



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 9



1. [3 балла] При каком наименьшем натуральном n число $n! + (n+1)! + (n+2)!$ делится на 361?
2. [3 балла] Из суммы квадратов пяти последовательных натуральных чисел вычли число 10 и получили куб натурального числа N , большего 6. Найдите наименьшее возможное значение N .
3. [4 балла] Решите неравенство

$$\left| \sqrt{x^2 - 2x - 3} + 6 \right| \geq \left| \sqrt{x^2 - 2x - 3} + 2x - 1 \right| + |7 - 2x|.$$

4. [5 баллов] На координатной плоскости рассматриваются ромбы с длиной стороны 5 такие, что абсциссы и ординаты всех четырёх вершин каждого ромба — целые числа из промежутка $[1; 50]$. Сколько существует таких ромбов? Напомним, что квадрат также является ромбом.
5. [5 баллов] Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющих уравнению

$$19 \cdot 2^x + 2025 = y^2.$$

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при каждом из которых для множества точек плоскости Oxy , задаваемых уравнением $x^2 + y^2 = a^2$, наибольшее значение выражения $x^2 - 6x + a$ равно 8.
7. [6 баллов] На сторонах AB и BC треугольника ABC выбраны точки M и N соответственно так, что $\angle MNB = \angle ANC = 80^\circ$. Найдите $\angle CAN$, если известно, что $BN \cdot MA = 2BM \cdot NC$.



На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1
☒

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$n! + (n+1)! + (n+2)! = n! \cdot (1 + n+1 + (n+1)(n+2)) =$$
$$= n! \cdot (n+2)^2$$

$$361 = 19^2 \quad \text{и } 19 \text{ простое} \Rightarrow$$

если $n < 17$ то $n!$ не кратно 19 и $(n+2)^2$, то же,

$$\text{и при } n=17 \quad \underline{17! \cdot (17+2)^2 = 17! \cdot 19^2 : 361} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ Ответ: 17.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть эти 5 послед чисел это $x-2; x-1; x; x+1; x+2$

сумма их квадратов это $(x-2)^2 + (x-1)^2 + x^2 + (x+1)^2 + (x+2)^2 = 5x^2 + 10$ и сумма их квадратов -10 это $5x^2$

и мы знаем по усл что $5x^2 = N^3$, где $N > 6$, $x > 0$

$5x^2 = N^3 \Rightarrow N:5$ (т.к простое и делит левую часть) $\Rightarrow N = 5 \cdot N_1$

$$5x^2 = 5^3 N_1^3$$

$x^2 = 5^2 N_1^3 \Rightarrow x:5$ т.к простое и делит прав часть $\Rightarrow x = 5 \cdot x_1$

$$5^2 \cdot x_1^2 = 5^2 N_1^3$$

$$x_1^2 = N_1^3$$

и т.к $N > 6$ и $N_1 = \frac{N}{5} \Rightarrow$

и еще $N_1 > 1$ и $x_1 \geq 1$

если $N_1 = 2$, то $x_1^2 = 2^3$ и т.к x_1 - натурел это невозн

если $N_1 = 3$, то $x_1^2 = 3^3$ и т.к x_1 - натурел это невозн.

если $N_1 = 4$, то $x_1^2 = 4^3 \Rightarrow x_1 = 2^3 \Rightarrow$

минимальное возможное $N > 6$ это $N = 5 \cdot N_1 = 5 \cdot 4 = 20$

Ответ: 20



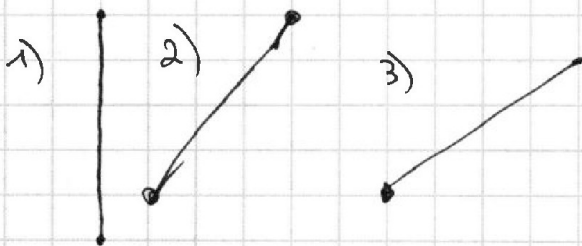
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

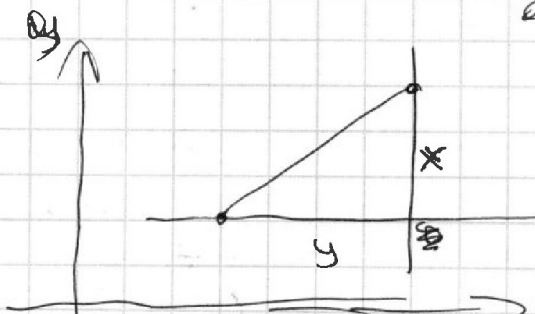
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Заметим что ребро глицей может располагаться на плоскости ~~только~~ с вершинами (краями) в узлах сетки только вот так:



с точностью до поворота на 90° и параллельно перекосу.

это очевидно так если мы построим прямоугольный Δ с этим ребром как гипотенузой так что катеты x и y будут перпендикулярны осям координат (или x и y).



то есть один катет x , другой y , то $x^2 + y^2 = 5^2$ по теореме Пифагора и еще $x \geq 0$ и $y \geq 0 \Rightarrow$

значит y может быть только 3 вида: 0, 3, 4

$\Rightarrow$ если $x=0$, то $y=5$
 $x=1$, то $y^2 = 24$ x

с ребром 5 ($x=2$, то $y^2 = 21$ x)

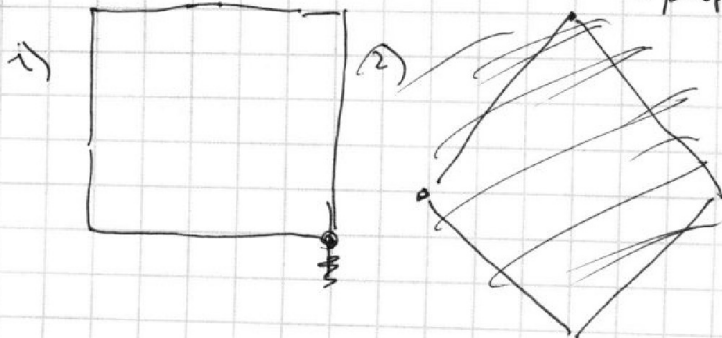
$x=3$; $y=4$

$x=4$; $y=3$

$x=5$; $y=0$

при $x > 5$, $x^2 + y^2 > 25$
 $\Rightarrow 5^2 + y^2 = 25$

$\Rightarrow$ невозможны





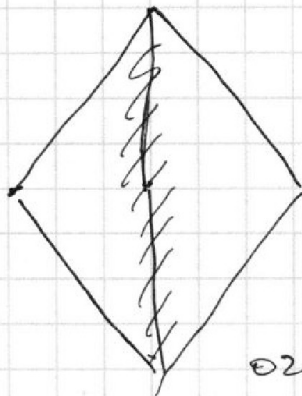
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

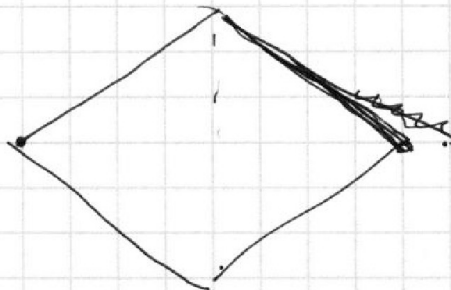
СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

2)



3)



Означим это фигура 2 и 3 отсюда
можно так по квадратам для
разрезания, а они отрезаются
поворотом на 90° и параллель
переносом.

Заметим, что квадрат задает (то есть 1 фигура)
нижней правой точкой, ну и она может

быть во всех узлах где $x \leq 45$ и $y \leq 45$

$\Rightarrow$ во всех от 1 до 45 $x \in [1; 45]$ и $y \in [1; 45]$

$\Rightarrow$ их всего $45 \cdot 45 = 2025$

рядов 2 ряда ~~будет~~ координаты левой нижней

вершины 2-го ряда аналогично задается

и x и y этой координаты $x \in [1; 47]$ и $y \in [1; 42]$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ их всего $(47 - 43 + 1) \cdot 42 = 1848$ и (3 ряда

слева x $\Rightarrow$ всего возможных точек

$2025 + 1848 \cdot 2 = 2025 + 3696 = 5721$ ~~ответ: 5721~~

Ответ: 5721



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 1 ИЗ 23

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$19 \cdot 2^x + 2025 = y^2$$

$$19 \cdot 2^x = y^2 - 2025$$

$$19 \cdot 2^x = (y - 45)(y + 45)$$

$$\text{Пусть } y - 45 : 19 \Rightarrow$$

Пусть y поделить на 19 ~~тогда~~ $y = 19k + 45$ ~~тогда~~ $k \in \mathbb{Z}$

$$19 \cdot 2^x = 19(19k + 90)$$

$$2^x = k(19k + 90) \Rightarrow k = 2^z$$

$$2^x = 2^z(19 \cdot 2^z + 90)$$

$$2^{x-z} = 19 \cdot 2^z + 90$$

Пусть $x - z = t$

$$2^t = 19 \cdot 2^z + 90$$

$$2^z(2^t - 19) = 90$$

~~если $z = 2$ то~~

$\Rightarrow z = 1$ или $z = 0$
 если $z = 0$ то

если $z = 1$

$$2^t = 19 \cdot 2 + 90$$

$$2^t = 128$$

$$t = 7$$

$$x = t + z = 7 + 1 = 8$$

$$k = 2^z \Rightarrow k = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = 19k + 45 = 38 + 45 = 83$$

~~если $z = 1$ то y не подходит~~
 аналогично y не подходит ~~тогда~~



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

если не

$$y + 45 = 19,70$$

$$y = 19k - 45 \quad k \geq 0$$

$$19 \cdot 2^x = 19k (19k - 90)$$

$$2^x = k (19k - 90) \Rightarrow k = 2^z$$

$$2^{x-z} = 19 \cdot 2^z - 90 \quad \text{мы имеем } x - z = t$$

$$2^t = 19 \cdot 2^z - 90$$

$$90 = 19 \cdot 2^z - 2^t$$

если

$$z = 2$$

$$90 = 19 \cdot 4 - 2^t$$

$$t = 4$$

$$x = z + t$$

$$x = 6$$

$$k = 2^z = 4$$

$$y = 19 \cdot 4 - 45 = 40 + 36 - 45 = 31$$

если $z = 0$

$$\Rightarrow z = 1 \text{ или } z = 0$$

если $z = 0$

$$90 = 19 - 2^{-t}$$

$$\Rightarrow t = 0$$

не верно

если $z = 1$

$$45 = 19 - 2^{1-t}$$

$$26 = 2^{1-t}$$

$$26 = 2^{1-t}$$

то не возможно

$$90 = 19 - 2^{t-1}$$

то не возможно

$$90 = 2(19 - 2^{t-1})$$

$$45 = 19 - 2^{t-1}$$

то не возможно

если $t \leq z$

$$90 = 2^t (19 \cdot 2^{z-t} - 1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = 1 \text{ или } t = 0$$

если $t = 0$

$$90 = 19 \cdot 2^z - 1$$

это не возможно

если $t = 1$

$$90 = 2^1 (19 \cdot 2^{z-1} - 1)$$

$$45 = 19 \cdot 2^{z-1} - 1$$

$$46 = 19 \cdot 2^{z-1}$$

это не возможно

если $t \geq z$

$$90 = 19 \cdot 2^z (19 - 2^{t-z}) \Rightarrow$$

$$\text{Ответ: } (x; z) = (8; 83); (8; -83); (6; 31); (6; -31);$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

СТРАНИЦА
3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$g_0 = 19 \cdot 2^z - 2^t$$

если $z \leq t$

$$g_0 = \cancel{19} 2^z (19 - 2^{t-z})$$

~~809~~ $z=1$ и $z=0$

если $z=0$

$$g_0 = 1 (19 - 2^{t-2})$$

$g_0 = 19 - 2^{t-2}$ невозможно
если $z=1$

~~90~~ $z=1$

$$45 = 19 - 2^{t-1}$$

если $z \geq t$

$$g_0 = \cancel{19} 2^t (19 \cdot 2^{z-t} - 1)$$

$t=1$ и $t=0$

$t=0$:

$$g_0 = 19 \cdot 2^z - 1$$

невозможно

$t=1$:

$$g_0 = 2(19 \cdot 2^{z-1} - 1)$$

$$45 = 19 \cdot 2^{z-1} - 1$$

невозможно



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено болсе одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~Заметим что $x^2 + y^2$~~

Заметим что $x^2 + y^2 = a^2$ это окружность с центром в $(0; 0)$ и радиусом $|a|$ так же $x^2 - 6x + a$ $\Rightarrow x \in [-|a|; |a|]$

Тогда $x^2 - 6x + a$ будет максимумом при $x = -|a|$ т.к. парабола $x^2 - 6x$ это парабола которая возрастает от $-\infty$ до ∞ удовлетворяет от $-\infty$ до 0 и $x \in [-\infty; 0]$ и $x \in [-|a|; |a|]$

и при значении $x \geq 0$ $x^2 - 6x + a \leq$ тем $(-x)^2 - 6(-x) + a$ и т.к. $x \in [-|a|; |a|]$ и $x \in [0; |a|]$ от удовлетворяет $x \in [0; |a|]$ то $\max$ значения $x^2 - 6x + a$ будет в $[-|a|; |a|]$ $\Rightarrow$ тем значение будет $a^2 + 6|a| + a$

$a^2 + 6|a| + a$ (1) если $a \geq 0$, то $a^2 + 6a + a = 8 \Rightarrow$

(2) если $a < 0$, то $a^2 + 6(-a) + a = 8$ пусть $b = |a| \Rightarrow a^2 + 7a = 8 \Rightarrow a^2 + 7a - 8 = 0 \Rightarrow$

$b^2 + 5b + 8 = 0$
 $b_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 32}}{2} = \frac{-5 \pm \sqrt{57}}{2}$
 $a = \frac{-5 + \sqrt{57}}{2} > 0,5 \Rightarrow$ не подходит.
 $a = \frac{-5 - \sqrt{57}}{2} < 0,5 \Rightarrow$ подходит a при $a = \frac{-5 - \sqrt{57}}{2}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

①

$$a = -8$$

$$a = 1, \text{ но } a \geq 0 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow$$

~~или~~

~~или~~ ~~похоже~~ $a = 1$ и $a = \frac{5 + \sqrt{57}}{2}$
Ответ: $a = 1$ или $a = \frac{5 + \sqrt{57}}{2}$

②

$$b^2 + 5b - 8 = 0$$

$$b_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 32}}{2} = \frac{-5 \pm \sqrt{57}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{т.к. } b > 0 \text{ то}$$

$$b = \frac{-5 + \sqrt{57}}{2} \text{ и др}$$

$$> 0 \text{ т.к. } \frac{\sqrt{57}}{2} > \frac{5}{2} = 2,5$$

$$\Rightarrow a = 2,5 - \frac{\sqrt{57}}{2}$$

Ответ: $a = 1$ или $a = 2,5 - \frac{\sqrt{57}}{2}$



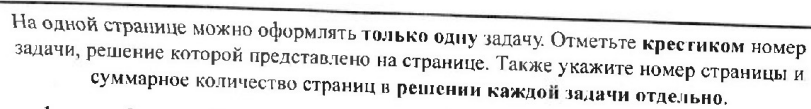
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$BN \cdot MA = 2BM \cdot NC \Rightarrow$
 $\Rightarrow \frac{BN}{BM} = 2 \frac{NC}{MA} \Rightarrow$
 $\Rightarrow$ Пусть N' — такая точка, что $NN' \perp BC$
 $NN' = 2NC \Rightarrow$
 $\Rightarrow \frac{BN}{BM} = \frac{NN'}{MA} \Rightarrow$
 $\Rightarrow$ по теор. Фалеса
 $\Delta BMN \sim \Delta BAN'$
 $\Rightarrow \angle AN'N = \angle BNM = 80^\circ$
 $\angle AN'N = 80^\circ$ тоже по усл $\Rightarrow$
 $\Rightarrow \Delta ANN'$ — р/с $\Delta \Rightarrow$ ч (середина стороны NN') $\Rightarrow \angle AN'N = 90^\circ \Rightarrow$
 $\Rightarrow \angle NAC = 80^\circ - \angle AN'N - \angle AN'N = 180^\circ - 80^\circ - 80^\circ = 10^\circ$
 Ответ: 10° .



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

[illegible]



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

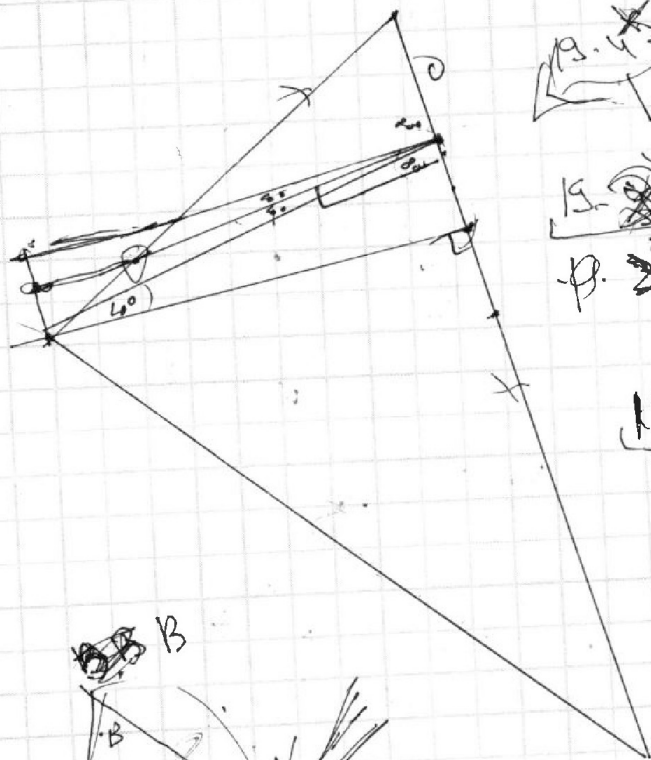
5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
— ИЗ —

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

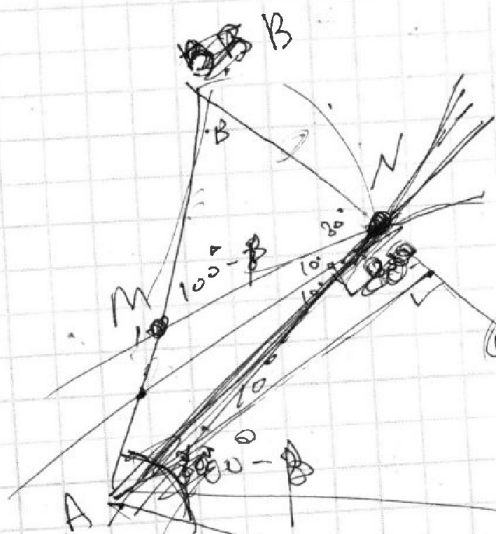


$$19.4^x + 2025 = y^2$$

$$15.4^x + 2025 = y^2$$
$$19.4^x + 2025 = y^2$$

$$19.4^x + 2025 = y^2$$

$$19.4^x + 2025 = y^2$$



$$MA \cdot BN = 2BM \cdot NC$$

$$\frac{BN}{BM} = 2 \cdot \frac{NC}{MA}$$

80°

