



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 9



1. [3 балла] При каком наименьшем натуральном n число $n! + (n + 1)! + (n + 2)!$ делится на 361?
2. [3 балла] Из суммы квадратов пяти последовательных натуральных чисел вычли число 10 и получили куб натурального числа N , большего 6. Найдите наименьшее возможное значение N .
3. [4 балла] Решите неравенство

$$\left| \sqrt{x^2 - 2x - 3} + 6 \right| \geq \left| \sqrt{x^2 - 2x - 3} + 2x - 1 \right| + |7 - 2x|.$$

4. [5 баллов] На координатной плоскости рассматриваются ромбы с длиной стороны 5 такие, что абсциссы и ординаты всех четырёх вершин каждого ромба — целые числа из промежутка $[1; 50]$. Сколько существует таких ромбов? Напомним, что квадрат также является ромбом.
5. [5 баллов] Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющих уравнению

$$19 \cdot 2^x + 2025 = y^2.$$

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при каждом из которых для множества точек плоскости Oxy , задаваемых уравнением $x^2 + y^2 = a^2$, наибольшее значение выражения $x^2 - 6x + a$ равно 8.
7. [6 баллов] На сторонах AB и BC треугольника ABC выбраны точки M и N соответственно так, что $\angle MNB = \angle ANC = 80^\circ$. Найдите $\angle CAN$, если известно, что $BN \cdot MA = 2BM \cdot NC$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$n! + (n+1)! + (n+2)! = n! (1 + n + 1 + n^2 + 3n + 2) = n! \cdot (n^2 + 4n + 4) = n! \cdot (n+2)^2$$

$$367 = 19 \cdot 19$$

19 - простое число \Rightarrow при $n < 19$ $n! \not\vdots 19 \Rightarrow$

$$\Rightarrow (n+2)! \vdots 19 \Rightarrow n+2 \vdots 19 \Rightarrow n_{\min} = 19 - 2 = \textcircled{17}$$

Ответ: 17



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть $a, a+1, a+2, \dots, a+4$ - данные 5 подряд идущих чисел.

Тогда:

$$a^2 + a^2 + 2a + 1 + a^2 + 4a + 4 + a^2 + 6a + 9 + a^2 + 8a + 16 - 10 = n^3$$

$$5(a^2 + 4a + 4) = n^3$$

$$5(a+2)^2 = n^3$$

$$n\text{-крат. число} \Rightarrow (a+2)^2 : 5$$

~~Следует проверить, что $a+2$ делится на 5, так как $5(a+2)^2 = n^3$, то $a+2$ делится на 5.~~

при $a=3$ $n=5$, но из условия $n>6 \Rightarrow a \neq 3$.

Перебираем все такие a что $(a+2)^2 : 5$ $a+2 : 5$

$$\text{минимальный подходящий } a=38 \quad (a+2=40) \Rightarrow n^3 = 5 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n = 5 \cdot 2 \cdot 2 = 20$$

Ответ: 20



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи **отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$D \cup \emptyset; x^2 - 2x - 3 \geq 0 \Rightarrow x = (-\infty, -1] \cup [3, +\infty)$$

\downarrow всегда ≥ 0
 \downarrow ≥ 0 при $x \leq 3,5$

$$\sqrt{x^2 - 2x - 3} + 6 \geq |\sqrt{x^2 - 2x - 3} + 2x - 1| + |7 - 2x|$$

$$x \leq -1:$$

\uparrow всегда ≥ 0 при $x \geq 3$ (м.н. корни + положит. число)

$$\sqrt{x^2 - 2x - 3} + 2x - 1 \geq 0$$

$$\sqrt{x^2 - 2x - 3} \geq 1 - 2x \leftarrow \geq 0$$

$$x^2 - 2x - 3 \geq 1 - 4x + 4x^2$$

$\Rightarrow \sqrt{x^2 - 2x - 3} + 2x - 1$ всегда < 0 при $x \leq -1$.

$$3x^2 - 2x + 4 > 0 \quad (D < 0)$$

$$x = (-\infty, -1]:$$

$$\sqrt{x^2 - 2x - 3} + 6 \geq 1 - 2x - \sqrt{x^2 - 2x - 3} + 7 - 2x$$

$$2\sqrt{x^2 - 2x - 3} \geq 2 - 2x \leftarrow \geq 0$$

$$x^2 - 2x - 3 \geq 1 - 2x + x^2$$

$$-3 \geq 1 \Rightarrow x \notin (-\infty, -1]$$

$$x = [3; 3,5]:$$

$$6 \geq 2x - 1 + 7 - 2x$$

$$6 \geq 6 \Rightarrow x = [3; 3,5]$$

$$x > 3,5:$$

$$6 \geq 2x - 1 + 2x - 7$$

$$x \leq 3,5$$

$$\text{Ответ: } x = [3; 3,5]$$

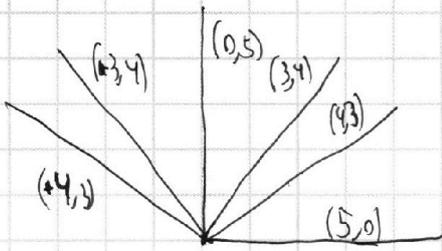


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Поскольку это параллелограмм \Rightarrow он определяется по 2 сторонам. Вот все виды отрезков длиной 5 сторонами на сетке.
 Кол-во способов выбрать 2 из них:

$C_6^2 = 15$. Чтобы узнать кол-во всех таких решет на участке

$x = [1; 50]$; $y = [1; 50]$ нужно узнать размер этого участка

(в перекрестии на оси). Тогда кол-во таких решет: $(49-x)(49-y)$

во всем участке (15)

\uparrow перекрестие на ox \uparrow перекрестие на oy

Подставим значения координат сумм отрезков длиной 5:

$$\begin{aligned}
 N(\text{кол-во решет}) &= (49-7)(49-7) + (49-4)(49-8) + (49-7)(49-7) + (49-8)(49-6) + (49-9)(49-3) + \\
 &+ (49-3)(49-9) + (49-6)(49-8) + (49-7)(49-7) + (49-8)(49-4) + (49-3)(49-9) + (49-4)(49-8) + \\
 &+ (49-5)(49-5) + (49-7)(49-7) + (49-8)(49-4) + (49-9)(49-3) = \\
 &= 4 \cdot 42^2 + 4 \cdot 47 \cdot 45 + 2 \cdot 47 \cdot 43 + 4 \cdot 40 \cdot 46 + 44^2 = 9056 + 7380 + 3526 + \\
 &+ 7360 + 7936 = 27258
 \end{aligned}$$

Ответ: 27258.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$2025 = 45 \cdot 45$$

$$(y-45)(y+45) = 2^x \cdot 19$$

$$y = 19k + 7 \text{ или } y = 19k + 12 \quad k - \text{натуральное число}$$

$$y = 19k + 7;$$

$$(19k-38)(19k+52) = 2^x \cdot 19$$

$$(k-2)(19k+52) = 2^n$$

$$19k+52 = 2^n \quad (k - \text{натуральное число}) \quad (2^n = \frac{2^m}{k-2} \text{ или } k-2 = 2^z)$$

$$19k = 2^z(2^{n-z} - 13)$$

$$19 \div 2 \Rightarrow k \div 4$$

$$\text{Пусть } k = 4 \cdot f$$

$$4f - 2 = 2^z \quad | :2$$

$$2f - 1 = 2^{z-1} \quad \text{При } z > 1 \text{ левая часть нечетная, правая четная} \Rightarrow z = 1$$

$$\text{и } f = 1 \Rightarrow k = 4 \Rightarrow y = 19 \cdot 4 + 7 = 83; \quad x = 8$$

$$\text{Если } y = 19k + 12;$$

$$(19k+57)(19k-33) = 2^x \cdot 19$$

$$(k+3)(19k-33) = 2^x \quad 2^n \cdot 2^z = 2^x$$

$$k+3 = 2^z$$

$$19k-33 = 2^n$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$k+3=2^z$$

$$19k-33=2^h$$

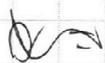
$$k=2^z-3$$

$$19 \cdot 2^z - 57 = 2^h + 33$$

$$19 \cdot 2^z = 2^h + 90 \quad (*)$$

$$19k = 2^h + 33$$

рассмотрим (*) по модулю 19;



$$0 \equiv 2^h + 14 \pmod{19} \Rightarrow 2^h \equiv 5$$

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|-----------------|---|---|---|---|----|----|---|----|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| $2^h \pmod{19}$ | 1 | 2 | 4 | 8 | 16 | 13 | 7 | 14 | 9 | 18 | 17 | 15 | 11 | 3 | 6 | 12 | 5 | 10 | 1 |
| $h+1$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 |

Как видно, $2^h \equiv 5 \pmod{19}$ при $h=7, 16$.

~~Рассмотрим (*) по модулю 19.~~

В уравнении (*) $90 \div 4 \Rightarrow$ если $2 \leq h \leq 2$ то уравнение не решится.

$h > 2$ то выше уравнению; при $2 \leq h \leq 2$ $19 \cdot 2^z$ строго меньше $2^h + 90$

$\Rightarrow y \neq 19k + 33 \Rightarrow$ единственное решение это:

$$k, y = 8; 83$$

Ответ: $\{8; 83\}$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2 \leftarrow \text{уравнение этой окружности (центром (0;0) и } R = |a| \\ x^2 - 6x + a \leq 8 \end{cases}$$

$$x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4(a+8)}}{2} \quad a \leq 17$$

$$x = (3 - \sqrt{17-a}; 3 + \sqrt{17-a}) \quad \text{Обс. Чтo } |3 + \sqrt{17-a}| > |3 - \sqrt{17-a}|$$

Значит, крайняя точка отрезка на окружности $(-a) \leq 3 + \sqrt{17-a}$

$$|a| \leq 3 + \sqrt{17-a}$$

$$a \geq 0; \quad a \leq 3$$

$$a \leq 0; \quad a \geq -3$$

$$a = [0; 3];$$

$$a - 3 \leq \sqrt{17-a} > 0$$

$$a \leq 3 + \sqrt{17-a}$$

$$-a \leq 3 + \sqrt{17-a}$$

$$a = (-3; 0]; \quad -a - 3 \leq \sqrt{17-a}$$

$$17 - a \geq a^2 - 6a + 9$$

$$\sqrt{17-a} \geq -a - 3$$

$$a^2 - 5a - 8 \leq 0$$

$$a^2 + 6a + 9 \leq 17 - a$$

$$a = \left[\frac{5 - \sqrt{57+32}}{2}; \frac{5 + \sqrt{57}}{2} \right]$$

$$a^2 + 7a - 8 \leq 0$$

$$a = \left[0; \frac{5 + \sqrt{57}}{2} \right]$$

$$a = \left[\frac{-7 - \sqrt{49+32}}{2}; \frac{-7 + \sqrt{67}}{2} \right]$$

$$a = [-8; -3]$$

$$\text{Ответ: } a = \left[-8; \frac{5 + \sqrt{57}}{2} \right].$$

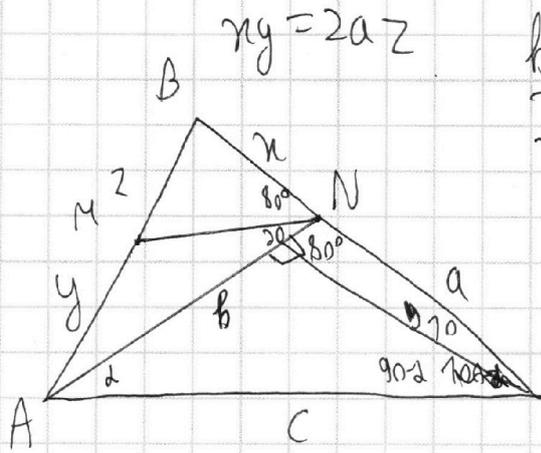


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{b \cdot MN \cdot \sin 20^\circ}{x \cdot MN \cdot \sin 80^\circ} = \frac{y}{z}$$

$$xy = bz \cdot \frac{\sin 20^\circ}{\sin 80^\circ}$$

$$2a = h \cdot \frac{\sin 20^\circ}{\sin 80^\circ}$$

$$b = \frac{2a \cdot \sin 60^\circ}{\sin 20^\circ}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos 80^\circ$$

$$\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos 80^\circ} \cdot \sin d = a \cdot \sin 80^\circ$$

$$\sqrt{a^2 + \frac{4a^2 \sin^2 80^\circ}{\sin^2 20^\circ} - \frac{4a^2 \sin 80^\circ \cos 80^\circ}{\sin 20^\circ}} \cdot \sin d = a \cdot \sin 80^\circ$$

$$\sin d = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{4 \sin^2 80^\circ}{\sin^2 20^\circ} - \frac{4 \sin 80^\circ \cos 80^\circ}{\sin 20^\circ}}}$$

i

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 - 6x + 9 - 8 \leq 0$$

$$x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 + 32 - 4a}}{2}$$

$$x = \frac{6 - \sqrt{68 - 4a}}{2}; \quad \frac{6 + \sqrt{68 - 4a}}{2}$$

$$\frac{6 + \sqrt{68 - 4a}}{2}$$

$$(y^2 - 45)(y + 45) = 2^x \cdot 79$$

$$\begin{array}{l} y - 45 : 79 \\ y + 45 : 79 \\ \hline y = 7 \\ y = 12 \end{array}$$

$$y = 19k + 7$$

$$(19k - 38)(19k + 52) = 2^x \cdot 79$$

$$\begin{array}{r} 2025 \\ - 2025 \\ \hline 576 \end{array}$$

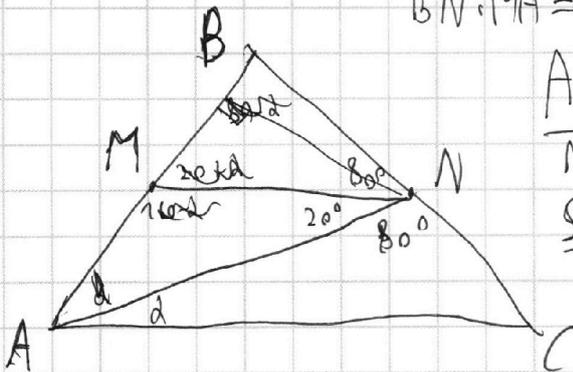
$$(k-2)(19k+52) = 2^x$$

$$k = 4$$

$$BN \cdot MA = 2BM \cdot NC$$

$$\frac{AM}{MB} (19k - 33)(19k + 59) = 2^x \cdot 79$$

$$\frac{\sin 20^\circ \cdot MN \cdot AN}{\sin 80^\circ \cdot BN \cdot MN} = \frac{AM}{BM}$$



$$19k + 52 = 2^a$$

$$19k = 2^2(2^{a-2} - 13)$$

$$4a - 2 = 2^z$$

$$2a - 1 = 2$$

$$19k = 2^h + 33$$

$$k = 2^{\frac{h}{2}} - 3$$

$$19 \cdot 2^{\frac{h}{2}} - 157 = 2^h + 33$$

$$19 \cdot 2^{\frac{h}{2}} = 2^h + 90$$

$$BN \cdot MA = \frac{\sin 20^\circ}{\sin 80^\circ} \cdot NA \cdot BM \cdot NA$$

$$(k+3)(19k-33) = 2^x$$

$$k+3 = 2^z$$

$$19k-33 = 2^h$$

$$2N_c = N_A \cdot \frac{\sin 80^\circ}{\sin 20^\circ}$$

| | | | | | | | |
|----|-----|-----|-----|------|------|------|-------|
| 1 | 2 | 4 | 8 | 16 | 32 | 64 | 128 |
| 7 | 14 | 28 | 56 | 112 | 224 | 448 | 896 |
| 90 | 180 | 360 | 720 | 1440 | 2880 | 5760 | 11520 |



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи **отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

Handwritten mathematical work on grid paper, including:

- Diagrams of triangles and rectangles with various lines and labels (e.g., 1, 2, 3, 4, 7).
- Equations: $91 + 93 + \dots + 2n - 1 = 2^n \cdot 79$, 45^2 , $2 \cdot 46 - 1 = 91$.
- Arithmetic: $4 \cdot 2$, $4 \cdot 2$, $8 \cdot 4$, $2 \cdot 6$, $8 \cdot 6$, $7 \cdot 6$, $6 \cdot 4$, $6^2 = 36$.
- Tables of numbers:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 6 | 0 | 6 | |
| 1 | 5 | 8 | 2 |
| 3 | 0 | 3 | 5 |
| 2 | 7 | 3 | 7 |
| + | + | + | + |
- Other numbers and symbols: 7, 4, 9, 16, 15, 17, 19, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70, 75, 80, 85, 90, 95, 100.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$n! \cdot (1+n+1+n^2+3n+2) = 361$$

$$n! \cdot (n^2 + 4n + 4) = 361$$

$$n! \cdot (n+2)^2 = 361$$

$$19 \cdot 19 = (n+2)^2 \cdot n!$$

$$n = 17$$

$n, n+1, n+2, \dots$

$$n^2 + n^2 + 2n + 1 + n^2 + 4n + 4 + n^2 + 6n + 9 + n^2 + 8n + 16 = 10 = a^3$$

$$5n^2 + 20n + 20 = a^3$$

$$5(n+2)^2 = a^3$$

$$n = 38$$

$$n^2 - 2n - 3 \geq 0$$

$$(n-3)(n+1) \geq 0$$

$$n \in (-\infty, -1] \cup [3, +\infty)$$

$$-5$$

$$-11$$

$$x_{1,2} =$$

$$n^2 - 2n - 3 \geq 1 + 4n + 4n^2$$

$$3n^2 - 2n + 4 \geq 0$$

$$\begin{array}{r} 3n^2 - 2n + 4 \geq 0 \\ \hline 3 \quad -2 \quad 4 \quad 0 \\ \times \quad 1 \quad 1 \quad 1 \\ \hline 3 \quad 1 \quad 5 \quad 4 \\ \times \quad 1 \quad 1 \quad 1 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 4 \quad 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3n^2 - 2n + 4 \geq 0 \\ \hline 3 \quad -2 \quad 4 \quad 0 \\ \times \quad 1 \quad 1 \quad 1 \\ \hline 3 \quad 1 \quad 5 \quad 4 \\ \times \quad 1 \quad 1 \quad 1 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 4 \quad 3 \\ \times \quad 1 \quad 1 \quad 1 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 3 \quad 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 361 \overline{) 79} \\ 5 \overline{) 79} \\ \times 19 \\ + 171 \\ \hline 361 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2025 \overline{) 405} \\ 2025 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 5 \overline{) 6} \\ 1 \overline{) 6} \\ \times 7 \\ \hline 7 \quad 6 \\ \times 19 \\ \hline 19 \quad 36 \end{array}$$

$$\sqrt{x^2 - 2x - 3} \geq 1 - 2x$$

$$\sqrt{(x-3)(x+1)} \geq 1 - 2x$$

$$n^2 - 2n - 3 \geq 1 + 4n + 4n^2$$

$$5n^2 - 2n + 4 \geq 0$$

$$x_{1,2} =$$

$$n^2 - 2n - 3 \geq 1 + 4n + 4n^2$$

$$3n^2 - 2n + 4 \geq 0$$

$$\begin{array}{r} 3n^2 - 2n + 4 \geq 0 \\ \hline 3 \quad -2 \quad 4 \quad 0 \\ \times \quad 1 \quad 1 \quad 1 \\ \hline 3 \quad 1 \quad 5 \quad 4 \\ \times \quad 1 \quad 1 \quad 1 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 4 \quad 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3n^2 - 2n + 4 \geq 0 \\ \hline 3 \quad -2 \quad 4 \quad 0 \\ \times \quad 1 \quad 1 \quad 1 \\ \hline 3 \quad 1 \quad 5 \quad 4 \\ \times \quad 1 \quad 1 \quad 1 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 4 \quad 3 \\ \times \quad 1 \quad 1 \quad 1 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 3 \quad 2 \end{array}$$