{при } x \in (-\infty; -1], \quad 6-x > 0 \Rightarrow |6-x| = 6-x$$

$$2) \sqrt{x^2-x-2}+5 \geq -\sqrt{x^2-x-2}-x+6-x$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{x^2-x-2} \geq 2-2x \Rightarrow \sqrt{x^2-x-2} \geq 1-x > 0 \text{ т.к. } x < 0$$

$$\Rightarrow x^2-x-2 \geq x^2-2x+1 \Rightarrow x \geq 3, \text{ но } x < 0 \Rightarrow x \in \emptyset$$

$$\Rightarrow \text{Ответ: } x \in [2; 6]$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☒

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N4

Рассмотрим 2 соседние вершины ромба $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$

$\Rightarrow 5^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$ - расстояние между вершинами в квадрате

$\Rightarrow |x_1 - x_2| \leq 5, |y_1 - y_2| \leq 5$ и $|x_1 - x_2| \in \mathbb{Z}, |y_1 - y_2| \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow$ Единственные комбинации проекций расстояния на оси Ox и Oy :

1) $|x_1 - x_2| = 5, |y_1 - y_2| = 0$

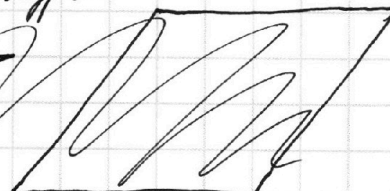
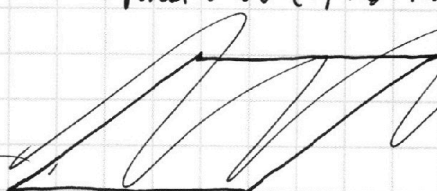
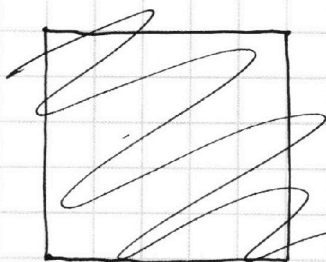
2) $|x_1 - x_2| = 0, |y_1 - y_2| = 5$

3) $|x_1 - x_2| = 3, |y_1 - y_2| = 4$

4) $|x_1 - x_2| = 4, |y_1 - y_2| = 3$

т.к. $(5^2 - 1^2 = 24)$ - не полный кв, и $5^2 - 2^2 = 21$ - не полный кв)

Рассмотрим все ромбы, у кот. ^{все} стороны ≤ 5 (кроме квадрата)





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

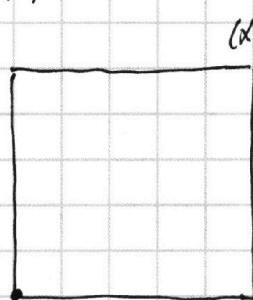
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Разобьем ромбы на 3 группы:

1) Квадраты ~~ромбы~~ (со сторонами $\parallel$ осям коорд.)



$A(x_1, y_1)$

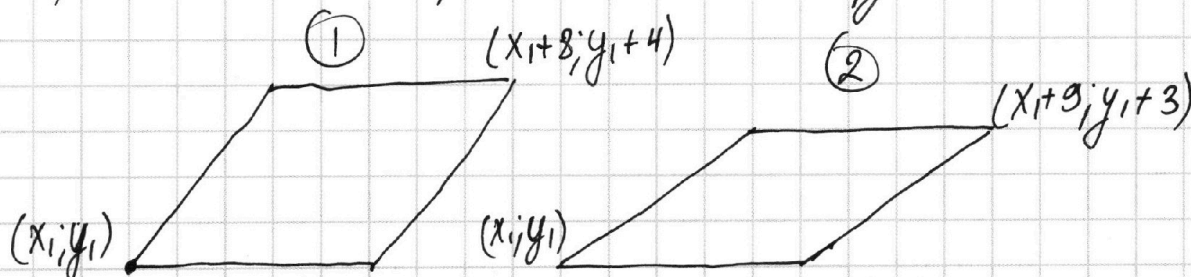
(x_1+5, y_1+5)

Коорд. левого нижнего угла ≤ 40

т.к. $x_1+5 \leq 45, y_1+5 \leq 45$

$\Rightarrow 40^2$ способов выбрать такой ромб

2) Ромбы с 1 стороной $\parallel$ осям коорд.



Таких всего 4 (2 указаны, а другие 2 повернуты на 90° и их такое же кол-во т.к. по x и y промежутки $[1; 45]$ одинаковые)

①
$$\begin{array}{l} x_1+8 \leq 45 \\ y_1+4 \leq 45 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 \leq 37 \\ y_1 \leq 41 \end{array} \Rightarrow 37 \cdot 41 \text{ способов}$$

②
$$\begin{array}{l} x_1+9 \leq 45 \\ y_1+3 \leq 45 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 \leq 36 \\ y_1 \leq 42 \end{array} \Rightarrow 36 \cdot 42 \text{ способов}$$

$\Rightarrow 2 \cdot (37 \cdot 41 + 36 \cdot 42)$ способов выбрать такие ромбы



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☒

5
☐

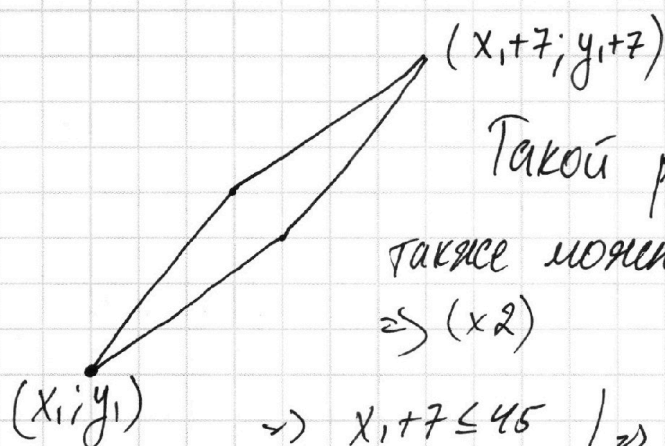
6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

3) Все сборки $\neq$ осам коорд.



Такой ромб 1 (но его
также можно повернуть на 90°)
 $\Rightarrow (x2)$

$$\Rightarrow \begin{matrix} x_1+7 \leq 45 \\ y_1+7 \leq 45 \end{matrix} \Bigg| \Rightarrow \begin{matrix} x_1 \leq 38 \\ y_1 \leq 38 \end{matrix} \Bigg| \Rightarrow \text{Всего } 38^2 \text{ см.}$$

$\Rightarrow$ Всего $2 \cdot 38^2$ способов выбрать такой ромб

$\Rightarrow$ Всего ромбов:

$$40^2 + 2(37 \cdot 41 + 36 \cdot 42) + 2 \cdot 38^2 = 40^2 + 2(2 \cdot 39^2 - 13) + 2 \cdot 38^2$$

$$\quad \quad \quad (39-2)(39+2) \quad (39-3)(39+3)$$

$$= 40^2 + 4 \cdot 39^2 + 2 \cdot 38^2 - 26$$

Ответ: $40^2 + 4 \cdot 39^2 + 2 \cdot 38^2 - 26$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N5

$$23 \cdot 2^x + 2025 = y^2$$

$\quad \quad \quad 45^2$

$$\Rightarrow 23 \cdot 2^x = y^2 - 45^2 = (y+45)(y-45)$$

числа $y+45$ и $y-45$ имеют одинаковые ост. при : 2

$\rightarrow$ или оба чет. (либо $x=0$, но $|(y+45)(y-45)| > 45$)

одно из чисел $2^a \cdot 23$, а другое 2^b ($x=a+b$) либо равен 0

$$\Rightarrow y+45 \equiv y+1 \pmod{4}$$

$$y-45 \equiv y-1 \pmod{4}$$

$$y+45 \not\equiv 0 \pmod{4}$$

$$y-45 \not\equiv 0 \pmod{4}$$

т.к. всегда

$$y \equiv 3 \pmod{4} \text{ или } y \equiv 1 \pmod{4}$$

$$\Rightarrow (y+45) + (y-45) = 2y \equiv 2 \pmod{4}$$

Оба эти числа не могут : 4 т.к. они отлич. на 2

(по mod 4)

$$1) y+45 \equiv 4 \Rightarrow y-45 \equiv 2, \text{ но } \not\equiv 4 \Rightarrow y-45=2 \text{ или } y-45=2 \cdot 23$$

$$\Rightarrow y=47 \mid \Rightarrow y+45=92 : 23 \Rightarrow (y-45)(y+45)=2 \cdot 4 \cdot 23 = 2^3 \cdot 23 \Rightarrow x=3$$

$$y=91 \mid \Rightarrow y+45=136 \text{ не явл. степенью } 2 \text{ и } 23$$

$$\Rightarrow x=3; y=47$$

$$2) y-45 \equiv 4 \Rightarrow y+45 \equiv 2, \text{ но } \not\equiv 4 \Rightarrow y+45=2 \text{ или } y+45=2 \cdot 23$$

$$\Rightarrow y=-43 \mid \Rightarrow y+45=2 \text{ не явл. степенью } 2 \text{ и } 23$$

$$y=1 \mid \Rightarrow y-45=-44 \text{ не явл. степенью } 2 \text{ и } 23$$

$\rightarrow$ Ответ: (3; 47)



1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N6

$x^2 + y^2 = a^2 \Rightarrow y \in [-a; a]$ и может принимать любое значение на этом участке

Рассмотрим $f(y) = y^2 - 4y - a$ - бегови ↑

⇒ max знач. будет ~~при~~ при $y = a$ или при $y = -a$

т.к. если $y \in (-a; a)$, то если $y < y_0$ (где y_0 - y вершины параболы), то при $y_0 < y$, $f(y_0) > f(y)$
т.к. после вершины парабола ↓ функция

Вспоминая при $y > y_0$ при $y = y_0$ очевидно (т.е. при $y = y_0$ достигается min знач $f(y)$)

$$\Rightarrow f(a) = a^2 - 4a - a = a^2 - 5a$$

$$f(-a) = a^2 + 4a - a = a^2 + 3a$$

$$1) \text{ Пусть } f(a) = 6 \Rightarrow a^2 - 5a - 6 = 0 \Rightarrow (a-6)(a+1) = 0$$

⇒ $a = 6$; $a = -1$, но надо проверить, что $f(-a) \neq f(a)$

$$\Rightarrow f(-6) = 36 - 18 = 18 > 6 \Rightarrow a = 6 - \text{не подх.}$$

$$f(-1) = 1 + 3 = 4 < 6 \Rightarrow a = -1 - \text{подх.}$$

В общем случае
 $f(a) - f(-a) = -8a$
⇒ при $a > 0$, $f(a) < f(-a)$
при $a < 0$, $f(a) > f(-a)$

$$2) \text{ Пусть } f(-a) = 6 \Rightarrow a^2 + 3a - 6 = 0 \Rightarrow D = 9 + 24 = 33 \Rightarrow a = \frac{-3 \pm \sqrt{33}}{2}$$

$$\Rightarrow \text{при } a = \frac{-3 + \sqrt{33}}{2} > 0 \text{ т.к. } \sqrt{33} > 3 \Rightarrow f(a) < f(-a) \Rightarrow \text{подх.}$$

$$\text{при } a = \frac{-3 - \sqrt{33}}{2} < 0 \Rightarrow f(a) > f(-a) \Rightarrow \text{не подх.}$$

⇒ Ответ: при $a = -1$ и при $a = \frac{-3 + \sqrt{33}}{2}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

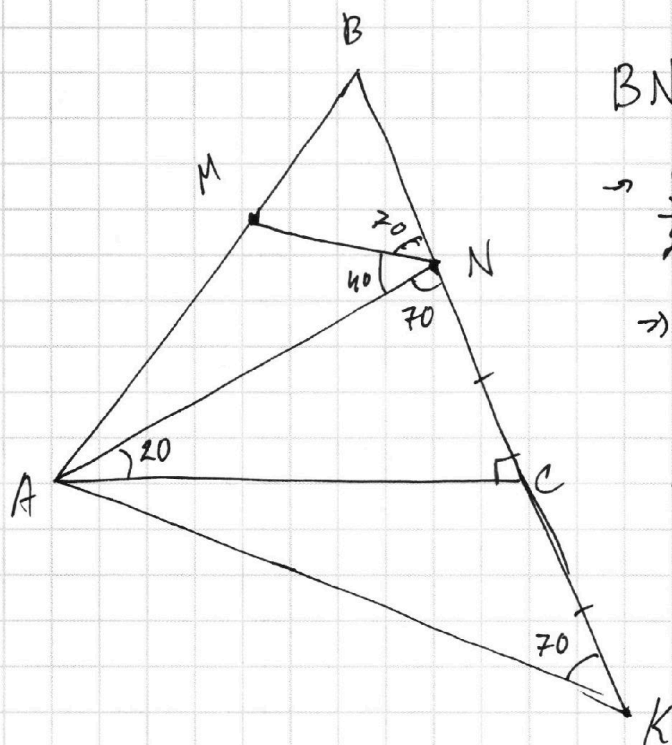
6
☐

7
☒

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N7



$$BN \cdot MA = BM \cdot NC$$

$$\Rightarrow \frac{BN}{BM} = \frac{NC}{MA}$$

$\Rightarrow$ угловым Δ за т.с.

$\Rightarrow$ т.к

$\Rightarrow$ по т. Фалеса:

$$MN \parallel AK$$

$$\Rightarrow \angle AKB = 40^\circ =$$

$$= \angle BNM \text{ (соот.)}$$

$\Rightarrow \Delta NAK$ - р/б и AC - мед.

$\Rightarrow$ она бисс. и выс $\Rightarrow \angle ACN = 90^\circ$

$\Rightarrow \angle CAN = 20^\circ \Rightarrow$ Ответ: $\angle CAN = 20^\circ$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☒3
☐4
☐5
☐6
☐7
☐СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N2

$$n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 + \dots + (n+6)^2 = N^5$$

где $n, n+1, \dots, n+6$ - 7 послед. натур. чисел.

$$\Rightarrow 7n^2 + 2(1+2+\dots+6)n + (1^2+2^2+\dots+6^2) = N^5$$

$$7n^2 + 6 \cdot 7n + \underbrace{(1+4+9+16+25+36)}_{30} = 7n^2 + 6 \cdot 7n + 91 =$$

$$= 7(n^2 + 6n + 13) = N^5 \Rightarrow N^5 : 7 \Rightarrow N : 7$$

$$\vdots$$

7

$\Rightarrow$ степень включения 7 в $N^5 = 5k$

$\Rightarrow$ степень включения 7 в $n^2 + 6n + 13 = 5k - 1 \geq 4$

~~$$n^2 + 6n + 13 = 7^4 \text{ или } 7^5$$~~

~~$$n^2 + 6n + 13 = 49^2 \Rightarrow 2 \cdot 49 \cdot n = 49^2 - 13 = 2401 - 13 = 2388$$~~

~~$$\Rightarrow (2 \cdot 49)^2 - 2 \cdot (2 \cdot 49) \cdot n + n^2 = (2 \cdot 49)^2 - 4 \cdot 13 + 36$$~~

~~$$n^2 - 4 \cdot 49n + 16 = 0 \Rightarrow n = \frac{4 \cdot 49 \pm \sqrt{4 \cdot 49^2 - 269}}{2} = \frac{4 \cdot 49 \pm \sqrt{9801 - 269}}{2}$$~~

$$\Rightarrow n^2 + 6n + 13 = \frac{N^5}{7} \Rightarrow n^2 + 6n + 13 - \frac{N^5}{7} = 0 \quad \left(\begin{array}{l} N = 7m \text{ т.к.} \\ N : 7 \end{array} \right)$$

~~$$n^2 + 6n + 13 - (4 \cdot 49)^2 = 0$$~~

~~$$D = 36 - 4 \cdot 13 + (2 \cdot 49)^2$$~~

~~$$= 4(4 \cdot 49^2 - 4)$$~~

~~$$= 16(4 \cdot 49^2 - 1)$$~~

~~$$n^2 + 6n + 13 - 2^5 \cdot 49^2 = 0$$~~

~~$$D = 36 - 4 \cdot 13 + 2^2 \cdot 49^2$$~~

~~$$= 2^4(2^2 \cdot 49^2 - 1)$$~~

$$\Rightarrow D = 36 - 13 \cdot 4 + 4 \cdot 7^4 m^5$$