



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 10



1. [3 балла] При каком наименьшем натуральном n число $(n-1)! + n! + (n+1)!$ делится на 289?
2. [3 балла] Из суммы квадратов семи последовательных натуральных чисел вычли число 28 и получили пятую степень натурального числа N , большего 8. Найдите наименьшее возможное значение N .
3. [4 балла] Решите неравенство

$$\left| \sqrt{x^2 - x - 2} + 5 \right| \geq \left| \sqrt{x^2 - x - 2} + x - 1 \right| + |6 - x|.$$

4. [5 баллов] На координатной плоскости рассматриваются ромбы с длиной стороны 5 такие, что абсциссы и ординаты всех четырёх вершин каждого ромба — целые числа из промежутка $[1; 45]$. Сколько существует таких ромбов? Напомним, что квадрат также является ромбом.
5. [5 баллов] Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющих уравнению

$$23 \cdot 2^x + 2025 = y^2.$$

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при каждом из которых для множества точек плоскости Oxy , задаваемых уравнением $x^2 + y^2 = a^2$, наибольшее значение выражения $y^2 - 4y - a$ равно 6.
7. [6 баллов] На сторонах AB и BC треугольника ABC выбраны точки M и N соответственно так, что $\angle MNB = \angle ANC = 70^\circ$. Найдите $\angle CAN$, если известно, что $BN \cdot MA = 2BM \cdot NC$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

w_1

$$(n-1)! + n! + (n+1)! = (n-1) \cdot (1+n+n \cdot (n+1))$$
$$- (n-2)! = (n-1) (n^2 + 2n + 1) \cdot (n-2)! =$$
$$(n+1)^2 (n-1)!$$

\Rightarrow при наименьшем

$$289 = 17^2 \Rightarrow$$

факторы будут множителями
числа 17 (это простое)

$$n = 16 \quad (n+1 = 17$$

простое)

Это наименьшее, т.к. далее для множителей $n-1, n-2 \dots$ будут числа

$n=18, n=19$ (чтобы эти множители делились на 17)

Ответ: $n=16$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~ 2

x - какое-то натуральное число,

$$x \geq 4$$

$$\frac{(x-3)^2 + (x-2)^2 + (x-1)^2 + x^2 + (x+1)^2 + (x+2)^2 + (x+3)^2}{-28} = n^5$$

сумма квадратов 7 повл. натуральных чисел

n - натуральное число, $n > 8$ (по условию)

$$7x^2 + (3^2 + 2^2 + 1^2) \cdot 2 - 28 = n^5$$

$$7x^2 + 14 \cdot 2 - 28 = n^5$$

$$7x^2 = n^5 \Rightarrow n : 7, \text{ при этом } n \neq 7$$

Предположим, что $n = 7^k$ (при $k > 8$)

$$x^2 = 7^{4k} \cdot 2 = 2^5 \cdot 7^4 \Rightarrow x - \text{не натуральное}$$

(если $x > 0$, то $x = 2^{2,5} \cdot 7^2$) не подходит

Аналогично предположим, что $n = 2^k$,

$$\text{тогда: } x^2 = 2^{4k} \cdot 3 = 3^5 \cdot 2^4 \Rightarrow x - \text{не натуральное} \Rightarrow \text{не подходит}$$

Аналогично предположим, что $n = 28$,

$$\text{тогда: } x^2 = 28^4 \cdot 4 = 4^5 \cdot 7^4 = 2^{10} \cdot 7^4 \Rightarrow x = 2^5 \cdot 7^2 (x > 0)$$

$$\Rightarrow n = 28 \text{ подходит. Ответ: } n = 28.$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

✓ 3 (начало)

$$|\sqrt{x^2-x-2}+5| \geq |\sqrt{x^2-x-2}+x-7| + |6-x|$$

$$x^2-x-2 \geq 0 \quad (\text{чтобы выражение имело смысл})$$

$$(x+1)(x-2) \geq 0$$

$$\begin{array}{c} \text{+} \quad \text{+} \\ \hline -7 \quad 2 \end{array} \rightarrow x$$

$$\sqrt{x^2-x-2} \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x^2-x-2}+5 \geq 5 \Rightarrow$$

$$\sqrt{x^2-x-2}+5 \geq |\sqrt{x^2-x-2}+x-7| + |6-x|$$

1) Рассмотрим при $x \geq 2$ и $x \leq 6$:

$$\sqrt{x^2-x-2}+5 \geq \underbrace{\sqrt{x^2-x-2}+x-7}_{\geq 1} + \underbrace{6-x}_{\geq 0}$$

$$5 \geq 5$$

Всегда верно \Rightarrow этот крайн. диапазон подходит

2) $x > 6$:

$$\sqrt{x^2-x-2}+5 \geq \sqrt{x^2-x-2}+x-7+x-6$$

$$5 \geq 2x-7$$

$$x \leq 6$$

\emptyset , т.к. мы рассм. на промежутке $(6; +\infty)$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~ 3 (урадогаметне)

3) $x \leq -7$:

Посмотрим, когда $\sqrt{x^2 - x - 2} + x - 7$
 ≥ 0 (на этом промежутке $(-\infty; -7]$)

$$\underbrace{\sqrt{x^2 - x - 2}}_{\geq 0} \geq \underbrace{-x + 7}_{> 0}$$

$-x + 7$ больше 0, т.к. x - отриц. $\Rightarrow -x$ - полож.

Тогда можно возвести обе части в квадрат

$$x^2 - x - 2 \geq (7 - x)^2$$

$$x^2 - x - 2 \geq x^2 - 2x + 7$$

$x \geq 3 \Rightarrow$ данное выражение меньше 0

всегда на промежутке $x \leq -7$. Тогда:

$$\sqrt{x^2 - x - 2} + 5 \geq -\sqrt{x^2 - x - 2} - x + 7 + 6 - x$$

$$\underbrace{2\sqrt{x^2 - x - 2}}_{\geq 0} \geq \underbrace{2 - 2x}_{> 0}$$

$2 - 2x > 0$, т.к. x - отриц. (на нашем промежутке) $\Rightarrow -x$ - полож. \Rightarrow можно возвести в квадрат

$$4 \cdot (x^2 - x - 2) \geq 2 \cdot (7 - x)^2$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

✓3 (урадалте мне)

$$9 \cdot (x^2 - x - 2) \geq 4 \cdot (x - 1)^2$$

$$x^2 - x - 2 \geq x^2 - 2x + 1$$

$$x \geq 3 \Rightarrow \emptyset \text{ (ведь мы на } (-\infty; -1])$$

Объединим все 3 пункта.

$$[2; 6] \text{ (из 1 пункта), в остальных } \emptyset$$

$$\text{Ответ: } [2; 6].$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

и 4 (начало)

Длина 5 по клеточкам:

$$25 = a^2 + b^2 \quad (a \text{ и } b \text{ целые по условию})$$

$\begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 5 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{matrix}$

\Rightarrow есть несколько видов ромбов.

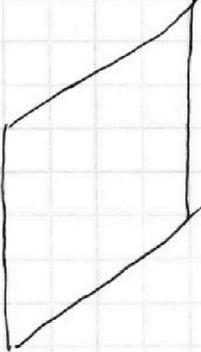
1) Вертикальные

$$44 - 5 + 1 = 40 \text{ ромбов}$$

квадратов по длине (и ширине тоже)

$$40 \cdot 40 = 1600$$

2)



По осям координат

~~$$44 - 5 + 1 = 40$$~~

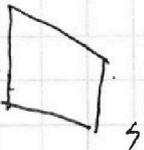
$$47$$

По вертикали: ~~44 - 3 -~~

$$5 + 1 = 37$$

$$37 \cdot 47$$

Аналогично можно её перевернуть.



~~Всего 2~~



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~ 4 (преобразование)

$$7600 + 4 \cdot (37 \cdot 47 + 36 \cdot 42) = 7600 +$$

$$4 \cdot (36 \cdot 47 + 47 + 36 \cdot 47 + 36) = 4 \cdot$$

$$(36 \cdot 47 \cdot 2 + 77) = 4 \cdot (2952 + 77) =$$

$$3029 \cdot 4 = 72776$$

Ответ: 72776.

$$\begin{array}{r} 47 \\ \times 36 \\ \hline + 246 \\ 723 \\ \hline 7476 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 5 (Начало)

$$23 \cdot 2^x + 2025 = y^2$$

$$23 \cdot 2^x + 45^2 = y^2$$

$$(y-45)/(y+45) = 23 \cdot 2^x$$

Во-первых, из этого следует, что $x \geq 0$ (Если $x < 0$, то будет дробь справа, а слева перемножение целых чисел \Rightarrow такого быть не может)

~~$(y-45)/(y+45) = 23 \cdot 2^x$~~
 $y-45$ и $y+45$ одинаковой четности.
 Если они оба нечетны, это возможно только при $x=0$:

$$(y-45)/(y+45) = 23$$

$$y-45=7 \Rightarrow y=46 \quad 46+45 \neq 23$$

$$23 \quad 7 \quad y-45=23 \Rightarrow y=68 \quad 68+45 \neq 7$$

$$-7 \quad -23 \quad y-45=-7 \Rightarrow y=44 \quad 44+45 \neq -23$$

$$-23 \quad -7 \quad y-45=-23 \Rightarrow y=22 \quad 22+45 \neq -7$$

Из этого ничего не получается.

\Rightarrow Они оба четны и $x \geq 1$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 5 (продолжение)

⇒ Одно из них это $23 \cdot 2^a$, другое 2^b , где $a+b=x$ и a, b тоже положительные числа также

например ~~$y-45$~~ $y-45$ будет равен $y+45$
другой.

$$\begin{cases} y-45 = 23 \cdot 2^a \\ y+45 = 2^b \end{cases}$$

$$y = 23 \cdot 2^a + 45$$

$$23 \cdot 2^a + 90 = 2^b$$

$$23 \cdot 2^a + 23 \cdot 4 - 2 = 2^b$$

23.

Аналогично:

$$\begin{cases} y+45 = 23 \cdot 2^a \\ y-45 = 2^b \end{cases}$$

$$y-45 = 2^b$$

$$23 \cdot 2^a - 90 = 2^b$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~ 6 (начало)

$$x^2 + y^2 = a^2 - \text{это окружность} \Rightarrow$$

~~y~~ принимает значения от $[-a; a]$

$$y^2 - 4y - a \leq 6, \text{ где } y \in [-a; a]$$

$$y^2 - 4y + 4 - 4 - a \leq 6$$

$$(y-2)^2 - a - 7 \leq 6$$

Левая часть принимает все наименьшее значение при $y = -a$.

И если при наименьшей неравенство выполняется то и для всех ост. знач. y выполняется (тогда правая часть $(y-2)^2 - a - 7$ будет еще меньше).

И если для наиб. y это не выполняется, то уже хотя бы для одного не выполняется $\Rightarrow a$ не подходит. \Rightarrow Необходимо и достаточно выполнение этого неравенства:

$$(-a-2)^2 - a - 7 \leq 0$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 + 3x - 6 = 0 \quad \text{и } 6 \text{ (формула дискриминанта)}$$

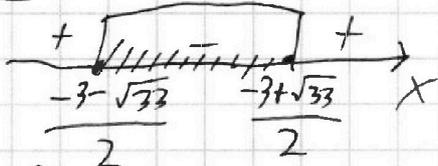
$$x^2 + 3x - 6 = 0$$

$$D = 9 + 6 \cdot 4 = 33 - \text{два корня}$$

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{33}}{2}$$

$$\left[\begin{array}{l} x_1 = \frac{-3 + \sqrt{33}}{2} \\ x_2 = \frac{-3 - \sqrt{33}}{2} \end{array} \right.$$

$$\left(x + \frac{3 + \sqrt{33}}{2} \right) \left(x + \frac{3 - \sqrt{33}}{2} \right) \leq 0$$



$$\text{Ответ: } x \in \left[\frac{-3 - \sqrt{33}}{2}; \frac{-3 + \sqrt{33}}{2} \right].$$

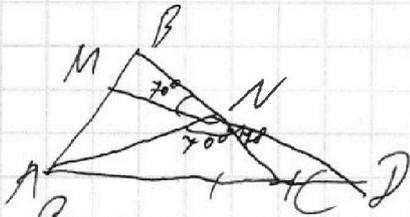


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Дано:

$$BN \cdot MA = 2 \cdot BM \cdot NC$$

$$\angle MNB = \angle ANC = 70^\circ$$

~ 7

① Это м. Меркатора

для $\triangle ABC$ и сек.

MD ($MN \cap AC \rightarrow D$):

$$\frac{BN}{NC} \cdot \frac{CD}{AD} \cdot \frac{AM}{MB} = 7$$

Это условие: $BN \cdot MA = 2 \cdot BM \cdot NC$

$$\Rightarrow \frac{BN}{NC} \cdot \frac{AM}{BM} = 2.$$

$$\Rightarrow 2 \cdot \frac{CD}{AD} = 7$$

$$AD = AC + CD$$

$$2 \cdot \frac{CD}{AC + CD} = 7$$

$$2CD = AC + CD$$

$$AC = CD \Rightarrow NC - \text{медiana}$$

② $\angle MNB = \angle CND$ (м.к. вертикаль-
 $= 70^\circ$ по е)

$\Rightarrow \angle ANC = \angle CND = 70^\circ \Rightarrow NC - \text{биссек-}$
 трисса тоже.

$NC - \text{медiana и биссектриса} \Rightarrow$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\triangle ANP$ - п. 10, осн. - $AP \Rightarrow$
 $\sphericalangle NAC = \sphericalangle NPA$

$$\textcircled{3} \sphericalangle NAC + \sphericalangle NPA + \sphericalangle ANP = 180^\circ$$

(м.к. ANP - равнобедренный)

$$\sphericalangle ANP = \sphericalangle NPA + \sphericalangle NAC = 140^\circ$$

$$2 \sphericalangle NAC + \sphericalangle ANP = 180^\circ$$

$$2 \sphericalangle NAC + 140^\circ = 180^\circ$$

$$\sphericalangle NAC = 20^\circ$$

Ответ: $\sphericalangle NAC = 20^\circ$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$289 = 17^2$

$17 \cdot 15 = 170 + 85 = 255$

$x = a + b$

$\sqrt{x^2 - x - 2} + 5 \geq$

$a \cdot (a+2)$

$25 = a^2 + b^2$

$5 = \sqrt{a^2 + b^2}$

$1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1) + 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n + 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n+1)$

$(n-1)(n + n \cdot (n+1)) \cdot (n-2)!$

$23 \cdot 2^a + 90 = 2^b$

$x^2 - x - 2 \geq 0$

$(x+1)(x-2) \geq 0$

$(n-1) \cdot (1 + n + n \cdot (n+1)) \cdot (n-2)!$

$(n-1)(1 + n \cdot (1 + n + 1)) \cdot (n-2)!$

$(n-1)(1 + n \cdot (2+n)) \cdot (n-2)!$

$(n-1)(n^2 + 2n + 1)(n-2)!$

$(n+1)^2$

$\sqrt{x^2 - x - 2} + 5 \geq$

$|\sqrt{x^2 - x - 2} + x - 7| + |1-x|$

$a \quad a+1 \quad a+2 \dots$

$a^2 + (a+1)^2 + (a+2)^2 + \dots + (a+n)^2$

$h = 16$

$23 \cdot 2^x + 2025 =$

$-28 = h^5$

$2 \leq x \leq 6: \quad x \geq 0$

$h > 8$

$5 \geq x - 7 + 1 - x$

$5 \geq 5$

$23 \cdot 2^x + 2024 = x^2 = 7$

$23 \cdot (2^x + 88) = y^2 = (7+4+9) \cdot 2 = 28$

$6 < x < +\infty:$

$5 \geq x - 7 + x - 6$

$7x^2 = h^5$

$72 \geq 2x$

$x \leq 6$

$23 \cdot (2^x + 88) = y^2 = 2x(x+1)$

$x \geq -\sqrt{x^2 - x - 2}$

$2\sqrt{x^2 - x - 2} + 5 \geq -2x + 5$

$-x \leq \sqrt{x^2 - x - 2}$