



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 10



- [3 балла] При каком наименьшем натуральным n число $(n - 1)! + n! + (n + 1)!$ делится на 289?
- [3 балла] Из суммы квадратов семи последовательных натуральных чисел вычли число 28 и получили пятую степень натурального числа N , большего 8. Найдите наименьшее возможное значение N .
- [4 балла] Решите неравенство
$$\left| \sqrt{x^2 - x - 2} + 5 \right| \geq \left| \sqrt{x^2 - x - 2} + x - 1 \right| + |6 - x|.$$

4. [5 баллов] На координатной плоскости рассматриваются ромбы с длиной стороны 5 такие, что абсциссы и ординаты всех четырёх вершин каждого ромба — целые числа из промежутка $[1; 45]$. Сколько существует таких ромбов? Напомним, что квадрат также является ромбом.

5. [5 баллов] Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющих уравнению

$$23 \cdot 2^x + 2025 = y^2.$$

- [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при каждом из которых для множества точек плоскости Oxy , задаваемых уравнением $x^2 + y^2 = a^2$, наибольшее значение выражения $y^2 - 4y - a$ равно 6.
- [6 баллов] На сторонах AB и BC треугольника ABC выбраны точки M и N соответственно так, что $\angle MNB = \angle ANC = 70^\circ$. Найдите $\angle CAN$, если известно, что $BN \cdot MA = 2BM \cdot NC$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$(n-1)! + n! + (n+1)! = (n-1)! \cdot (n+1+n\text{чср}) = (n-1)! \cdot (n+1)^2$. Заметим что для $n=16$.
 $(n-1)! \cdot (n+1)^2 = (15! \cdot 289) : 289$. При $n < 16$ $(n-1)! \nmid 17$ и $(n+1)^2 \nmid 17$, значит: $n \geq 16$.

Ответ: $n = 16$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть первое число равно a , второе - $(a+1)$ и т.д.

$$a^2 + (a+1)^2 + \dots + (a+6)^2 = 7a^2 + 2a(1+2+\dots+6) + 1+4+9+16+25+36 = 7a^2 + 42a + 91$$

$$\text{Затем в числа 28: } 7a^2 + 42a + 91 - 28 = 7a^2 + 42a + 63 = 7(a+3)^2$$

$7(a+3)^2 = N^5$ Пусть число 7 входит в степень α в число

$(a+3)^a$ в степени β в число N . Тогда степень вхождения 7 в левой части равна $(2\alpha+1)$, а в правой 5β .

$$2\alpha+1=5\beta \quad \text{Тогда } N \vdots 7 \text{ и } N \vdots 7.$$

Можно проверить, что не существует a и γ . $7(a+3)^2 = N^5$ для

~~$N=14, N=21$~~ . Такие заметили, что $N=28$ подходит и $a=49 \cdot 32 \cdot 3$. При $N=7$: $(a+3)^2 = 7^4 \cdot 8$, при $N=14$: $(a+3)^2 = 7^4 \cdot 2^5$.

При $N=14$: $(a+3)^2 = 7^4 \cdot 2^5$ - невозможно.

При $N=21$: $(a+3)^2 = 7^4 \cdot 3^5$ - невозможно.

При $N=28$: $(a+3)^2 = 7^4 \cdot 2^{10}$, а $a = 7^2 \cdot 2^5 - 3 = 49 \cdot 32 - 3$.

Ответ: $N=28$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$|\sqrt{x^2 - x - 2} + 5| \geq |\sqrt{x^2 - x - 2} + x - 1| + |6 - x|$$

$$a = \sqrt{x^2 - x - 2} + 5$$

$$b = \sqrt{x^2 - x - 2} + x - 1$$

Тогда имеем след. неравенство:

$$|a| \geq |b| + |a - b|$$

$$|a - b| \geq |a - b|$$

$$\overbrace{ab \geq 0}^{a \geq 0, b \geq 0}$$

$$(\sqrt{x^2 - x - 2} + 5)(\sqrt{x^2 - x - 2} + x - 1) \geq 0$$

$\sqrt{x^2 - x - 2} + 5 \geq 0$ - верно для любых допустимых x .

$$\sqrt{x^2 - x - 2} + x - 1 \geq 0$$

$$\sqrt{x^2 - x - 2} \geq 1 - x$$

$$1 - x \leq 0$$

$$x^2 - x - 2 \geq 1 - 2x + x^2$$

$$x \geq 1$$

$$x \geq 3$$

$$x \geq 1$$

Значит любое допустимое x является решением неравенства.

Ответ: $x \in (-\infty; -1] \cup [2; +\infty)$.

$$ODZ: x^2 - x - 2 \geq 0$$

$$x_1 = -1 \quad \text{- корни}$$

$$x_2 = 2$$

Старший коэффициент положительный

значит: $x \in (-\infty; -1] \cup [2; +\infty)$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

Получить отрезок длины 5 с концами в точках с целочисленными координатами можно 2-мя способами. Можно получить как отрезок параллельный линии симметрии как гипотенузу Евклидского треугольника.

I случай: рамб является квадратом. Он однозначно задаётся своей левой нижней вершиной. Для неё форму:

$x_0 \in [1; 40]$, $y_0 \in [1; 40]$, укажем как-во вариантов её расположения $40 \cdot 40 = 1600$.

II случай: Этот случай подразделяется ещё на 2, но они симметричны. Рассмотрим один из них (горизонтальная диагональ - 4, а вертикальная - 3): Этот рамб задаётся тонкой

пересечения диагоналей, для неё: $x_0 \in [5; 41]$, а $y_0 \in [4; 42]$ как-во вариантов - $\frac{37 \cdot 39}{2} = 1793$. Второй подслучае симметричен этому и в нём тоже 1793 варианта. Всего таких рамбов:

$$1600 + 1368 + 1368 = 4336 \quad 1600 + 1793 + 1793 = 4186$$

Ответ: ~~4336~~, 4186.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если $x=0$: $y^2 = 2048$ - невозможно при $y \in \mathbb{Z}$
Если $x \geq 1$: $(23 \cdot 2^x + 2025) \div 2$, значит $y^2 \div 2$ а $y \div 2$.
При $x=1$: $y^2 = 2068$ - невозможно при $y \in \mathbb{Z}$
При $x=2$: $y^2 = 2117 \Rightarrow y = \pm 47$ 2117 - невозможно при $y \in \mathbb{Z}$.
При $x=3$: $y^2 = 2209 \Rightarrow y = \pm 47$.
При $x < 0$ левая часть не целая, а правая целая, т.е. $x \geq 0$.

Ответ: $(3; 47); (3; -47)$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

График $x^2 + y^2 = a^2$ представляет из себя окружность для которой $y \in [-|a|; |a|]$. Докажем, что $y^2 - 4y - a$ принимает наибольшее значение при $y = -|a|$. Предположим противное, что $\exists y_0$ т.ч.

$$y_0^2 - 4y_0 - a > |a|^2 + 4|a| - a$$

$$(y_0 - |a|)(y_0 + |a|) > 4(y_0 + |a|)$$

$$(y_0 + |a|)(y_0 - 4 - |a|) > 0.$$

$|y_0| < |a|$, значит $|a| + y_0 > 0$ и $y_0 - |a| < 0$ т.е.

$$(y_0 + |a|)(y_0 - 4 - |a|) < 0. \quad \text{--- противоречие.}$$

II вар: $|a|^2 + 4|a| - a = 6$

I ~~Дискриминант~~ $a > 0$:

$$a^2 + 3a - 6 = 0$$

$$\Delta = 9 + 24 = 33$$

$$\begin{cases} a = \frac{-3 + \sqrt{33}}{2} \\ a = \frac{-3 - \sqrt{33}}{2} \end{cases}$$

$$a = \frac{\sqrt{33} + 3}{2}.$$

II $a < 0$:

$$a^2 - 5a - 6 = 0$$

$$\begin{cases} a = -1 \\ a = 6 \end{cases}$$

$$a = -1.$$

Ответ: $-1; \frac{\sqrt{33} + 3}{2}$.

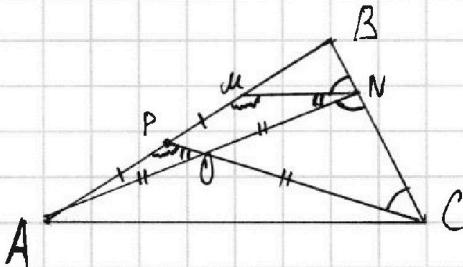


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Отметим Р-середину АМ и проведём РС. Используем:

$$BN \cdot MA = 2BM \cdot NC$$

$$\frac{BN}{NC} = \frac{BM}{\frac{1}{2}MA}$$

$$\frac{BN}{NC} = \frac{BM}{PM}$$

Значит по теореме обратной теореме Гаусса $MN \parallel PC$.

Из параллельности следует, что: $\angle AMN = \angle APC$, $\angle ANM = \angle AOP$
 $\angle O = \angle ANC$. Итогда $\angle MAN =$

$$O = \angle ANC \cap PC.$$

По теореме Гаусса, т.к. $MN \parallel PO$: $\frac{AP}{PM} = \frac{AO}{ON} ; \frac{AO}{ON} = 1$.
 $AO = ON$.

Из этого можно $MN \parallel PC$ следет, что $\angle MNB = \angle PCN$
 $\angle PCN = \angle MNB = 70^\circ = \angle CNO$, значит: $\triangle CON$ -равнобедренный и $CO = ON$.

$\triangle ACN$ медиана CO равна $\frac{1}{2}AN$, значит: $\angle C = 90^\circ$ и
 $\angle CAN = 180^\circ - \angle C - \angle ANC = 180^\circ - 90^\circ - 70^\circ = 20^\circ$.

Ответ: $\angle CAN = 20^\circ$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач numеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned}
 & 4(-1) = -4 \xrightarrow{x^2} \\
 & \boxed{1} -2^x \\
 & -1, -2, -4, -8, -4, -8, -4, \dots \\
 & \begin{array}{r} 11, 10, 8, 4, 8, 4, 8, \dots \\ \cancel{9}, \cancel{5}, \dots \\ 5, \cancel{3}, \dots \\ 1 \end{array} \\
 & \frac{47}{42} \\
 & \frac{329}{118} \\
 & \frac{220}{9} \\
 & \boxed{[1; 40]} \quad 1600 \\
 & [4; 42] \\
 & [5; 41] \\
 & 25(2^{x+8}) = y^2 \xrightarrow{x^2} \\
 & y^2 \equiv 5 \pmod{12} \quad \left[\begin{array}{l} y \equiv 3 \pmod{12} \\ y \equiv 9 \pmod{12} \end{array} \right] \quad 2016 \\
 & \begin{array}{r} 1 \ 1 \\ 2 \ 4 \\ 3 \ 9 \\ 4 \ 4 \\ 5 \ \cancel{1} \\ 6 \ 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} 2025 \ 12 \\ -168 \\ \hline 82 \\ -72 \\ \hline 105 \\ -96 \\ \hline 9 \end{array} \quad 8, 7, 5, 1, 5, \dots \\
 & y^2 \equiv 5 \pmod{12} \\
 & y^2 \equiv 1 \pmod{12} \quad (y-45)(y+45) \\
 & \begin{array}{r} 39 \cdot 37 \\ \times 39 \\ \hline 37 \\ 117 \\ \hline 1443 \end{array} \quad \begin{array}{r} 2025 \ 32 \\ -192 \\ \hline 105 \\ -96 \\ \hline 9 \end{array} \\
 & 92 + 2025 + 273 \\
 & 2117 \quad \begin{array}{r} 1 \ 1 \ 7 \\ \hline 1 \ 4 \ 9 \ 3 \\ \hline 2 \\ +2 \ 5 \ 8 \ 6 \\ \hline 4 \ 1 \ 8 \ 6 \end{array} \\
 & \boxed{7, 9, 8, 16, 7, 14, 3, 6, 12, 24, 1, 3, 21, 17}
 \end{aligned}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$|a| \geq |b| + |a-b|$$

$$(n-1)! (n+1+n(n+1)) = (n-1)! (n+1)^2$$

$$289 = 17^2$$

$$\frac{x}{17} \\ \frac{119}{119} \\ \frac{119}{289}$$

$$|a|-|b| \geq |a-b|$$

$$16! (16+17+18) = 16! \cdot 17 \cdot 19$$

$$15! (16+17+18+19) =$$

$A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$, $C(x_C; y_C)$, $D(x_D; y_D)$

$$\begin{cases} a \leq 6 \\ b \leq 0 \\ a \geq 0 \\ b \geq 0 \end{cases} \quad (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 = 25$$

$$2048 \\ 2^n$$

$$23 \cdot 2^x + 2025 = y^2$$

$$151 - 121 \geq 15 - 21$$

$$1 - 51 - 121 \geq 1 - 5 - 21$$

$$5 - 7$$

$$151 - 1 - 21 \geq 15 + 21$$

$$3 - 7$$

$$x \in (-\infty; -1] \\ x \in [2; +\infty)$$

$$7a^2 + 2a(1+...+6) + 1+4+9+16+25+36$$

$$7a^2 + 42a + 91$$

$$7a^2 + 42a + 63 = N^5$$

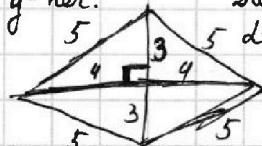
$$23 \cdot 2^x = 48240(y-45)(y+45)$$

$$7(a^2 + 6a + 9) \\ 7(a+3)^2 = N^5$$

$$n > 2$$

$$y - \text{некр.}$$

$$5 - 2^{n+1} \\ 5 \quad | \quad 5$$



$$2d+1:5 \\ d=7 \\ 7^2 = 49$$

$$ab = 20$$

$$y^2 - 4y - a = 28 = \frac{-b}{2a} = \frac{4}{2} = 2$$

$$y^2 - 4y - a = 28 = \frac{-b}{2a} = \frac{4}{2} = 2$$

$$a^2 - 5a - 6 = 6$$

$$y^2 - 4y - a = 28 = \frac{-b}{2a} = \frac{4}{2} = 2$$

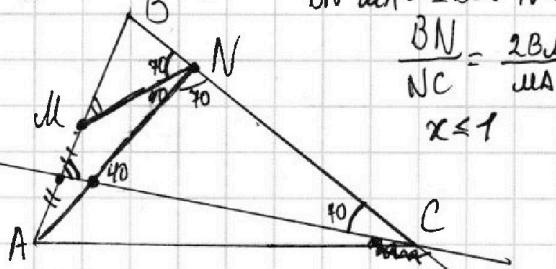
$$40^2 \text{ квадратов}$$

$$[4, 41]$$

$$38 \cdot 39 \cdot 2 + 40^2$$

$$ab \geq 0$$

$$38 \cdot 39 \cdot 2 + 40^2$$



$$\sqrt{x^2 - x - 2} = 1 - x$$

$$x^2 - x - 2 = 1 - 2x + x^2$$

$$x = 3$$

$$7, 14, 21$$

$$\begin{array}{r} \times 64 \\ \times 23 \\ \hline 192 \\ 128 \\ + 1472 \\ \hline 3497 \end{array}$$

$$(\sqrt{x^2 - x - 2} + 5)(\sqrt{x^2 - x - 2} + x - 1) > 0$$

$$> 0$$

$$38 \cdot 39 \cdot 2 + 40^2$$

