МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 10

1. [3 балла] При каком наименьшем натуральным n число $(n-1)! + n! + (n+1)!$ делится на 289?

2. [3 балла] Из суммы квадратов семи последовательных натуральных чисел вычли число 28 и получили пятую степень натурального числа N, большего 8. Найдите наименьшее возможное значение N.

3. [4 балла] Решите неравенство

$$\left|\sqrt{x^2-x-2}+5\right| \geqslant \left|\sqrt{x^2-x-2}+x-1\right| + |6-x|.$$

4. [5 баллов] На координатной плоскости рассматриваются ромбы с длиной стороны 5 такие, что абсциссы и ординаты всех четырёх вершин каждого ромба — целые числа из промежутка $[1; 45]$. Сколько существует таких ромбов? Напомним, что квадрат также является ромбом.

5. [5 баллов] Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющих уравнению

$$23 \cdot 2^x + 2025 = y^2.$$

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, при каждом из которых для множества точек плоскости Oxy, задаваемых уравнением $x^2+y^2=a^2$, наибольшее значение выражения y^2-4y-a равно 6.

7. [6 баллов] На сторонах AB и BC треугольника ABC выбраны точки M и N соответственно так, что $\angle MNB = \angle ANC = 70^\circ$. Найдите $\angle CAN$, если известно, что $BN \cdot MA = 2BM \cdot NC$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$(n-1)! + n! + (n+1)! = (n-1)! \cdot (n+1+n(n+1)) = (n-1)! \cdot (n+1)^2$. Заметим что для $n=16$.
$(n-1)! \cdot (n+1)^2 = (15! \cdot 289) \vdots 289$. При $n<16$ $(n-1)! \not\vdots 17$ и $(n+1)^2 \not\vdots 17$, значит: $n \geq 16$.

Ответ: $n=16$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Пусть первое число равно a, второе - $(a+1)$ и т.д.

$a^2+(a+1)^2+\ldots+(a+6)^2 = 7a^2+2a(1+\ldots+6)+1+4+9+16+25+36 = 7a^2+42a+91$

Затем вычли 28: $7a^2+42a+91-28 = 7a^2+42a+63 = 7(a+3)^2$

$7(a+3)^2 = N^5$ ~~Пусть число 7 входит в степени α в число $(a+3)$ и в степени β в число N. Тогда степень вхождения 7 в левой части равна $(2\alpha+1)$, а в правой 5β.~~

~~$2\alpha+1=5\beta$.~~ Тогда $N^5 \vdots 7$ и $N \vdots 7$.

Можно проверить, что не существует a т.ч. $7(a+3)^2 = N^5$ для $N=14$, $N=21$. Также заметим, что $N=28$ подходит и $a = 49\cdot 32-3$. ~~При $N=7$: $(a+3)^2 = 7^4$, при $N=14$: $(a+3)^2 =$~~

При $N=14$: $(a+3)^2 = 7^4\cdot 2^5$ - невозможно.

При $N=21$: $(a+3)^2 = 7^4\cdot 3^5$ - невозможно.

При $N=28$: $(a+3)^2 = 7^4\cdot 2^{10}$, и $a = 7^2\cdot 2^5-3 = 49\cdot 32-3$.

Ответ: $N=28$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$|\sqrt{x^2-x-2}+5| \geq |\sqrt{x^2-x-2}+x-1| + |6-x|$

ОДЗ: $x^2-x-2 \geq 0$

$x_1=-1$, $x_2=2$ — корни

Старший коэффициент положительный

Значит: $x \in (-\infty; -1] \cup [2; +\infty)$.

$a = \sqrt{x^2-x-2}+5$

$b = \sqrt{x^2-x-2}+x-1$

Тогда имеем след. ~~ур~~ неравенство:

$|a| \geq |b| + |a-b|$

$|a| - |b| \geq |a-b|$

$\Updownarrow$

$ab \geq 0$

$(\sqrt{x^2-x-2}+5)(\sqrt{x^2-x-2}+x-1) \geq 0$

$\sqrt{x^2-x-2}+5>0$ - верно для любых допустимых x.

$\sqrt{x^2-x-2}+x-1 \geq 0$

$\sqrt{x^2-x-2} \geq 1-x$

$\left[\begin{array}{l} 1-x \leq 0 \\ x^2-x-2 \geq 1-2x+x^2 \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} x \geq 1 \\ x \geq 3 \end{array}\right.$

$x \geq 1$

Значит любое допустимое x является решением неравенства.

Ответ: $x \in (-\infty; -1] \cup [2; +\infty)$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Получить отрезок длины 5 с концами в точках с целочисленными координатами можно 2мя способами. Можно получить как отрезок параллельный линиям сетки или как гипотенузу Египетского треугольника.

I случай: ромб является квадратом. Он однозначно задаётся своей левой нижней вершиной. Для неё верно: $x_0 \in [1;40]$ и $y_0 \in [1;40]$, значит кол-во вариантов её расположения $40 \cdot 40 = 1600$.

II случай: Этот случай подразделяется ещё на 2, но они симметричны. Рассмотрим один из них (горизонтальная диагональ - 4, а вертикальная - 3): этот ромб задается точкой пересечения диагоналей, для неё: $x_0 \in [5; \cancel{40}\ 41]$, а $y_0 \in [4; 42]$ кол-во вариантов - $\cancel{36 \cdot 38 = 1368}$ $37 \cdot 39 = 1793$. Второй подслучай симметричен этому и в нём тоже $\cancel{1368}$ 1793 вариантов. Всего таких ромбов: $\cancel{1600 + 1368 + 1368 = 4336}$ $1600 + 1793 + 1793 = 4186$

Ответ: $\cancel{4336}$ 4186.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Если $x=0$: $y^2=2048$ - невозможно при $y\in\mathbb{Z}$

Если $x\geq 1$: $(23\cdot 2^x+2025)\vdots 2$, значит $y^2\vdots 2$ и $y\vdots 2$.

При $x=1$: $y^2=2068$ - невозможно при $y\in\mathbb{Z}$

При $x=2$: $y^2=$ ~~2107 ⇒ y = ±47~~ 2117 - невозможно при $y\in\mathbb{Z}$.

При $x=3$: $y^2=2209 \Rightarrow y=\pm 47$.

При $x<0$ левая часть не целая, а правая целая, т.е. $x\geq 0$.

Ответ: $(3;47)$; $(3;-47)$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

График $x^2+y^2=a^2$ представляет из себя окружность для которой $y \in [-|a|; |a|]$. Докажем, что y^2-4y-a принимает наибольшее значение при $y=-|a|$. Предположим противное, что $\exists y_0$ т.ч.

$$y_0^2-4y_0-a > |a|^2+4|a|-a$$

$$(y_0-|a|)(y_0+|a|) > 4(y_0+|a|)$$

$$(y_0+|a|)(y_0-4-|a|) > 0.$$

$|y_0|<|a|$, значит $|a|+y_0>0$ и $y_0-|a|<0$ т.е. $y_0-|a|-4<0$.

$(y_0+|a|)(y_0-4-|a|)<0$. – противоречие.

Тогда: $|a|^2+4|a|-a=6$

I ~~Для~~ $a>0$:

$$a^2+3a-6=0$$

$$D=9+24=33$$

$$\left[\begin{array}{l} a=\frac{-3+\sqrt{33}}{2} \\ a=\frac{-\sqrt{33}-3}{2}. \end{array}\right.$$

$$a=\frac{\sqrt{33}+3}{2}.$$

II $a<0$:

$$a^2-5a-6=0$$

$$\left[\begin{array}{l} a=-1 \\ a=6 \end{array}\right.$$

$$a=-1.$$

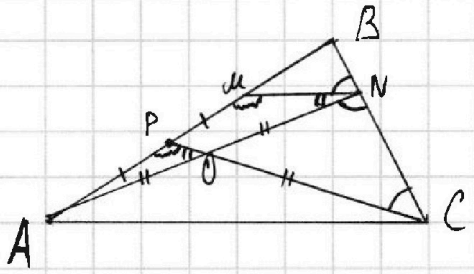
Ответ: $-1; \frac{\sqrt{33}+3}{2}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



Отметим P - середину AM и проведём PC. По условию:

$BN \cdot MA = 2BM \cdot NC$

$\frac{BN}{NC} = \frac{BM}{\frac{1}{2}MA}$

$\frac{BN}{NC} = \frac{BM}{PM}$

Значит по теореме обратной теореме Фалеса $MN \parallel PC$.

~~Из параллельности следует, что: $\angle AMN = \angle APC$, $\angle ANM = \angle AOP$ где $O = AN \cap PC$. Тогда $\triangle MAN \sim$~~

$O = AN \cap PC$.

По теореме Фалеса, т.к. $MN \parallel PO$: $\frac{AP}{PM} = \frac{AO}{ON}$; $\frac{AO}{ON} = 1$.

$AO = ON$.

Также из того, что ~~$\angle MNB$~~ $MN \parallel PC$ следует, что $\angle MNB = \angle PCN$

$\angle PCN = \angle MNB = 70^\circ = \angle CNO$, значит: $\triangle CON$ - равнобедренный и $CO = ON$.

В $\triangle ACN$ медиана CO равна $\frac{1}{2}AN$, значит: $\angle C = 90^\circ$ и

$\angle CAN = 180^\circ - \angle C - \angle ANC = 180^\circ - 90^\circ - 70^\circ = 20^\circ$.

Ответ: $\angle CAN = 20^\circ$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$\cancel{4\cdot(-1)=-4\ 2^x}$

-2^x

$-1, -2, -4, -8, -4, -8, -4 \ldots$

$11, 10, 8, 4, 8, 4, 8, \ldots$

$\cancel{9, 5, \ldots}$

$5, \cancel{3}$

1

47×47

329

188

2209

$y^2 \equiv 5 \pmod{12}$

1	1
2	4
3	9
4	4
5	1
6	0

$y^2 \equiv 1 \pmod{12}$

$\left[\begin{array}{l} y \equiv 3 \pmod{12} \\ y \equiv 9 \pmod{12} \end{array}\right.$

$2025 : 12 = 168$

-12

82

-72

105

-96

9

2016

9

$+9$

$8, 7, 5, 1, 5, \ldots$

$y^2 \equiv 5 \pmod{12}$

$(y-45)(y+85)$

$2025 : 32 = 63$

-192

105

-96

9

$[1;40]$ 1600

$39 \cdot 37$

39×37

273

117

1473×2

2586

1600

4186

$92 + 2025$

2117

$[4;42]$

$[5;41]$

$25(2^x+81) = y^2 - 2^{x+1}$

$\cancel{1, 2, 4, 8, 16, 7, 14, 3, 6, 12, 24, 23, 21, 17}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$|a| \geq |b| + |a-b|$

$|a| - |b| \geq |a-b|$

$(n-1)!\,(n+1+n(n+1)) = (n-1)!\,(n+1)^2$

$\left[\begin{array}{l} n \geq 16 \\ n \geq 18 \end{array}\right.$

$16!\,(16+16\cdot 18) = 16!\cdot 17\cdot 19$

$\cancel{15!\,(16+16\cdot 17)=}$

$289 = 17^2$

$\begin{array}{r} \times 17 \\ 17 \\ \hline 119 \\ +17 \\ \hline 289 \end{array}$

$23\cdot 2^x + 2025 = y^2$

$|5| - |2| \geq |5-2|$

$|-5| - |2| \geq |-5-2|$

5 7

$|-5| - |-2| \geq |-5+2|$

3 3

$|5| - |-2| \geq |5+2|$

3 7

$A(x_A; y_A),\ B(x_B; y_B),\ C(x_C; y_C),\ D(x_D; y_D)$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a \leq 0 \\ b \leq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} a \geq 0 \\ b \geq 0 \end{cases} \checkmark \end{array}\right.$

$(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 = 25$

2048

2^{11}

$\begin{cases} \sqrt{x^2-x-2} + 5 \geq 0 \\ \sqrt{x^2-x-2} + x - 1 \geq 0 \end{cases}$

$x^2 - x - 2 \geq 0$

$\left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 2 \end{array}\right.$

$x \in (-\infty; -1]$

$x \in [2; +\infty)$

$7a^2 + 2a(1+\ldots+6) + 1+4+9+16+25+36$

$7a^2 + 42a + 91$

$7a^2 + 42a + 63 = N^5$

1

4

4

$(a+3)^2 = p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\ldots$

$p^{\alpha} \in N$

$p^{5\alpha} \in 7(a+3)^2$

$2\alpha \vdots 5$

$\cancel{N = 4}$

$23\cdot 2^x = (y-45)(y+45)$

$7(a^2+6a+9)$

$7(a+3)^2 = N^5$

$x \geq 2$

y - нат.

$2\alpha + 1 \vdots 5$

$\alpha = 7$

7^{15} 7^7

$a = 29$

$N = 7^3$

$\begin{array}{r} 2025 \\ -184 \\ \hline 185 \\ -184 \\ \hline 1 \end{array}$ $\begin{array}{r|l} 23 & \\ \hline 188 & \end{array}$

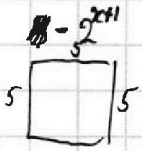
$y^2 - 1 \equiv 0 \pmod{23}$

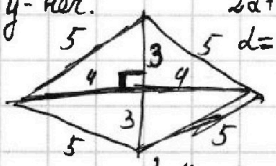
$(y-1)(y+1) \vdots 23$

$y \equiv 1 \pmod{23}$

$y \equiv -1 \pmod{23}$

2^{x+1}





$ab = 20$

$x^2 + y^2 = a^2$

$y^2 - 4y - a$

$x_B = \frac{-b}{2a} = \frac{4}{2} = 2$

$f(2) = 4 - 8 - a = -4 - a = 6$

$a_1 = -10$

$\begin{array}{r} 2736 \\ +1600 \\ \hline 4336 \end{array}$

$y = x + a$

$y = -a$

$y^2 - 4y - a = 6$

$a^2 - 5a - 6 = 6$

40^2 квадратов.

$[4; 41]$

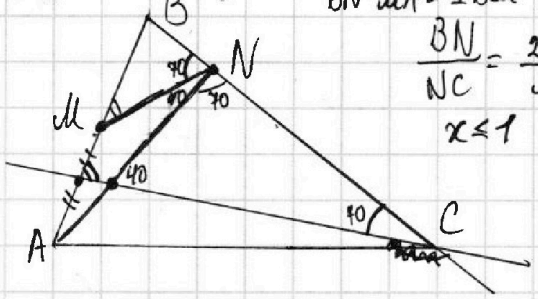
$BN \cdot MA = 2BM \cdot NC$

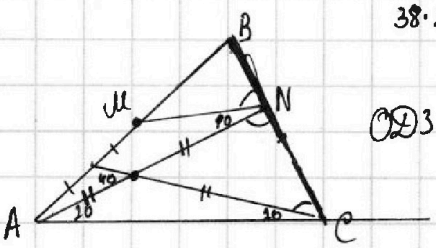
$\frac{BN}{NC} = \frac{2BM}{MA}$

$x \leq 1$

$38\cdot 39\cdot 2 + 40^2$

$ab \geq 0$





ОДЗ:

$\sqrt{x^2-x-2} = 1 - x$

$x^2 - x - 2 = 1 - 2x + x^2$

$x = 3$

$\underbrace{\left(\sqrt{x^2-x-2} + 5\right)}_{>0}\underbrace{\left(\sqrt{x^2-x-2} + x - 1\right)}_{>0} \geq 0$

7, 14, 21

$\begin{array}{r} \times 64 \\ 23 \\ \hline 192 \\ +128 \\ \hline +1472 \\ 2025 \\ \hline 3497 \end{array}$

$\begin{array}{r} \times 36 \\ 38 \\ \hline +288 \\ 108 \\ \hline 1368 \end{array}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$(y-2)^2 - a - 4 = 6$ $\quad a+10 \geq 0$

$(y-2)^2 \leq 10 + a$

$a \geq (y-2)^2 - 10$

$23 \cdot 2^x + 2025 = y^2$

$x = 3$

$y^2 + 2^{x+1} \vdots 25$

$y(y-4) = a+6$

$y^2 \equiv 1 \pmod{23}$

$y = 46k \pm 1$

$1, 2, 4, 8, 16, 7, 14, 3, 6, 12, 24, 23$

$1, 2, 4, 1, \ldots \pmod 7$

$y = -|a|$

$-|a|(-|a|-4) = a+6$

$a^2 + 4|a| = a + 6$

Если $a < 0$:

$a^2 - 5a - 6 = 0$

$\left[\begin{array}{l} a = -1 \\ a = 6 \end{array}\right.$

$x \geq 4$:

$23 \cdot 16k$

Если $a > 0$:

$a^2 + 3a + 6 = 0$

$D < 0$

ИЛ:

$92 + 2025 = 2117$

$184 + 2025 = 2209$

$45 \equiv 13$

$23 \cdot 93$

736

$a^2 + 4|a| - a < y^2 - 4y - a$

$(y^2 - |a|)(y + |a|) \geq 4(y + |a|)$

$(y + |a|)(y - |a| - 4) > 0$

$y^2 - 1 \vdots$ четным $\pmod 7$

$|y| < |a|$

$2050 - 2^{x+1} \equiv y^2$

$1, 2, 4, 8, 6, 2, 4, 8, 6, \ldots$

$x = 8$

$2209 = 47^2$

$x \geq 4$

2^{x+2}

$1, 2, 4, 8, 7, 6, 3, 6$

mod 1024

$23 \cdot 2^x - 23$

$23 \cdot (2^x - 1)$

$1, 2, 4, 1, \ldots$

$2^{11} + (2^x - 1) \cdot 23$

$23 \cdot 16 \cdot 2^{x} + 2025 = y^2$

$1, 2, 4, 8, 1, \ldots$

$2^{11} - 23 + 23 \cdot 2^x = y^2$