



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 10



- ① [3 балла] При каком наименьшем натуральном n число $(n-1)! + n! + (n+1)!$ делится на 289?
- ② [3 балла] Из суммы квадратов семи последовательных натуральных чисел вычли число 28 и получили пятую степень натурального числа N , большего 8. Найдите наименьшее возможное значение N .

- ③ [4 балла] Решите неравенство

$$\left| \sqrt{x^2 - x - 2} + 5 \right| \geq \left| \sqrt{x^2 - x - 2} + x - 1 \right| + |6 - x|.$$

- ④ [5 баллов] На координатной плоскости рассматриваются ромбы с длиной стороны 5 такие, что абсциссы и ординаты всех четырёх вершин каждого ромба — целые числа из промежутка $[1; 45]$. Сколько существует таких ромбов? Напомним, что квадрат также является ромбом.
- ⑤ [5 баллов] Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющих уравнению

$$23 \cdot 2^x + 2025 = y^2.$$

- ⑥ [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при каждом из которых для множества точек плоскости Oxy , задаваемых уравнением $x^2 + y^2 = a^2$, наибольшее значение выражения $y^2 - 4y - a$ равно 6.

7. [6 баллов] На сторонах AB и BC треугольника ABC выбраны точки M и N соответственно так, что $\angle MNB = \angle ANC = 70^\circ$. Найдите $\angle CAN$, если известно, что $BN \cdot MA = 2BM \cdot NC$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№2 Возьмем квадраты чисел от $a-3$ до $a+3$

$$S = (a-3)^2 + (a-2)^2 + (a-1)^2 + a^2 + (a+1)^2 + (a+2)^2 + (a+3)^2$$

$$= a^2 - 6a + 9 + a^2 - 4a + 4 + a^2 - 2a + 1 + a^2 + 2a + 1 + a^2 + 4a + 4 +$$

$$a^2 + 6a + 9 + 7a^2 + 9 + 4 + 1 + 1 + 4 + 9 = 7a^2 + 28 \Rightarrow S - 28 = 7a^2 = N^5$$

$\Rightarrow N:7$. $N \geq 8 \Rightarrow N \neq 7$. Пусть $N = 7k$

$$(7k)^5 = 7a^2 \Rightarrow a^2 = 7^4 \cdot k^5$$

Тогда $(7k)^5 = 7a^2 \Rightarrow 7^5 \cdot k^5 = 7a^2 \Rightarrow a^2 = 7^4 \cdot k^5 \Rightarrow k^5$ - квадрат

числа $\Rightarrow k$ - квадрат $\Rightarrow k_{\min} = 4$ (н.к. $k > 1$). $\Rightarrow N = 28$

$$28^5 = 7a^2 \Rightarrow a^2 = 7^4 \cdot 2^{10} \Rightarrow a = 7 \cdot 2^5$$

Пример:

$$\sqrt{(7 \cdot 2^5 - 3)^2 + (7 \cdot 2^5 - 2)^2 + (7 \cdot 2^5 - 1)^2 + (7 \cdot 2^5)^2 + (7 \cdot 2^5 + 1)^2 + (7 \cdot 2^5 + 2)^2 +$$

$$(7 \cdot 2^5 + 3)^2} = 28^5$$

Ответ: $N = 28$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☒	☐	☐	☐

СТРАНИЦА

1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N 3

$$x^2 - x - 2 \geq 0 \quad (\text{т.к. это квадратное выражение})$$

$$(x+1)(x-2) \geq 0$$

$$\begin{cases} x \leq -1 \\ x \geq 2 \end{cases}$$

$\sqrt{x^2 - x - 2} + 5$ положительно на всей области определения.

Рассмотрим $x \geq 2$:

Рассмотрим 2 случая:

$$x \geq 6$$

$$2 \leq x \leq 6$$

$$\sqrt{x^2 - x - 2} + 5 \geq \sqrt{x^2 - x - 2} + x - 1 + x - 6 \quad \sqrt{x^2 - x - 2} + x - 1 \geq \sqrt{x^2 - x - 2} + 1 > 0$$

$$5 \geq 2x - 7$$

$$\sqrt{x^2 - x - 2} + 5 \geq \sqrt{x^2 - x - 2} + x - 1 + 6 - x$$

$$x \leq 6$$

$$5 \geq 5$$

$$x \leq 6$$



Рассмотрим $x \leq -1$

$$\sqrt{x^2 - x - 2} \geq 1 - x$$

$$x^2 - x - 2 \geq (1 - x)^2$$

$$x^2 - 2x + 1 \geq x^2 - x - 2$$

$$3 \geq x$$

$\Rightarrow$

$$1 - x > \sqrt{x^2 - x - 2} \Rightarrow \sqrt{x^2 - x - 2} + x - 1 < 0$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА

2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№3

Решение

$$\sqrt{x^2 - x - 2} \leq 5 \geq 1 - x - \sqrt{x^2 - x - 2} + 6 - x$$

$$2\sqrt{x^2 - x - 2} \geq 2 - 2x$$

$$\sqrt{x^2 - x - 2} \geq 1 - x$$

$$\sqrt{x^2 - x - 2} \leq x - 1 \geq 0$$

X

Ответ: $2 \leq x \leq 6$

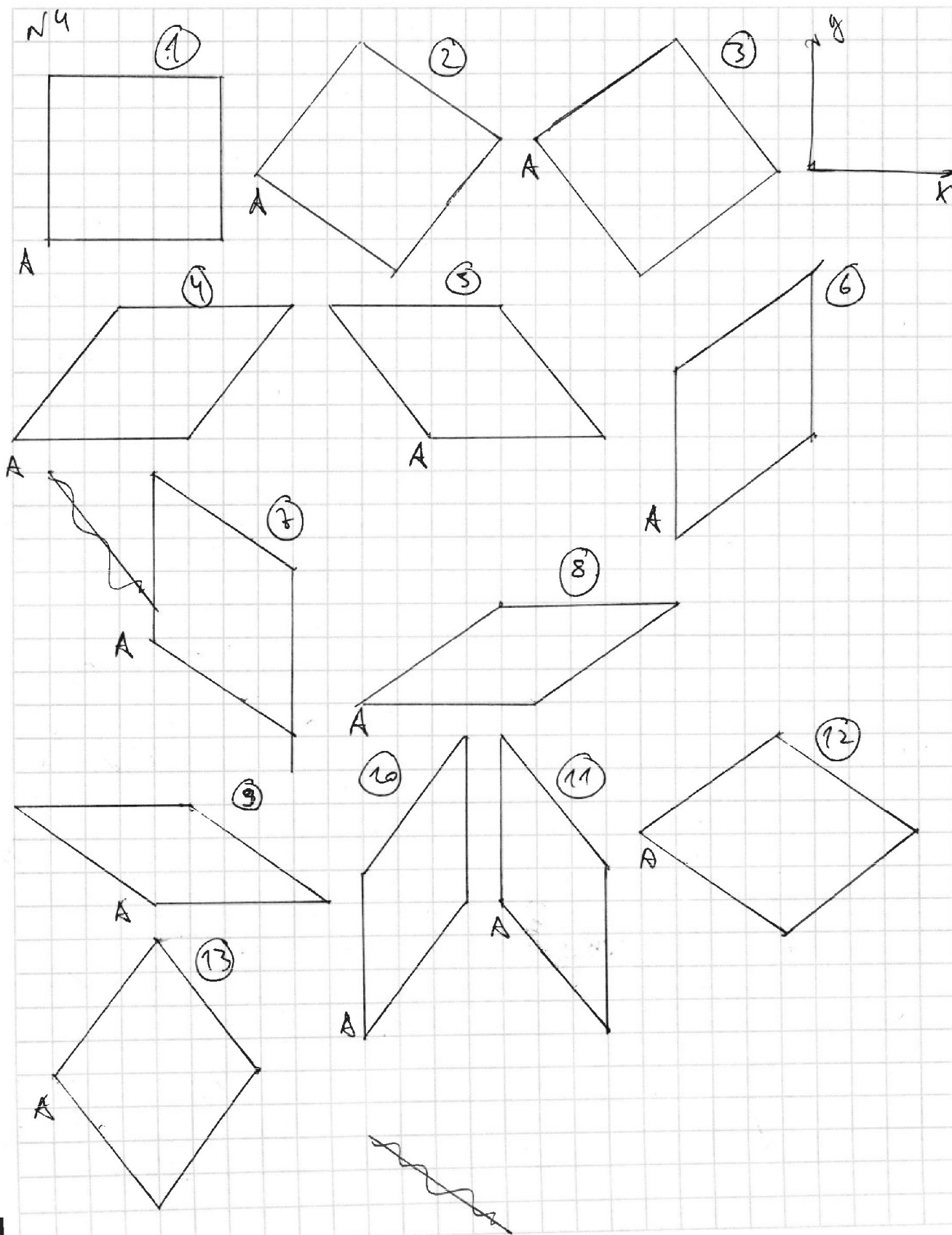


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

14

На през. странице представлены всевозможные ~~решения~~ ромбы с учётом ориентации. Это
Заметим, что если сторона ромба $\parallel$ оси, то
разность координат вершин этой стороны по
оси x и оси y равны 3 и 4.

Для каждого ромба запишем предельные
координаты точки A (если координаты точки A не
лежат в пределах предельных, то ~~снова~~ ^{координаты одной}
из точек выходят за интервал:

① $A_{\min}(1;1)$ $A_{\max}(40;40)$ $Kal-bo: 40-40=0$	② $A_{\min}(1;4)$ $A_{\max}(38;41)$ $Kal-bo: (38-1)(41-4)=38 \cdot 38$	③ $A_{\min}(1;5)$ $A_{\max}(38;42)$ $Kal-bo: (38-1)(42-5)=38 \cdot 38$
④ $A_{\min}(1;1)$ $A_{\max}(37;41)$ $Kal-bo: (37-1)(41-1)=37 \cdot 41$	⑤ $A_{\min}(4;1)$ $A_{\max}(40;44)$ $Kal-bo: (40-4)(44-1)=37 \cdot 41$	⑥ $A_{\min}(1;1)$ $A_{\max}(47;37)$ $Kal-bo: (47-1)(37-1)=41 \cdot 37$
⑦ $A_{\min}(1;4)$ $A_{\max}(41;40)$ $Kal-bo: (41-1)(40-4)=37 \cdot 37$	⑧ $A_{\min}(1;1)$ $A_{\max}(36;42)$ $Kal-bo: (36-1)(42-1)=36 \cdot 42$	⑨ $A_{\min}(5;1)$ $A_{\max}(40;42)$ $Kal-bo: (40-5)(42-1)=36 \cdot 42; Kal-bo$
⑩ $A_{\min}(1;1)$ $A_{\max}(42;36)$ $Kal-bo: (42-1)(36-1)=42 \cdot 36$	⑪ $A_{\min}(1;5)$ $A_{\max}(42;40)$ $Kal-bo: (42-1)(40-5)=42 \cdot 36$	⑫ $A_{\min}(1;4)$ $A_{\max}(37;42)$ $Kal-bo: (37-1)(42-4)=37 \cdot 39$
⑬ $A_{\min}(1;5)$	$A_{\max}(39;41)$	$Kal-bo: (39-1)(41-5)=39 \cdot 37$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☒

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

№4

кал-во - это количество таких рамок. Рассчитывается как произведение количества возможных координат по x и по y .

Посчитаем общее кал-во

$$S = 40 \cdot 40 + 2 \cdot 38 \cdot 38 + 4 \cdot 37 \cdot 41 + 4 \cdot 36 \cdot 42 + 2 \cdot 37 \cdot 39$$

$$= 19490$$

Ответ: 19490.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

WS

$$2025 = 45 \cdot 45 \Rightarrow$$

$$23 \cdot 2^x = y^2 - 45^2 = (y-45)(y+45). \text{ Пусть } y-45 = 23 \Rightarrow$$

$$y-45 = 23 \cdot 2^k, \text{ где } k - \text{какое-то натуральное число.}$$

$$\text{Тогда } y+45 = 2^{x-k} \Rightarrow y+45 - (y-45) = 90 \Rightarrow 2^{x-k} - 2^k \cdot 23 =$$

$$= 2^k \left(2^{x-2k} - 23 \right) \Rightarrow 2^k \left(2^{x-2k} - 23 \right) = 2 \cdot 3 \cdot 5 \Rightarrow k = 1 \Rightarrow$$

$$2^{x-2} - 23 = 3 \cdot 5 \Rightarrow 2^{x-2} = 45 + 23 = 68 \Rightarrow 2 \cdot 2 \cdot 17 \neq \text{степень}$$

$$\text{двайзика.} \Rightarrow y-45 \neq 23. \Rightarrow y+45 = 23 \Rightarrow y+45 = 23 \cdot 2^k; y-45 = 2^{x-k}$$

$$\Rightarrow y+45 - (y-45) = 90 = 23 \cdot 2^k - 2^{x-k}. \text{ Рассмотрим 2 случая}$$

$$k \geq x-k$$

$$2^{x-k} \left(23 \cdot 2^{2k-x} - 1 \right) = 90 = 2 \cdot 3 \cdot 5$$

$$\Rightarrow 2$$

$$x-k = 1$$

$$23 \cdot 2^{k-1} - 1 = 3 \cdot 5 = 45$$

$$23 \cdot 2^{k-1} = 46$$

$$2^{k-1} = 2$$

$$\Rightarrow k = 2 \Rightarrow x = 3$$

$$\Rightarrow y = 23 \cdot 2 - 45 = 92 - 45 = 47. \text{ III. к. в натуральном выра-$$

$$\text{жении } y \text{ в квадрате, находим } y = 47. \text{ Ответ: } x = 3; y = 47$$

$$k \leq x-k$$

$$2^k \left(23 - 2^{x-2k} \right) = 2 \cdot 3 \cdot 5$$

$$\Rightarrow 2$$

$$k = 1 \Rightarrow$$

$$23 - 2^{x-2} = 45$$

$$\Rightarrow 2^{x-2} = 22$$

$$\text{не подходит}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



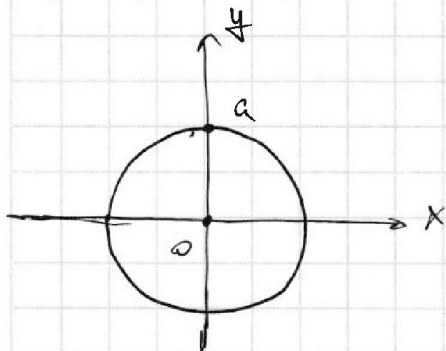
СТРАНИЦА

1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№6

Заметим, что $x^2 + y^2 = a^2$ — уравнение окружности с центром $(0; 0)$ и радиусом a .



$$y^2 - 4y - a = 6$$

$$y^2 - 4y + 4 - a = 10$$

$$(y-2)^2 - a = 10$$

$$\Rightarrow (y-2)^2 - a = \max \text{ при } (y-2)^2 = \max \text{ (и.р.}$$

$a = \text{const})$. Заметим, что макси-

мум достигается при $y = -a$. (Если $y = -a < 0$, то

$$(y-2)^2, (a+2-4y)^2 < (a+2)^2) \Rightarrow (a+2)^2 - a = 10$$

$$a^2 + 4a + 4 - a = 10 \Rightarrow$$

$$a^2 + 3a - 6 = 0$$

$$D = 9 + 24 = 33$$

$$a = \frac{-3 \pm \sqrt{33}}{2}$$

$$\text{Ответ: } a = \frac{-3 \pm \sqrt{33}}{2}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

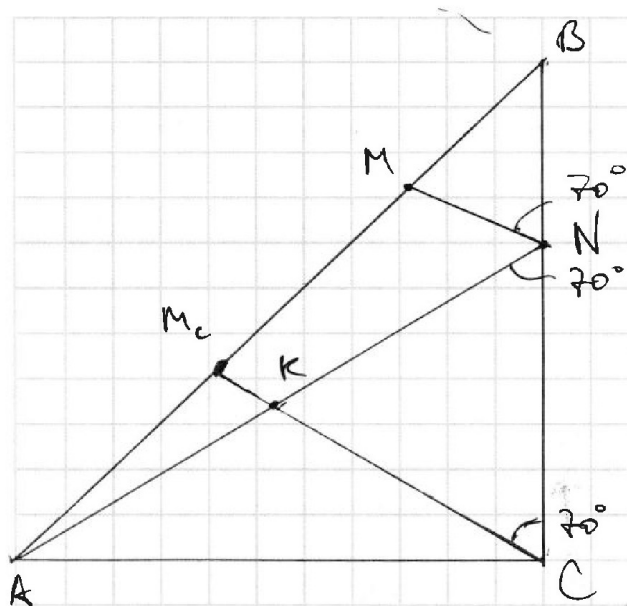
5
☐

6
☐

7
☒

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Пусть M_c - середина

AN , K - точка пересечения AN и MC .

Перепишем условие задачи иначе:

$$BN \cdot MA = 2BM \cdot NC$$

$$\frac{BN}{NC} = \frac{BM}{MA} = \frac{BM}{MM_c} \Rightarrow$$

$MN \parallel M_cC \Rightarrow K$ - середина AN ,

$$\angle BCM_c = \angle BNM = 70^\circ = \angle CNK \Rightarrow CK, NK, AK \Rightarrow \triangle ACN -$$

прямоугольный и $\angle ACN = 90^\circ \Rightarrow \angle CAN = 20^\circ$.

Ответ: $\angle CAN = 20^\circ$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
__ ИЗ __

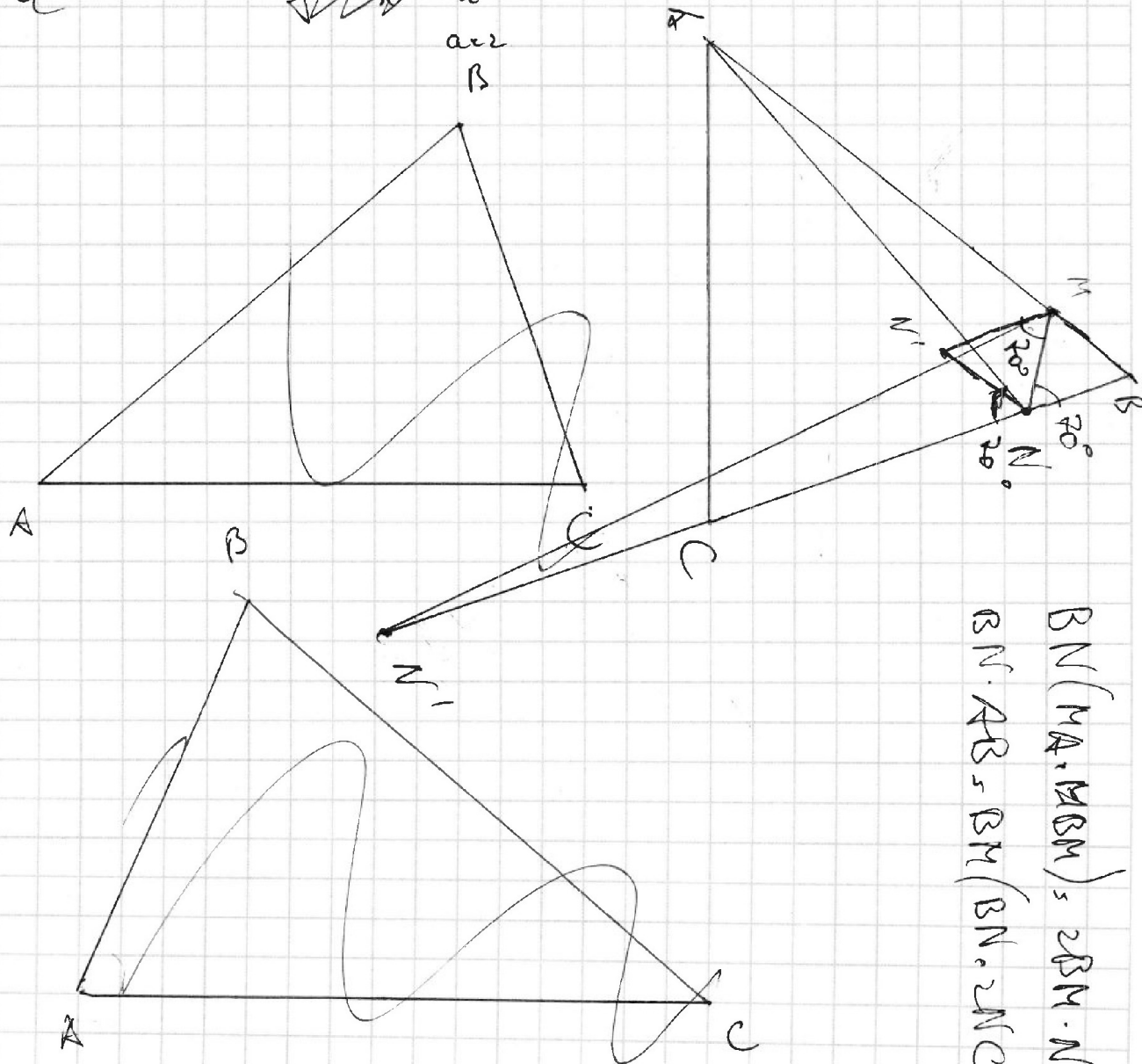
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{array}{r} 45 \\ \times 45 \\ \hline 225 \\ 180 \\ \hline \end{array}$$

$$(y-4) \quad (y-2)^2 - a = 10$$

$y = \max$

$a-2$
 $a+2$
 B



$BN(MA \cdot MBN), 2BM \cdot NC, BM \cdot BN$
 $BN \cdot AB, BM(BN \cdot 2NC), BN'$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☒

4
☒

5
☐

6
☐

7
☐

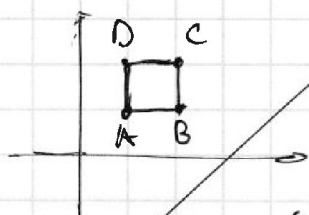
СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№4

Заметим, что если координаты целые и сторона квадрата не имеет вертикально или горизонтально, то разность координат по x и по y равна 3 и 4 (прямог. тр-оик).

Сначала рассмотрим квадраты со сторонами, параллельными осям координат. Заметим, что



Каждый квадрат однозначно задается 1 точкой. Ее координаты

по x и по y пробегают значения от 1 до 39 (иначе другие точки выйдут за границы)

$$x^2 - x - 2, (x+1)(x-2)$$

$$x \leq -1 \quad \text{или} \quad x \geq 2$$

$$\sqrt{x^2 - x - 2} + x - 1 < 0$$

$$x^2 - x - 2 \leq x^2 (1 - x)^2$$

$$x^2 - 2x + 1 \geq x^2 - x - 2$$

$$3 \geq x$$

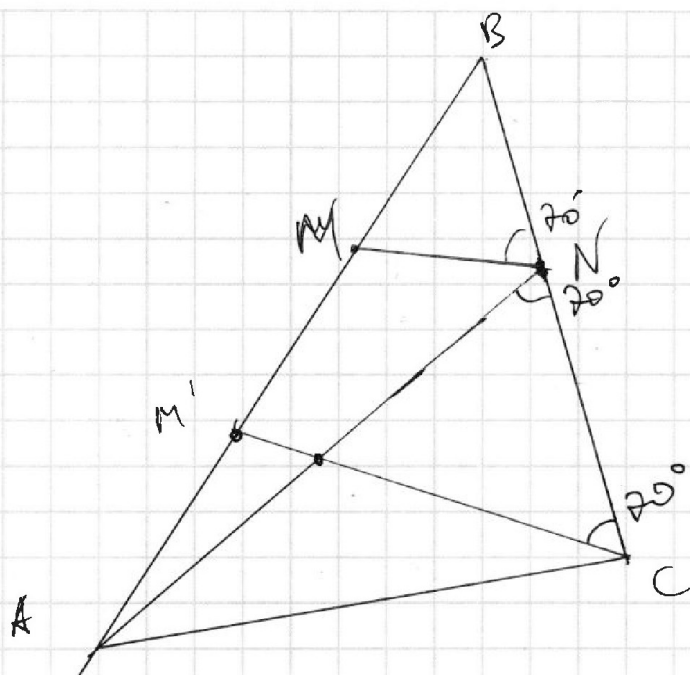


На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{BM}{AM} = \frac{BN}{NC}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☒ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 _ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$1600 + 2888 + 6068 + 6048 = 2886$$

$$\begin{array}{r} 38 \\ \times 58 \\ \hline 304 \\ 1900 \\ \hline 2214 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 37 \\ \times 41 \\ \hline 37 \\ 148 \\ \hline 1517 \end{array}$$

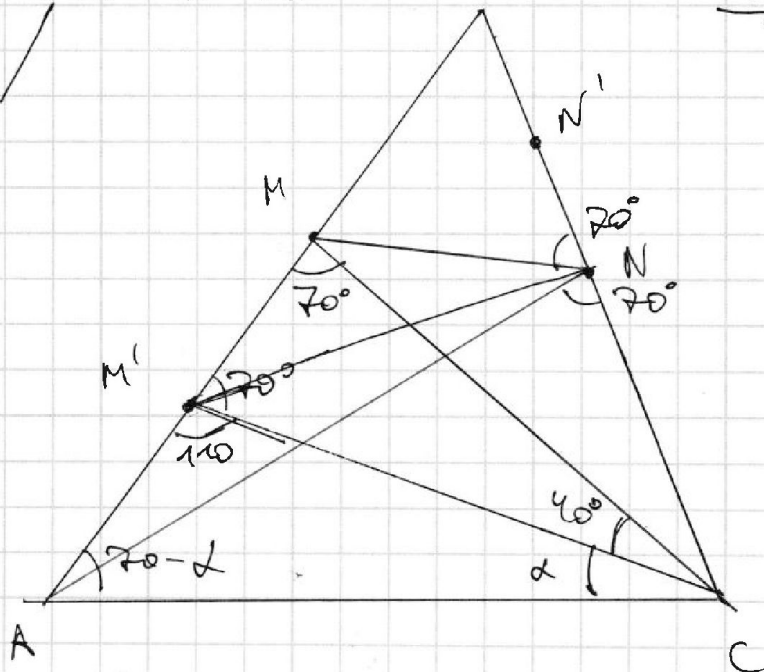
$$\begin{array}{r} 36 \\ \times 42 \\ \hline 72 \\ 144 \\ \hline 1512 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 37 \\ \times 39 \\ \hline 333 \\ 111 \\ \hline 1443 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1600 \\ + 2888 \\ \hline 4488 \\ + 6068 \\ \hline 10556 \\ + 6048 \\ \hline 16604 \\ + 2886 \\ \hline 19490 \end{array}$$

$$\sin(70-\alpha) = \sin 70 \cos \alpha - \sin \alpha \cos 70$$

$$\frac{BM}{\sin 70} = \frac{MA}{\sin 70} = \frac{NC}{\sin 70}$$



$$\sin \alpha \cdot \frac{CM' \cdot AC \cdot \sin \alpha}{CM} = \frac{CM' \cdot CM \cdot \sin 40}{\sin 70}$$