



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ



## 9 КЛАСС. Вариант 9

- [3 балла] При каком наименьшем натуральном  $n$  число  $n! + (n+1)! + (n+2)!$  делится на 361?
- [3 балла] Из суммы квадратов пяти последовательных натуральных чисел вычли число 10 и получили куб натурального числа  $N$ , большего 6. Найдите наименьшее возможное значение  $N$ .
- [4 балла] Решите неравенство

$$\left| \sqrt{x^2 - 2x - 3} + 6 \right| \geq \left| \sqrt{x^2 - 2x - 3} + 2x - 1 \right| + |7 - 2x|.$$

- [5 баллов] На координатной плоскости рассматриваются ромбы с длиной стороны 5 такие, что абсциссы и ординаты всех четырёх вершин каждого ромба — целые числа из промежутка  $[1; 50]$ . Сколько существует таких ромбов? Напомним, что квадрат также является ромбом.
- [5 баллов] Найдите все пары целых чисел  $(x; y)$ , удовлетворяющих уравнению
$$19 \cdot 2^x + 2025 = y^2.$$
- [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых для множества точек плоскости  $Oxy$ , задаваемых уравнением  $x^2 + y^2 = a^2$ , наибольшее значение выражения  $x^2 - 6x + a$  равно 8.
- [6 баллов] На сторонах  $AB$  и  $BC$  треугольника  $ABC$  выбраны точки  $M$  и  $N$  соответственно так, что  $\angle MNB = \angle ANC = 80^\circ$ . Найдите  $\angle CAN$ , если известно, что  $BN \cdot MA = 2BM \cdot NC$ .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$n! + (n+1)! + (n+2)! : 361 = 19^2$$

$$n! + n!(n+1) + \cancel{n!}(n+1)(n+2) : 19^2$$

$$n! (1 + (n+1) + (n+1)(n+2)) : 19^2$$

$$n! (n^2 + 3n + 2 + n + 2) : 19^2$$

$$n! (n^2 + 4n + 4) : 19^2$$

$$n! (n+2)^2 : 19^2$$

Заменим, что  $19$ -простое  $\Rightarrow 19^2$  делится только на  $1$  и  $19$ .

$\Rightarrow$  чтобы  $n!$  делится на  $19$ ,  $n$  должно быть  $\geq 19$ .

Но  $(n+2)^2$  может делиться на  $19^2$  при  $n = \cancel{18} 17$ , что неверно  $19$ .

Понятно, что всегда нужно сделать именно так, чтобы  $(n+2)^2$  было кратно  $19^2$ , но есть  ~~$n=18$~~   $n=19$  - минимальное

Ответ:  $n=19$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                            |                                       |                            |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input checked="" type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть  $x \in \mathbb{N}$  - первое число из пяти. Тогда:

$$x^2 + (x+1)^2 + (x+2)^2 + (x+3)^2 + (x+4)^2 - 10 = N^3, N > 6$$

$$x^2 + x^2 + 2x + 1 + x^2 + 4x + 4 + x^2 + 6x + 9 + x^2 + 8x + 16 - 10 = N^3$$

$$5x^2 + (2+4+6+8)x + (1+4+9+16) - 10 = N^3$$

$$5x^2 + 20x + 30 - 10 = N^3$$

$$5x^2 + 20x + 20 = N^3$$

$$\cancel{5} (x^2 + 4x + 4) = N^3$$

$$5(x+2)^2 = N^3$$

$$\Rightarrow N^3 : 5 \Rightarrow N : 15$$

Так как мы ищем наименьшее  $N$ , то рассмотрим  $N = 10; 15; 20$  ( $N=5$  не рассматривается, т.к.  $N > 6$  но условие)

Тогда:

$N$	10	15	20
$N^3$	$10 \cdot 10 \cdot 10$	$15 \cdot 15 \cdot 15$	$20 \cdot 20 \cdot 20$
	(1)	(2)	(3)

$$(1) \quad 5(x+2)^2 = 10 \cdot 10 \cdot 10$$

$$(x+2)^2 = 10 \cdot 10 \cdot 10 : 5$$

$$(x+2)^2 = 10 \cdot 10 \cdot 2 = 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 = 2^3 \cdot 5^2 - \text{не подходит}$$

$$(2) \quad 5(x+2)^2 = 15 \cdot 15 \cdot 15$$

$$(x+2)^2 = 15 \cdot 15 \cdot 15 : 5$$

$$(x+2)^2 = 15 \cdot 15 \cdot 3 = 3 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 3 = 3^3 \cdot 5^2 - \text{не подходит}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\textcircled{3} \quad 5(x+2)^2 = 20 \cdot 20 \cdot 20$$

$$(x+2)^2 = 20 \cdot 20 \cdot 20 / 5$$

$$(x+2)^2 \leq 20 \cdot 20 \cdot 4 = 8 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 4 = 5^2 \cdot 4^3 \leq 5^2 \cdot 2^6 =$$

$$= 5^2 \cdot (2^3)^2 = 5^2 \cdot 8^2 \leq (5 \cdot 8)^2 = 40^2 - \text{найдено}$$

$$\Rightarrow x+2 = 40 \Rightarrow x = 38$$

~~Задача~~Проверка:

$$38^2 + 39^2 + 40^2 + 41^2 + 42^2 - 10 \stackrel{?}{=} 20^3$$

~~$$(40-2)^2 + (40-1)^2 + 40^2 + (40+1)^2 + (40+2)^2 \stackrel{-10}{\cancel{\neq}} 20^3$$~~

$$40^2 - 160 + 4 + 40^2 - 80 + 1 + 40^2 + 40^2 + 80 + 1 + 40^2 + 160 + 4 \stackrel{-10}{\cancel{\neq}} 20^3$$

$$5 \cdot 40^2 + 8 \cdot 2 \stackrel{-10}{\cancel{\neq}} 20^3$$

$$5 \cdot 40^2 \stackrel{-10}{\cancel{\neq}} 20^3$$

$$5 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 5 \cdot 3 \stackrel{-10}{\cancel{\neq}} 20^3$$

$$5^3 \cdot 8^2 \stackrel{-10}{\cancel{\neq}} 20^3$$

~~$$5^2 \cdot (5^2 \cdot 2^5) \cdot 40^2 \stackrel{-10}{\cancel{\neq}} 20^3$$~~

~~$$5^3 \cdot 8^2 \stackrel{-10}{\cancel{\neq}} (5 \cdot 2^2)^3$$~~

~~$$5^3 \cdot 2^6 \stackrel{-10}{\cancel{\neq}} 5^3 \cdot 2^6$$~~

Ответ:  $N = 20$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи **отдельно**.

- |                            |                            |                                       |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$|\sqrt{x^2 - 2x - 3} + 6| \geq |\sqrt{x^2 - 2x - 3} + 2x - 1| + |2 - 2x|$$

Обз:  $x^2 - 2x - 3 \geq 0$   
 $(x+1)(x-3) \geq 0$



$$x \in (-\infty; -1] \cup [3; +\infty)$$

$$|\underbrace{\sqrt{x^2 - 2x - 3}}_{\geq 0} + 6| \geq \underbrace{\sqrt{x^2 - 2x - 3}}_{> 0} + 6$$

$$\Rightarrow 0$$

$$\sqrt{x^2 - 2x - 3} + 6 \geq |\underbrace{\sqrt{x^2 - 2x - 3} + 2x - 1}_{(1)}| + |2 - 2x|$$

Рассмотрим подмодулярное выражение (1) на промежутке  $x < -1$

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 - 2x - 3} + 2x - 1 &\leq 0 \\ \sqrt{x^2 - 2x - 3} &= -(2x - 1) \quad |^2 \\ x^2 - 2x - 3 &\leq 4x^2 - 4x + 1 \\ 3x^2 - 2x + 4 &\geq 0 \\ 3 &> 4 - 4 \cdot 3 \cdot 4 \geq 0 \\ 3x^2 - 2x + 4 &\text{ всегда } > 0 \\ -(2x - 1) &\leq \sqrt{x^2 - 2x - 3} \\ \sqrt{x^2 - 2x - 3} + 2x - 1 &\end{aligned}$$

Заменим, что подмодулярное выражение (1) неположительно  
 даваем при  $x < -1$  и неположительно даваем при  $x > 3$ :  
 чтобы это доказать, возьмем  $x_1 > x_2 > 3$  и  $x_3 < x_4 < -1$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                            |                            |                                       |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 3

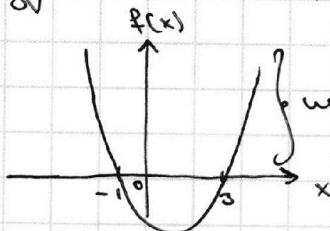
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$1) \sqrt{x_1^2 - 2x_1 - 3} + 2x_1 - 1 \geq \sqrt{x_2^2 - 2x_2 - 3} + 2x_2 - 1$$

$$\sqrt{x_1^2 - 2x_1 - 3} - \sqrt{x_2^2 - 2x_2 - 3} + 2(x_1 - x_2) - 1 \geq 0$$

$$> 0 \leq 0 \geq 0$$

Замечаем также, что функция  $x^2 - 2x - 3$  монотонно  
возрастает на  $x > 3$



инверсия и приведение

$$\Rightarrow \sqrt{x_1^2 - 2x_1 - 3} > \sqrt{x_2^2 - 2x_2 - 3}$$

$$\Rightarrow \sqrt{x_1^2 - 2x_1 - 3} - \sqrt{x_2^2 - 2x_2 - 3} > 0$$

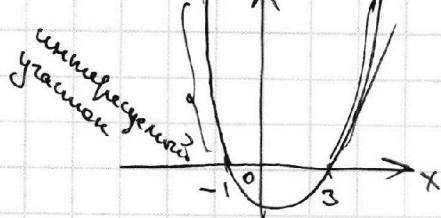
$\Rightarrow$  неравенство доказано

2) Аналогично:

$$\sqrt{x_3^2 - 2x_3 - 3} + 2x_3 - 1 \geq \sqrt{x_4^2 - 2x_4 - 3} + 2x_4 - 1$$

$$\sqrt{x_3^2 - 2x_3 - 3} - \sqrt{x_4^2 - 2x_4 - 3} + 2(x_3 - x_4) - 1 \geq 0$$

$$> 0 \leq 0 \geq 0$$



$\Rightarrow$  неравенство доказано



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- |                            |                            |                                       |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

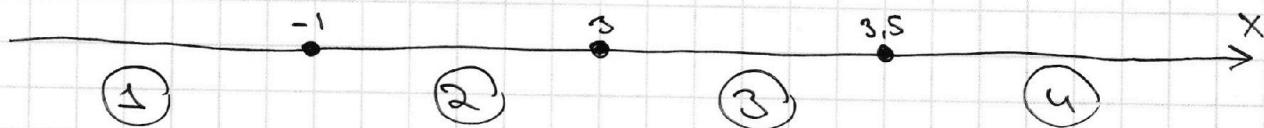
СТРАНИЦА  
3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2 - 2x - 3} + 2x - 1 \geq 0 \text{ при } x \geq 3 \\ \sqrt{x^2 - 2x - 3} + 2x - 1 \leq 0 \text{ при } x \leq -1 \end{cases}$$

Решение:

$$\begin{cases} 7 - 2x \geq 0 \text{ при } x \leq 3,5 \\ 7 - 2x \leq 0 \text{ при } x \geq 3,5 \end{cases}$$



①:  $\begin{aligned} & \sqrt{x^2 - 2x - 3} + 6 \geq -(\sqrt{x^2 - 2x - 3} + 2x - 1) + 7 - 2x \\ & \sqrt{x^2 - 2x - 3} + 6 \geq -\sqrt{x^2 - 2x - 3} - 2x + 1 + 7 - 2x \\ & 2\sqrt{x^2 - 2x - 3} \geq -4x + 8 - 6 \\ & \sqrt{x^2 - 2x - 3} \geq -2x + 1 \quad |^2 \\ & x^2 - 2x - 3 \geq 4x - 4x + 1 \\ & 3x^2 - 2x + 4 \leq 0 \\ & D = 2^2 - 4 \cdot 3 \cdot 4 < 0 \\ & \Rightarrow 3x^2 - 2x + 4 > 0 \\ & \Rightarrow \emptyset \end{aligned}$

②:  ~~$\sqrt{x^2 - 2x - 3} + 6 \geq 0$~~  не в ОВЗ

③:  $\begin{aligned} & \sqrt{x^2 - 2x - 3} + 6 \geq \sqrt{x^2 - 2x - 3} + 2x - 1 + 7 - 2x \\ & 6 \geq 6 \\ & \Rightarrow x - \text{множ.}, x \in [3; 3,5] \end{aligned}$

④:  $\begin{aligned} & \sqrt{x^2 - 2x - 3} + 6 \geq \sqrt{x^2 - 2x - 3} + 2x - 1 + 2x - 7 \\ & 6 \geq 4x - 8 \\ & 4x \leq 14 \\ & x \leq 3,5 \\ & \Rightarrow x = 3,5 \end{aligned}$

Ответ:  $x \in [3; 3,5]$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                                   | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА

1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$19 \cdot 2^x + 2025 = y^2$$

$$\begin{array}{r} 2025 \\ 405 \\ 81 \\ 3 \\ 1 \end{array} \left| \begin{array}{l} 5 \\ 8 \\ 9 \\ 9 \\ 1 \end{array} \right. \Rightarrow 2025 = 45^2$$

$$\begin{aligned} 19 \cdot 2^x &= y^2 - 45^2 \\ 19 \cdot 2^x &= (y - 45)(y + 45) \end{aligned}$$

Заменим, что числа  $y - 45$  и  $y + 45$  одинаковой четности  $\Rightarrow 2^x$  распределена на  $2^k$  и  ~~$2^{x-k}$~~ , где  $k \neq 0$ , т.к. оба этих числа

$$\begin{aligned} y - 45 &= 2^k \\ y + 45 &= 2^{x-k} \\ -90 &= 2^{x-k} - 2^k \\ 90 &= 2^k - 2^{x-k} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$  2 случая:

$$\begin{aligned} 1. \quad y - 45 &= 2^{k_1} \cdot 19 \\ y + 45 &= 2^{x-k_1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \quad y - 45 &= 2^{k_2} \\ y + 45 &= 2^{x-k_2} \cdot 19 \end{aligned}$$

$$1. \quad 90 = 2^{x-k_1} - 2^{k_1} \cdot 19$$

$$2. \quad 90 = 2^{x-k_2} \cdot 19 - 2^{k_2}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Найти 10 степеней двойки:

$$\begin{aligned}2^1 &= 2 \\2^2 &= 4 \\2^3 &= 8 \\2^4 &= 16 \\2^5 &= 32 \\2^6 &= 64 \\2^7 &= 128 \\2^8 &= \cancel{256} \\2^9 &= 512 \\2^{10} &= 1024\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cancel{-88} \\ \cancel{-86} \\ \cancel{-82} \\ \cancel{-254} \\ \cancel{-58} \\ \cancel{-26} \\ 38 \\ 166 \\ 422 \\ 934\end{aligned}$$

Ответ, № 19:

$$\begin{aligned}38 \\76 \\152 \\304 \\608 \\1216 \\2432 \\4864 \\9728 \\19456\end{aligned}$$

Ответ, № 19 и - 90

$$\begin{aligned}\cancel{-52} \\ \cancel{-14} \\ 62 \\ 214 \\ 518 \\ \cancel{1126} \\ 2342 \\ 47\cancel{74} \\ 9638 \\ 19366\end{aligned}$$

Ответ,  
№ - 90

Чтобы найти  $x$  и  $k_1$ , что  $x \in k_2$ , нужно искать совпадающие числа в двух столбцах в 1 и 4 столбцах соответственно

У первых 10 степеней 2 нашлось только одно совпадение:  $2^7 - 90 = 2 \cdot 19$ , т.е.  $90 = 2^7 - 2 \cdot 19$   
 $\Rightarrow x - k_1 = 7 ; k_1 = 1 \Rightarrow x = 8$

$$\begin{aligned}\Rightarrow y^2 &= 19 \cdot 2^9 + 2025 = 19 \cdot 512 + 2025 = 4864 + 2025 = \\&= 6889 = 83^2 \Rightarrow y = \cancel{83} \pm 83\end{aligned}$$

$$\Rightarrow (x, y) = \cancel{(8, 83)} (8, 83)$$

Ответ:  $(8, 83), (8, -83)$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

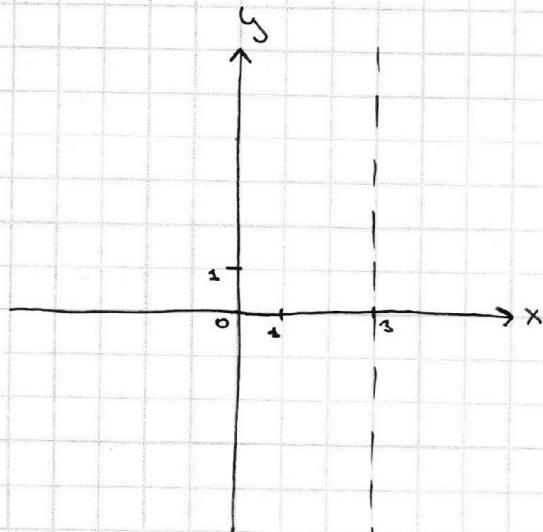
- |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                                   | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$x^2 + y^2 = a^2$  - уравнение окружности с центром  $(0, 0)$  и радиусом  $a$

$x^2 - 6x + a$  - парабола, вершина которой лежит на прямой  $x = -\frac{-6}{2} = 3$



У параболы с положительным коэффициентом при  $x^2$  не может быть наибольшего значения

Ответ: таких  $a$  не существует

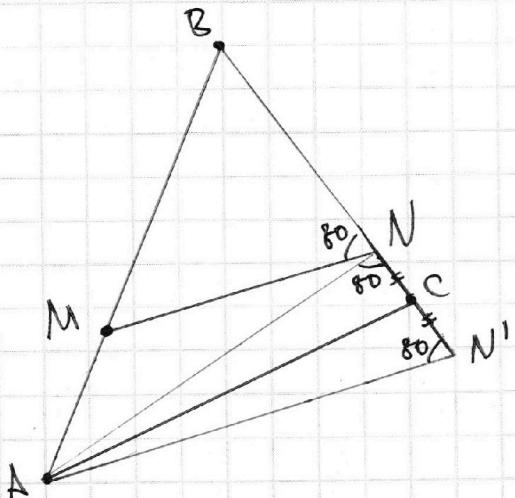


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                            |                            |                            |                            |                            |                            |                                       |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input checked="" type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{2BM}{MA} = \frac{BN}{NC}$$

$$\frac{BM}{MA} = \frac{1}{2} \cdot \frac{BN}{NC} = \frac{BN}{2NC}$$

$\Rightarrow$  умножим  $CN^*$  на  $2NC$   
~~и~~  $\Rightarrow$  умножим  $C -$  получим  
 $N'$ .

$$\frac{BM}{MA} = \frac{BN}{2NC} = \frac{BN}{NN'}$$

$\Rightarrow$  но из определения Фареса,  
 $MN \parallel AN'$

$$\Rightarrow \angle AN'C = \angle MNB = 80^\circ \text{ и } \angle N'AN = \angle ANM = \\ = (80^\circ - 80^\circ - 80^\circ) = 20^\circ$$

$$\Rightarrow \angle AN'C = \angle ANC \Rightarrow \triangle N'AN - \text{ктс}$$

$AC$  - медиана  $\Rightarrow AC$  - биссектриса

$$\Rightarrow \angle CAN = \frac{1}{2} \angle N'AN = \frac{1}{2} \cdot 20^\circ = 10^\circ$$

Ответ:  $\angle CAN = 10^\circ$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                                       |                                       |                                       |                                       |                                       |                                       |                                       |
|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|
| <input checked="" type="checkbox"/> 1 | <input checked="" type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input checked="" type="checkbox"/> 4 | <input checked="" type="checkbox"/> 5 | <input checked="" type="checkbox"/> 6 | <input checked="" type="checkbox"/> 7 |
|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{array}{r} 19 \\ \times 19 \\ \hline 19 \\ 19 \\ \hline 361 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 8 \\ 19 \\ \hline 19 \\ 19 \\ \hline 361 \end{array}$$

$$361 = 19^2$$

20

$$x^2 + (x+1)^2 + (x+2)^2 + (x+3)^2 + (x+4)^2 - 105 \\ \leq N^3$$

$$\begin{aligned} & x^2 + x^2 + 1 + 2x + x^2 + 4 + 4x + x^2 + 8 + 6x + x^2 + 16 + 8x - 105 \\ & \leq 5x^2 + 20x + 30 - 105 \\ & \leq 5x^2 + 20x + 20 \\ & \leq (x^2 + 4x + 4) 5 \\ & \leq (x+2)^2 \cdot 5 \leq N^3 \end{aligned}$$

$$n! + (n+1)! + (n+2)! : 19^2 \quad n! + n! (n+1) + n! (n+1)(n+2) : 19^2$$

$$N = 5, 10, 15, 20$$

$$N^3 = 125, 1000,$$

$$n! (1+n+1+(n+1)(n+2)) : 19^2$$

$$\begin{aligned} 1. n! &= 19^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2} \\ 2. n! &= 19^2 - \frac{1}{2} \\ 3. 1+n+1+n^2 &= 2n+2 \end{aligned}$$

$$1+1+1+(1+1)(1+2) = 2^2 + 2 \cdot 3 = 9$$

$$\sqrt{1+2+1+\frac{3 \cdot 4}{12}} = 16$$

$$\begin{aligned} & \frac{225}{5} \rightarrow \sqrt{x_1^2 - 2x_1 - 3} + 2x_1 - 1 \geq \sqrt{x_2^2 - 2x_2 - 3} + 2x_2 - 1 \\ & \frac{1125}{225} \rightarrow \sqrt{x_1^2 - 2x_1 - 3} - \sqrt{x_2^2 - 2x_2 - 3} + 2x_1 - 1 - 2x_2 + 1 \geq 0 \\ & \frac{3325}{225} \rightarrow \sum (x_1 - x_2) \geq 0 \end{aligned}$$

$$n! = 1$$

$$n =$$

$$\begin{aligned} & \frac{225}{2} \rightarrow \sqrt{x^2 - 2x - 3} + 6 \geq \sqrt{x^2 - 2x - 3} + 2x - 1 + |7 - 2x| \\ & \frac{1125}{225} \rightarrow 20 \cdot 20 \cdot 20 \leq 20 \cdot 20 \cdot 4 \\ & \frac{3325}{225} \rightarrow 20 \cdot 20 \cdot 4 \leq 5 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 4 \\ & 15 \cdot 18 \cdot 15 \leq 18 \cdot 18 \cdot 3 \\ & \leq 228 \end{aligned}$$

$$|\sqrt{x^2 - 2x - 3} + 6| \geq |\sqrt{x^2 - 2x - 3} + 2x - 1| + |7 - 2x|$$

$$x^2 - 2x - 3 \geq 0$$

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-2}{2} = 2 \\ y_1 &= 4 - 4 - 3 = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} = 3, -1 \\ & \frac{25}{25} = 5^2 \cdot 2^2 \cdot 2^2 \\ & \frac{125}{25} = 5^3 \cdot 2^3 \cdot 2^2 \\ & \frac{50}{25} = 2^2 \cdot 5^2 \cdot 2^2 \\ & \frac{25}{25} = 5^2 \cdot 2^2 \cdot 2^2 \\ & \frac{25}{25} = 5^2 \cdot 2^2 \cdot 2^2 \end{aligned}$$

$$(x+1)(x-3) \geq 0 \Rightarrow x^2 + x - 3x - 3 \leq x^2 - 2x - 3$$

$$\begin{array}{c} 4 \\ -1 \\ \hline 3 \end{array}$$

$$x \in (-\infty; -1] \cup [3; \infty)$$

$$7 - 2x \geq 0$$

$$2x \leq 7$$

$$x \leq 3,5$$

$$8^2 = 2^3 \cdot 2 \quad 2^3 \cdot 2^3 = 2^6$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи** отдельно.

 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$n! + (n+1)! + (n+2)! : 19^2$$

$$n! + n! \cdot (n+1) + n! \cdot (n+1)(n+2) : 19^2$$

$$n! (1 + n+1 + n^2 + 3n + 2) : 19^2$$

$$n! (n^2 + 4n + 4) : 19^2$$

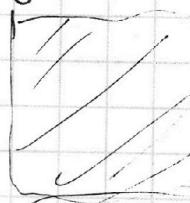
$$n! (n+2)^2 : 19^2$$

$\frac{1}{18} \cdot \frac{1}{17} \cdot \frac{1}{16} \cdots \frac{1}{1}$

$$\underline{n=18 - ?}$$

Deflt.

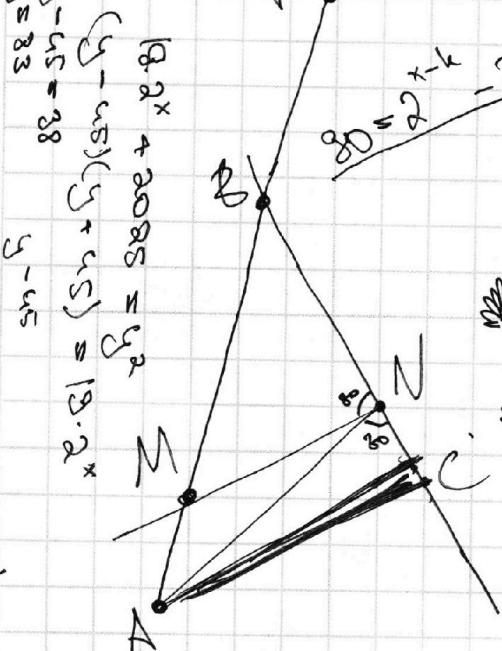
абсцисса - x  
ордината - y



$$18! \cdot (18)^2 = 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15 \cdots \cdot 1 \cdot 18 \cdot 18$$

$$n! \rightarrow (n+2)^2$$

19 - первое



2BM

B

M

N

P

Q

A

$$BN \cdot MA = 2BM \cdot NC$$

$$\Rightarrow \frac{BN}{NC} = \frac{2BM}{MA}$$

$$\frac{304}{304}$$

$$\frac{608}{608}$$

$$\frac{1216}{1216}$$

$$\frac{2432}{2432}$$

$$\frac{4864}{4864}$$

$$\frac{9728}{9728}$$

$$\frac{19456}{19456}$$

$$x^2 + y^2 = a^2$$

однотипность  
с центром  $(0;0)$   
и радиусом  $a$

$$x^2 - 6x + a$$

$$x_0 = -\frac{-6}{2} = 3$$

$$3728 \cdot 3728$$

$$3728 + 16 = 3888$$

$$88 + 16 = 114$$

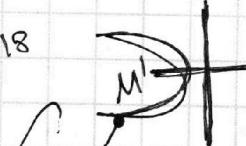
$$1148 = 19$$

$$\sqrt{4 \cdot 4 - 3^2} = \sqrt{11} \approx 3 - 4 - 15 - 3 - 8 = -2$$

$$8,5 + 13 \approx 18,5$$

$$48 - 14 - 35 = \frac{18}{45 - 12 - 32} \approx 5,5$$

$$85 - 10 - 3 = 25 - 8 = 17$$



$$BN \cdot MA = 2BM \cdot NC$$

$$\Rightarrow \frac{BN}{NC} = \frac{2BM}{MA}$$

$$\frac{304}{304}$$

$$\frac{608}{608}$$

$$\frac{1216}{1216}$$

$$\frac{2432}{2432}$$

$$\frac{4864}{4864}$$

$$\frac{9728}{9728}$$

$$\frac{19456}{19456}$$

$$\frac{128}{128}$$

$$\frac{256}{256}$$

$$\frac{512}{512}$$

$$\frac{1024}{1024}$$

$$\frac{2048}{2048}$$

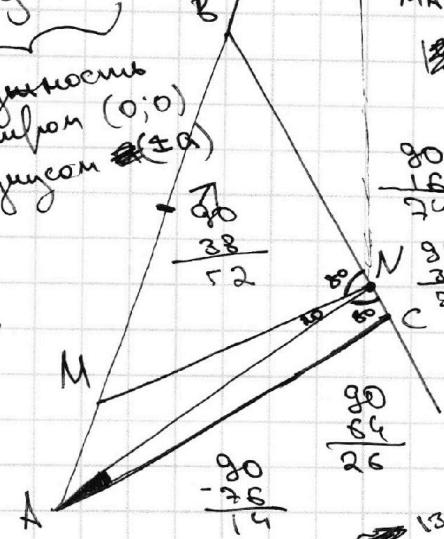
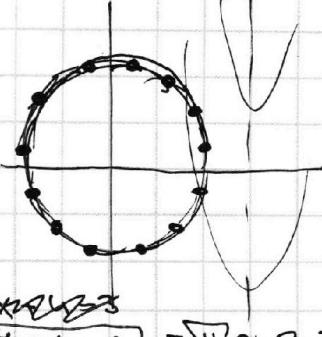
$$\frac{4096}{4096}$$

$$\frac{8192}{8192}$$

$$\frac{16384}{16384}$$

$$\frac{32768}{32768}$$

$$\frac{65536}{65536}$$



$$\frac{96}{96}$$

$$\frac{192}{192}$$

$$\frac{384}{384}$$

$$\frac{768}{768}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                                       |                                       |                                       |                                       |                                       |                                       |                                       |
|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|
| <input checked="" type="checkbox"/> 1 | <input checked="" type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input checked="" type="checkbox"/> 4 | <input checked="" type="checkbox"/> 5 | <input checked="" type="checkbox"/> 6 | <input checked="" type="checkbox"/> 7 |
|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|

СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} x^2 - 2x - 3 \geq 0 \\ (x+1)(x-3) \geq 0 \end{aligned}$$

$$x \in (-\infty; -1] \cup [3; +\infty)$$

$$\Rightarrow 2x \in (-\infty; -2] \cup [6; +\infty)$$

$$\sqrt{(x+1)(x-3)} \geq -(2x+1)^{1/2}$$

$$x^2 - 2x - 3 \geq 4(x+1)^2$$

$$0 \geq 3x^2 - 2x + 4$$

~~решение~~

решение

$$g(x) = 2^{k-k} - 19 \cdot 2^{k-1}$$

$$\boxed{k \neq 0}$$

$$2^{10}$$

$$7 - 2x > 0$$

$$2x < 7$$

$$x < 3,5$$

$$\sqrt{x^2 - 2x - 3} + 6 \geq \sqrt{x^2 - 2x - 3} + 2x - 1 + |7 - 2x|$$

$$\begin{cases} 6 \geq 2x - 1 + 7 - 2x \\ 6 \geq 2x - 1 + 2x - 7 \end{cases}$$

$$6 \geq 6$$

$$6 \geq 4x - 8$$

$$\begin{array}{ll} 50 - 45 - 4 & 2^0 = 1 \\ 50 + 45 - 4 & 2^1 = 2 \\ 55 & 2^2 = 4 \\ & 2^3 = 8 \\ & 2^4 = 16 \\ & 2^5 = 32 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 6 \leq 4x \\ 6 \leq 14 \\ x \leq 3,5 \end{array}$$

$$19 \cdot 2^x + (45)^2 = y^2$$

$$2^{10} = 1024$$

$$2^6 = 64$$

$$2^8 = 256$$

$$2^9 = 512$$

$$2^{11} = 2048$$

$$y - 45 = 19 \cdot 2^k$$

$$y + 45 = 2^{k+1}$$

$$2y = 2^{k+1} (19 + 2^{k-2})$$

$$y < 2^{k-1} (19 + 2^{k-2})$$

одинаковые  
значения

$$\frac{4864}{2025} = 6889$$

$$\begin{array}{r} 2025 \\ \times 40515 \\ \hline 2025 \\ 000 \\ 2025 \\ \hline 81 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2025 \\ \times 5 \\ \hline 10125 \\ 405 \\ \hline 52.92 \\ 25 \\ \hline 25 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 81 \\ 28 \\ \hline 405 \\ 162 \\ \hline 2025 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 256 \cdot 205 \\ = 5120 \\ 256 \\ \hline 4864 \\ 2025 \\ \hline 6889 \end{array}$$

$$2025$$

$$2$$

$$2$$

$$9$$

$$2$$

$$2$$

$$2$$

$$2$$

$$2$$

$$2$$

$$2$$

$$2$$

$$2$$

$$2$$

$$2$$

$$2$$

$$2$$

$$2$$

$$2$$

$$2$$

$$2$$

$$2$$

$$2$$

$$2$$

$$2$$

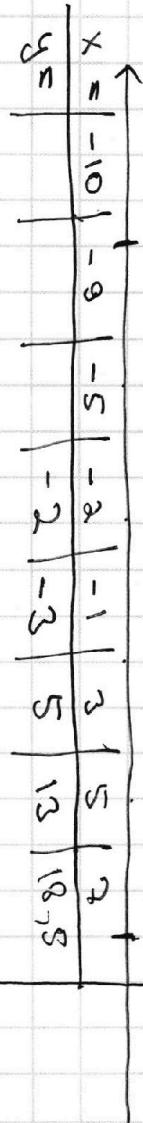
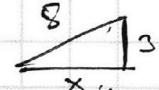
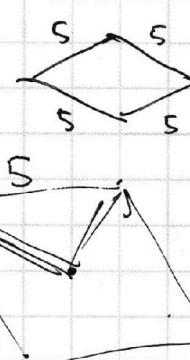


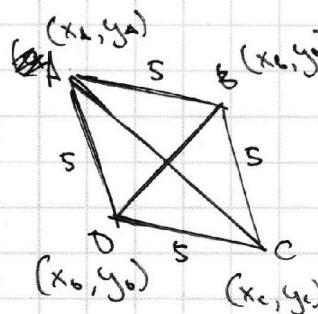
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- |                                       |                                       |                                       |                                       |                                       |                                       |                                       |
|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|
| <input checked="" type="checkbox"/> 1 | <input checked="" type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input checked="" type="checkbox"/> 4 | <input checked="" type="checkbox"/> 5 | <input checked="" type="checkbox"/> 6 | <input checked="" type="checkbox"/> 7 |
|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$\sqrt{x^2 - 2x - 3} \geq -(2x - 1)$    
 $x^2 - 2x - 3$   
 $2x \in (-\infty, -2] \cup [6, \infty)$   
 $2x - 1 \in (-\infty, -3] \cup [5, 4\infty)$   
 $\sqrt{x^2 - 2x - 3} \in [0, +\infty)$   
  
 $S = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $x, y, S$  — катеты  
  
  
 $(x_0 - x_A)^2 + (y_0 - y_A)^2 = (x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2$   
 $x_0^2 + x_A^2 - 2x_0x_A + y_0^2 + y_A^2 - 2y_0y_A =$   
 $= x_A^2 + x_B^2 - 2x_Ax_B + y_A^2 + y_B^2 - 2y_Ay_B$   
 $x_0^2 - 2x_0x_A + y_0^2 - 2y_0y_A =$   
 $= x_B^2 - 2x_Ax_B + y_B^2 - 2y_Ay_B$   
 $x_0^2 - x_B^2 - 2x_0x_A + 2x_Ax_B =$   
 $= y_B^2 - y_0^2 - 2y_Ay_B + 2y_Ay_B$   
 $(x_0 - x_B)(x_0 + x_B) - 2x_A(x_0 - x_B) =$   
 $= (y_B - y_0)(y_B + y_0) - 2y_A(y_B - y_0)$   
 $(x_0 - x_B)(x_0 + x_B - 2x_A) =$   
 $= (y_B - y_0)(y_B + y_0 - 2y_A)$

  
 $\sqrt{(x_0 - x_A)^2 + (y_0 - y_A)^2} = 5$   
 $\sqrt{(x_1 - x_A)^2 + (y_1 - y_A)^2}$   
 $\sqrt{(x_2 - x_A)^2 + (y_2 - y_A)^2}$   
 $\sqrt{(x_3 - x_A)^2 + (y_3 - y_A)^2}$

$\frac{AM}{MM'} \cdot \frac{BN}{NC} \leq 1$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



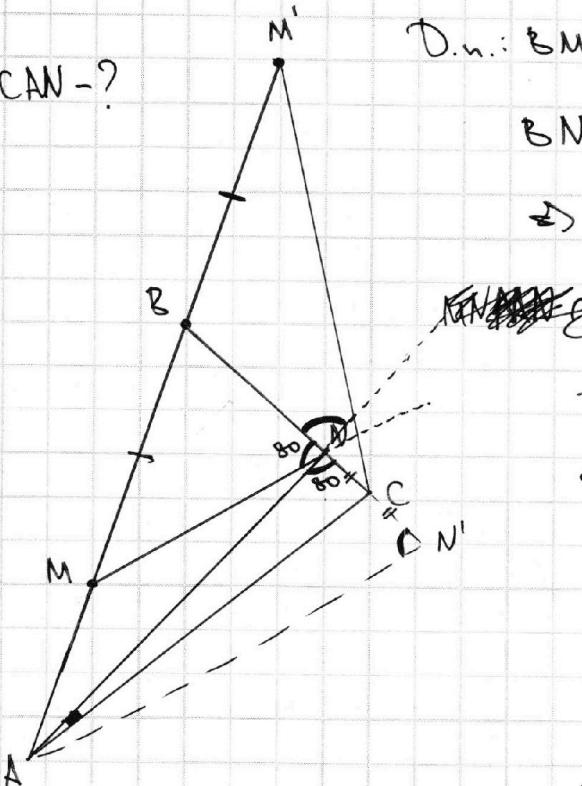
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                                       |                                       |                                       |                                       |                                       |                                       |                                       |
|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|
| <input checked="" type="checkbox"/> 1 | <input checked="" type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input checked="" type="checkbox"/> 4 | <input checked="" type="checkbox"/> 5 | <input checked="" type="checkbox"/> 6 | <input checked="" type="checkbox"/> 7 |
|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|

СТРАНИЦА  
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

∠CAN - ?



$$\text{D.n.: } BM' = BM; MM' = 2BM$$

$$BN \cdot MA = 2BM \cdot NC$$

$$\Rightarrow \frac{2BM}{MA} = \frac{BN}{NC} \Rightarrow \frac{M'M}{MA} = \frac{BN}{NC}$$

~~KANNAKA CAN~~

$$\frac{BM}{MA} = \frac{1}{2} \frac{BN}{NC} = \frac{BN}{NC}$$

$$\Rightarrow N' \in (NC), NN' = 2NC$$

$$\Rightarrow \frac{BM}{MA} = \frac{BN}{NN'}$$

⇒ по теореме Фалеса,  
 $MN \parallel AN'$

$$\Rightarrow \angle NAN' = \cancel{\angle MNA} = \\ = 180 - 80 - 80 = 20$$

$$\angle NN'A = 180 - 80 - 20 = 80$$

$$\Rightarrow \cancel{\triangle N'AN} - \sqrt{5}$$

⇒ AC - медиана и биссектриса

$$\Rightarrow \angle CAN = \frac{1}{2} \angle N'AN = \frac{1}{2} \cdot 20 = 10^\circ$$

Черновик!!!