



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 10



1. [3 балла] При каком наименьшем натуральном n число $(n-1)! + n! + (n+1)!$ делится на 289?
2. [3 балла] Из суммы квадратов семи последовательных натуральных чисел вычли число 28 и получили пятую степень натурального числа N , большего 8. Найдите наименьшее возможное значение N .
3. [4 балла] Решите неравенство

$$\left| \sqrt{x^2 - x - 2} + 5 \right| \geq \left| \sqrt{x^2 - x - 2} + x - 1 \right| + |6 - x|.$$

4. [5 баллов] На координатной плоскости рассматриваются ромбы с длиной стороны 5 такие, что абсциссы и ординаты всех четырёх вершин каждого ромба — целые числа из промежутка $[1; 45]$. Сколько существует таких ромбов? Напомним, что квадрат также является ромбом.
5. [5 баллов] Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющих уравнению

$$23 \cdot 2^x + 2025 = y^2.$$

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при каждом из которых для множества точек плоскости Oxy , задаваемых уравнением $x^2 + y^2 = a^2$, наибольшее значение выражения $y^2 - 4y - a$ равно 6.
7. [6 баллов] На сторонах AB и BC треугольника ABC выбраны точки M и N соответственно так, что $\angle MNB = \angle ANC = 70^\circ$. Найдите $\angle CAN$, если известно, что $BN \cdot MA = 2BM \cdot NC$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(n-1)! + n! + (n+1)! : 289 \quad 289 = 17^2$$

~~$$1 \quad 2 \quad 6 \quad 24 \quad 120 \quad 720 \quad 5040$$~~

$$(n-1)! + n! + (n+1)! = (n-1)! \cdot (n + n \cdot (n+1) + 1) = (n-1)! \cdot (n^2 + 2n + 1) = (n-1)! \cdot (n+1)^2$$

Заметим, что 17 - простое число $\Rightarrow$ чтобы $(n-1)! : 17$, а чтобы $(n+1)^2 : 17$, нужно чтобы $(n+1) : 17$

нужно, чтобы $(n-1) \geq 17$, а чтобы $(n+1) : 17$ ~~нужно~~ $\Rightarrow$

$n \geq 18$. Заметим, что если $(n+1) : 17$, то $(n+1)^2 : 17^2$, т.е. на 289 .

$\Rightarrow$ достаточно делимости числа $n+1$, чтобы делилась сумма факториалов. $\Rightarrow$ достаточно рассмотреть два случая:

$$(n+1)^2 : 17^2 \text{ и } (n+1) \cdot (n-1)! : 17^2. \quad (k = (n+1) : 17)$$

$$1) (n+1)^2 : 17^2 \Leftrightarrow n+1 : 17 \Rightarrow n+1 = 17k \Rightarrow n = 17k - 1$$

Заметим, что n - натуральное число $\Rightarrow$ наименьшее значение

$$k=1 \Rightarrow \text{наименьшее значение } n = 17 \cdot 1 - 1 = 16$$

$$2) (n-1)! : 17^2 \Rightarrow (n-1)! : 17 \Rightarrow (\text{см. выше}) n \geq 18, \text{ что уже}$$

больше, чем 16 (см. случай 1) $\Rightarrow$ наименьшее подходящее значение n для этого случая больше, чем подходящее наименьшее значение

n другого случая $\Rightarrow$ его можно больше не рассматривать

Ответ: $n = 16$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть x - ~~какое-то~~ четвертое по величине число, из 7, возведенных в квадрат. Тогда ~~сумму~~ ^{выражение} квадратов можно записать так:

$$(x-3)^2 + (x-2)^2 + (x-1)^2 + x^2 + (x+1)^2 + (x+2)^2 + (x+3)^2 - 28 = N^5$$

$$x^2 - 6x + 9 + x^2 - 4x + 4 + x^2 - 2x + 1 + x^2 + x^2 + 2x + 1 + x^2 + 4x + 4 + x^2 + 6x + 9 - 28 = N^5$$

$$7x^2 + (9+4+1+9+4+1) - 28 = N^5$$

$$7x^2 + 28 - 28 = N^5$$

$$7x^2 = N^5$$

$$\Rightarrow N^5 : 7, \text{ а т.к. } 7 - \text{простое число, то } N : 7. \Rightarrow N^5 : 7^5 \Rightarrow x^2 : 7^4$$

$$\Rightarrow x : 7^2. \text{ Разложим } x \text{ на простые множители:}$$

$$x = 7^{2+k} \cdot p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \dots \cdot p_n^{k_n}, \text{ где } p_i - \text{простой делитель (отличный от 7) числа } x,$$

k_i - степень вхождения множителя p_i в число x , а $2+k$ - степень вхождения 7 в число x , а n - кол-во простых делит. ^{числа x , отличных от 7}

$$\Rightarrow x^2 = 7^{2(2+k)} \cdot p_1^{2k_1} \cdot p_2^{2k_2} \cdot \dots \cdot p_n^{2k_n} \Rightarrow N^5 = 7^{2(2+k)} \cdot p_1^{2k_1} \cdot p_2^{2k_2} \cdot \dots \cdot p_n^{2k_n} =$$

$$= 7^{5+2k} \cdot p_1^{2k_1} \cdot p_2^{2k_2} \cdot \dots \cdot p_n^{2k_n}. \text{ Т.к. } N - \text{натуральное число, то степень вхо-}$$

$$\text{ждения каждого простого множителя в } N^5 : 5 \Rightarrow 5+2k : 5 \Leftrightarrow$$

$$2k : 5, 2k_1 : 5 \Leftrightarrow k_1 : 5, \dots, k_n : 5 \text{ (и 5 взаимно просты). Рассмотрим}$$

$$\text{случай, когда } k=0, k_1=0, \dots, k_n=0 \Rightarrow N^5 = 7^5 \Rightarrow N=7.$$

По условию $N > 8 \Rightarrow$ этот случай не подходит $\Rightarrow N = 7a$, где

$$a = N : 7 \text{ (} a - \text{натуральное число } > 1) \Rightarrow \text{наименьшее } N \text{ достигается}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☒

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

при наименьшем a . ~~наименьшее значение~~ $a=2 \Rightarrow$ наименьшее

значение $N = 2 \cdot 7 = 14 \Rightarrow N^5 = 7^5 \cdot 2^5$ Заметим, что $a = 7 \cdot p_1 \cdot \dots$

$\cdot p_n^{k_n} \Rightarrow a^5 = (7^{k_1} \cdot p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \dots \cdot p_n^{k_n})^2 \Rightarrow$ ~~наименьшее~~ a^5 — точный квадрат

некоторого натурального числа, а т.к. 5 — нечёт., то и a тоже.

$\Rightarrow$ наименьшее значение $a = 2^2 = 4 \Rightarrow N = 7 \cdot 4 = 28 \Rightarrow N^5 = 28^5$

$\Rightarrow x^2 = 28^5 : 7$

$$x^2 = 7^4 \cdot 2^{10}$$

$$x = 7^2 \cdot 2^5$$

Ответ: $N = 28$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$|\sqrt{x^2-x-2}+5| \geq |\sqrt{x^2-x-2}+x-1| + |6-x| \quad x^2-x-2=(x+1)(x-2)$$

Заметим, что $x^2-x-2 \geq 0$, иначе значение выражения не определено. $\Rightarrow (x+1)(x-2) \geq 0$

$$\begin{array}{c} + \quad - \quad + \\ -1 \quad 2 \end{array} \Rightarrow x \in (-\infty; -1] \cup [2; +\infty)$$

Пусть $k = \sqrt{x^2-x-2}$. Тогда переапишем неравенство:

$$|k+5| \geq |k+x-1| + |6-x| \quad \text{Заметим, что } k \geq 0 \text{ по ОДЗ} \Rightarrow$$

$$k+5 \geq |k+x-1| + |6-x|$$

~~$k+x-1 \geq 0$~~

$$1) x \geq 6: k+5 \geq k+x-1 \Rightarrow k+x-1 \geq 0 \quad \text{и } 6-x \leq 0$$

$$k+5 \geq k+x-1 + x-6$$

$$12 \geq 2x$$

$$6 \geq x \Rightarrow 6 \leq x \leq 6 \Rightarrow x = 6$$

$$2) x < 6: 6-x \geq 0$$

$$k+5 \geq |k+x-1| + 6-x$$

$$k+x-1 \geq |k+x-1| \Rightarrow k+x-1 = |k+x-1| \Rightarrow k+x-1 \geq 0$$

$$\text{При } x \geq 1, k+x-1 \geq 0 \Rightarrow \text{по ОДЗ } 2 \leq x < 6$$

$$\text{При } x \leq -1: \text{ Пусть } x = -n, \text{ где } n = |x| \quad \sqrt{(n+2)(n-1)} \geq 0$$

$$\sqrt{n^2+n-2} = \sqrt{(n+2)(n-1)} \quad \sqrt{(n+2)(n-1)} - n - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{(n+2)(n-1)} \geq n+1$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☒

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что обе части неравенства $\geq 0 \Rightarrow$ ~~остаточного члена~~

$$\sqrt{(n+2)(n-1)} \geq n+1 \Leftrightarrow (n+2)(n-1) \geq (n+1)^2$$

$$n^2 + n - 2 \geq n^2 + 2n + 1$$

$$0 \geq 3 \Rightarrow n \in \emptyset$$

$$\Rightarrow \text{~~х~~ } 2 \leq x \leq 6 \Rightarrow x \in [2, 6]$$

$$\text{Ответ: } x \in [2, 6]$$



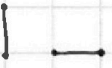
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что сторона ромба может располагаться 2 способами: параллельно осям координатной плоскости или нет.

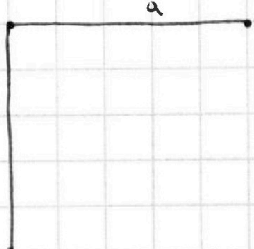
1) ~~Параллельно~~ $\parallel$ осям:  (пусть x и y - длины катетов)

2) не $\parallel$ осям:  Тогда сторона - гипотенуза прямоугольного треугольника, а т.к. вершины ромба имеют целые абсциссы и ординаты, то его катеты имеют ~~целую~~ ^{натуральную} длину $\Rightarrow$ по теореме

Пифагора: $x^2 + y^2 = 5^2 \Rightarrow 0 < x < 5$ и $0 < y < 5$. $\Rightarrow$ возможные

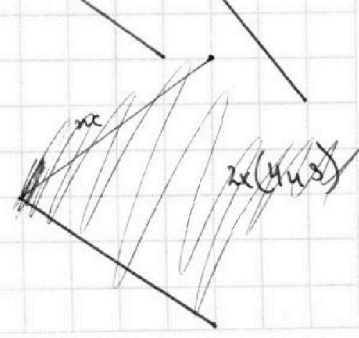
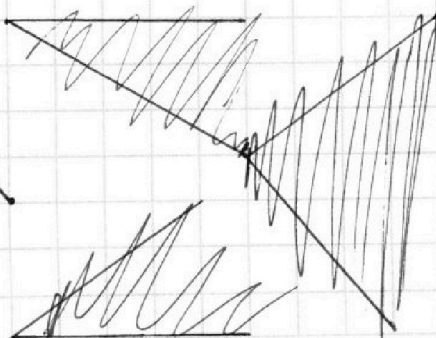
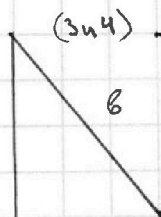
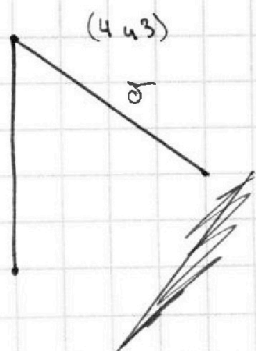
пары ^{по x} : 1 и $\sqrt{24}$, 2 и $\sqrt{21}$, 3 и 4, 4 и 3 ~~и т.д.~~, однако по y из них

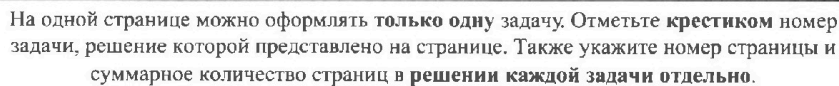
подходят только 3 и 4, 4 и 3. Заметим, что по ~~одним~~ ^{разным} ~~сторонам~~ ^{расположению} сторонам, имеющим общую вершину ромба задаётся однозначно.

1)  2 стороны $\parallel$ осм

3) обе стороны не $\parallel$ осм ~~одинак.~~
(3 и 4) и (4 и 3) по одной стороне
(3 и 4) и (4 и 3) по разн. сторонам. 2х(3 и 4)

2) 1 сторона $\parallel$ осм, а другая - нет





СТРАНИЦА

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Омберг: 26380 ~~4444~~ 100006



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$23 \cdot 2^x + 2025 = y^2$$

Заметим, что если пара (x, y)

подходит, то и пара $(x, -y)$ подходит, т.к. $y^2 = (-y)^2$.

Поэтому найдем все пары для $y \geq 0$. Заметим, что 23 — нечет, а 2025 и y^2 — четные. $\Rightarrow 23 \cdot 2^x$ — четное $\Rightarrow x \geq 0$.

$$23 \cdot 2^x = y^2 - 2025 \quad 23 \cdot 2^x > 0 \Rightarrow y^2 - 2025 > 0 \Rightarrow y > 45$$

$$23 \cdot 2^x = (y - 45)(y + 45) \quad \text{Пусть } k = y - 45 \Rightarrow k \geq 1$$

$$23 \cdot 2^x = k(k + 90) \Rightarrow k \text{ и } k + 90 \text{ одной чётности, а}$$

$$\text{и } \text{НОД} - \text{делитель } 90. \quad k \geq 1 \Rightarrow k \cdot (k + 90) \geq 91$$

$$\Rightarrow 2^x \geq \frac{91}{23} > 3. \Rightarrow k \text{ и } k + 90 : 2, \text{ причём 1 из чисел}$$

$$: 2, \text{ но } \not: 4 \Rightarrow \text{второе } : 2^{x-1}.$$

$$k \text{ и } k + 90 = (2 \text{ и } 2^{x-1} \cdot 23) \text{ или } (2 \cdot 23 \text{ и } 2^{x-1})$$

$$1) 2 \text{ и } 2^{x-1} \cdot 23 \Rightarrow k = 2 \Rightarrow k + 90 = 92 = 23 \cdot 2^2 \Rightarrow x = 2 + 1 = 3,$$

$$y = k + 45 = 47$$

$$2) 46 \text{ и } 2^{x-1} \quad k = 46 \Rightarrow k + 90 = 46 + 90 = 136 \neq \text{степень } 2$$

$$k = 46 \quad (\text{Заметим, что } k + 90 \geq 91 > 46 \Rightarrow k = 46)$$

$$\Rightarrow \text{при } y \geq 0 \text{ только 1 случай подходит: } (x, y) = (3, 47) \Rightarrow$$

$$\text{всего 2 случая } (3, 47) \text{ и } (3, -47).$$

$$\text{Ответ: } (3, 47); (3, -47)$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 + y^2 = a^2$$

$$a = \pm \sqrt{x^2 + y^2}$$

~~$$y^2 - 4y - a = 6$$~~
~~$$y^2 - 4y - 6 - a < 0$$~~
~~$$y^2 - 4y - 6 - \sqrt{x^2 + y^2} < 0$$~~

Заметим, что при $x=0$ $y^2 + 0 = a^2 \Rightarrow$ знач. $y^2 - 4y = y(y-4) \leftarrow \begin{matrix} \text{max.} & \text{max.} \\ \text{при } y=4 & \text{при } y=0 \end{matrix}$

Пусть $a \neq 0$:

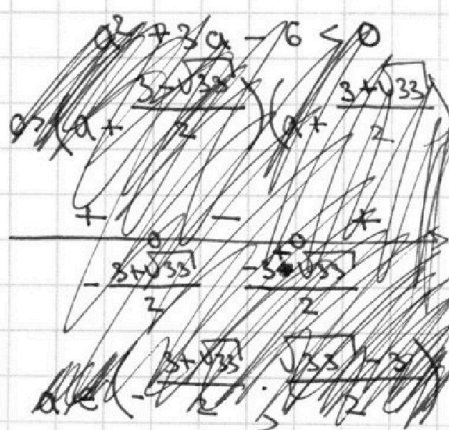
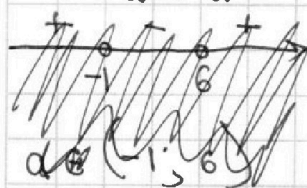
$$y=a \quad a^2 - 4a - a = 6$$

$$y=-a \quad a^2 + 4a - a = 6 \rightarrow a^2 + 3a - 6 = 0$$

$$a^2 - 5a - 6 = 0$$

$$(a-6)(a+1) = 0$$

$$a=1 \text{ или } a=6$$



$$D = 3^2 + 4 \cdot 6 \cdot 1 = 9 + 24 = 33$$

$$a = \frac{-3 \pm \sqrt{33}}{2}$$

$$a \in (-1; 6) \cap \left(-\frac{3+\sqrt{33}}{2}; \frac{\sqrt{33}-3}{2} \right) \Rightarrow a \in \left(-1; \frac{\sqrt{33}-3}{2} \right)$$

~~Решение задачи~~

Если $a=0$: $x^2 + y^2 = 0 \Rightarrow x^2 = y^2 = 0 \Rightarrow x=y=0 \Rightarrow$

$$y^2 - 4y - a = 0 - 4 \cdot 0 - 0 = 0 \neq 6 \Rightarrow a \neq 0.$$

Ответ: ~~$a \in \left\{ -1, 6, \frac{-3+\sqrt{33}}{2}, \frac{-3-\sqrt{33}}{2} \right\}$~~

Проверим варианты для $a \neq 0$: ~~$a \in (-1; 6) \cap \left(-\frac{3+\sqrt{33}}{2}; \frac{\sqrt{33}-3}{2} \right)$~~



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Они должны не превышать 6 в обоих случаях $\Rightarrow$

$$a = -1: (-1)^2 + 3 \cdot (-1) = 1 - 3 = -2 < 6 \Rightarrow \text{подходит}$$

$$a = 6: 6^2 + 3 \cdot 6 = 36 + 18 > 6 \Rightarrow \text{не подходит}$$

$$a = \frac{-3 + \sqrt{33}}{2}: \left(\frac{-3 + \sqrt{33}}{2} \right)^2 - 4 \cdot \frac{-3 + \sqrt{33}}{2} = \left(\frac{-3 + \sqrt{33}}{2} \right)^2 - 2(\sqrt{33} - 3)$$

$$-3 + \sqrt{33} < -3 + \sqrt{33} < -3 + 6 \Rightarrow 2 < -3 + \sqrt{33} < 3 \Rightarrow \text{не подходит}$$

$$\left(\frac{-3 + \sqrt{33}}{2} \right)^2 \leq 1,5^2 \Rightarrow \left(\frac{-3 + \sqrt{33}}{2} \right)^2 - 2(\sqrt{33} - 3) < 6$$

$$a = \frac{-3 - \sqrt{33}}{2}: \left(\frac{-3 - \sqrt{33}}{2} \right)^2 - 4 \cdot \frac{-3 - \sqrt{33}}{2} = \left(\frac{3 + \sqrt{33}}{2} \right)^2 + 2(3 + \sqrt{33}) > 6$$

$$\text{Ответ: } a = -1 \text{ или } a = \frac{\sqrt{33} - 3}{2}.$$

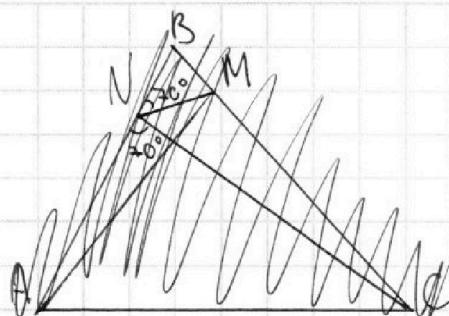


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Дано: $\angle MNB = \angle ANC = 70^\circ$, $BN \cdot MA = 2BM \cdot NC$

Найти: $\angle CAN$.

Решение:

$$BN:BM = \frac{2NC}{MA}$$

На луче

отложим отрезок $CN_1 = NC$.

$$\Rightarrow BN:BM = \frac{NN_1}{MA} \Rightarrow MN \parallel AN_1$$

$\angle MNB = \angle AN_1N$ как соответственные при $MN \parallel AN_1$ и секущей BN_1 . $\Rightarrow$

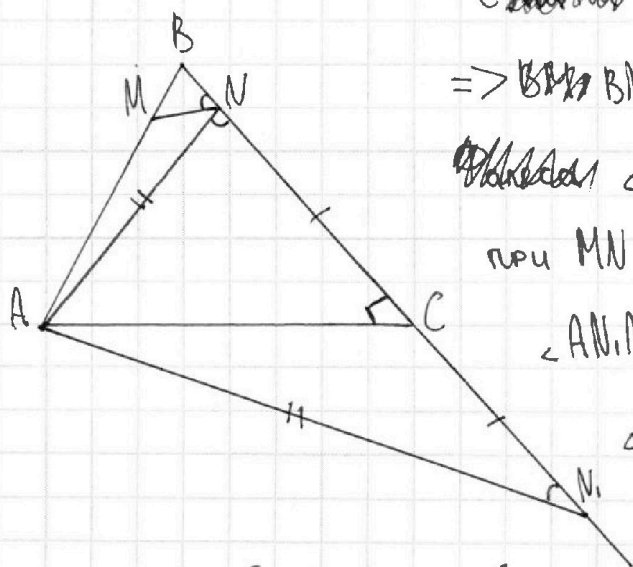
$$\angle AN_1N = \angle MNB = \angle ANC = 70^\circ \Rightarrow$$

$\triangle N_1AN$ - р/д. по 2-м углам ($\angle N_1AN$ и $\angle AN_1N$). $\Rightarrow AC$ -

- медиана в $\triangle N_1AN$, проведенная к основанию $\Rightarrow$ еще и

$$\text{высота} \Rightarrow \angle ACN = 90^\circ \Rightarrow \angle CAN = 180^\circ - \angle ANC - \angle ACN = 180^\circ - 70^\circ - 90^\circ = 20^\circ.$$

Ответ: $\angle CAN = 20^\circ$.





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

