



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 9



1. [3 балла] При каком наименьшем натуральном n число $n! + (n+1)! + (n+2)!$ делится на 361?
2. [3 балла] Из суммы квадратов пяти последовательных натуральных чисел вычли число 10 и получили куб натурального числа N , большего 6. Найдите наименьшее возможное значение N .
3. [4 балла] Решите неравенство

$$\left| \sqrt{x^2 - 2x - 3} + 6 \right| \geq \left| \sqrt{x^2 - 2x - 3} + 2x - 1 \right| + |7 - 2x|.$$

4. [5 баллов] На координатной плоскости рассматриваются ромбы с длиной стороны 5 такие, что абсциссы и ординаты всех четырёх вершин каждого ромба — целые числа из промежутка $[1; 50]$. Сколько существует таких ромбов? Напомним, что квадрат также является ромбом.
5. [5 баллов] Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющих уравнению

$$19 \cdot 2^x + 2025 = y^2.$$

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при каждом из которых для множества точек плоскости Oxy , задаваемых уравнением $x^2 + y^2 = a^2$, наибольшее значение выражения $x^2 - 6x + a$ равно 8.
7. [6 баллов] На сторонах AB и BC треугольника ABC выбраны точки M и N соответственно так, что $\angle MNB = \angle ANC = 80^\circ$. Найдите $\angle CAN$, если известно, что $BN \cdot MA = 2BM \cdot NC$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N1

$$361 = 19 \cdot 19$$

$$n! + (n+1)! + (n+2)! = n!(1 + n+1 + (n+1)(n+2)) = n!(n+2)^2$$

Тогда должно быть: $n!(n+2)^2 = 19^2 \cdot X$, получим 3 случая

- 1) $n! : 19^2$, тогда n только больше 19
- 2) $n! : 19$ и $(n+2)^2 : 19$, тогда $n \geq 19$
- 3) $(n+2)^2 : 19^2$, тогда $n+2 : 19$ и $\min n = 17$

19 простое, так что 19 не
получить из множителей,
меньших, чем 19

Наименьшее n - в 3-ем случае ($n=17$)

Ответ: при $n=17$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Представим квадраты 5 последовательных натуральных чисел так:

$$(n-2)^2 + (n-1)^2 + n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 = (n^2 - 4n + 4) + (n^2 - 2n + 1) + n^2 + (n^2 + 2n + 1) + (n^2 + 4n + 4) = 5n^2 + 10$$

$$\text{Тогда } 5n^2 + 10 - 10 = 5n^2 = N^3$$

$5n^2$ куб, так что в его разложении кол-во 5 кратно 3, значит n^2 содержит в себе хотя бы 2 пятёрки, то есть 6 n хотя бы одна пятёрка.

n не равно 5, т.к. это противоречит условию ($N > 6$), то есть n содержит ещё какой-то множитель > 1 . В n^2 их поровну, т.е. кол-во множителей $: 2$, а так как оно $: 3$, всегда $5n^2$ куб (только если множитель $\neq 5$). $\Rightarrow$ кол-во множителей в $n^2 : 6$

Возьмём минимальное $n=2$ значение множителя - 2. Тогда $n=5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ и $5n^2 = N^3 = 20^3 = 8000$; $N=20$

* (Если множитель $\neq 5$, то n^2 - минимум 5^8 и тогда $5n^2 = 5^9 > 20^3$)

Ответ: $N_{\min} = 20$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1
☐2
☐3
☒4
☐5
☐6
☐7
☐СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Замечим $\sqrt{x^2-2x-3}$ на t , тогда $|t+6| \geq |t+2x-1| + |7-2x|$
 $t+6$ - положительное число, т.к. корни - отрицательны и 6 положительно

Тогда есть 4 случая, где в правой части подмодульные выражения либо положительные ≥ 0 , либо отрицательные

$$\begin{aligned} 1) t+6 &\geq t+2x-1+2x-7 \\ t+6 &\geq t+4x-8 \\ 14 &\geq 4x \\ x &\leq 3,5 \end{aligned}$$

Также из знака подмод. выражения следует, что:

$$t+2x \geq 1$$

$$2x > 7$$

Тогда $x \leq 3,5$ и $x > 3,5$,
противоречие и
такого быть не может

$$\begin{aligned} 3) t+6 &\geq t+2x-1+7-2x \\ 6 &\geq 6 \\ \text{из знака подмод. выражения:} \\ x &\geq \frac{1-t}{2} \\ x &\leq 3,5 \end{aligned}$$

противоречий нет

$$\begin{aligned} 2) t+6 &\geq 1-t-2x+7-2x \\ 2t &\geq 2-4x \\ 4x &\geq 2-2t \\ x &\geq 1-t \end{aligned}$$

из знака подмод. выражения:
 $t+2x < 1$ $x \geq \frac{1-t}{2}$
 $2x \leq 7$

тогда $x < \frac{1-t}{2}$ и $x \geq \frac{1-t}{2}$
 противоречие и такого быть не может

$$\begin{aligned} 4) t+6 &\geq 1-t-2x+2x-7 \\ 2t &\geq -12 \\ \text{из знака подмод. выражения:} \\ x &\leq \frac{1-t}{2}; t+2x < 1 \\ x &> 3,5 \end{aligned}$$

Тогда $t+2x \geq t+7$
 $t+7 < 1$, но такого быть не
 может т.к. t полож и $7 > 1$
 противоречие

Значит существует только вариант с положительными
 или подмодульными выражениями.

$$\begin{aligned} t &= \sqrt{x^2-2x-3} = \sqrt{x^2-2x+1-4} = \sqrt{(x-1)^2-4} = \sqrt{(x-1-2)(x-1+2)} = \\ &= \sqrt{(x-3)(x+1)}, \text{ тогда по методу интервалов } \begin{array}{c} + \quad - \quad + \\ -1 \quad 3 \end{array} \\ (x-3)(x+1) &\geq 0 \text{ когда } x \in (-\infty; -1] \cup [3; +\infty) \end{aligned}$$

см. продолжение $\rightarrow$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Рассмотрим случаи, где $x \geq 3$ (и также $x \leq 3,5$), все они верны,
т.к. в $t+2x \geq 1$ t полож. и $2x \geq 6 > 1$
Т.е. промежуток $x \in [3; 3,5]$ верен

Рассмотрим случаи, где $x \leq -1$, тогда в $t+2x \geq 1$, то одно и то же
с $t \geq 1-2x$ и левая, и правая части положительные
(t - корень, а $-2x = 2|x|$), значит можно возвести их в квадрат
и знак не изменился:

$$t^2 \geq 1 - 4x + 4x^2; \quad x^2 - 2x - 3 \geq 1 - 4x + 4x^2$$

$$3x^2 - 2x + 4 \leq 0$$

$D = 4 - 4 \cdot 4 \cdot 3 = \text{отриц. число} \Rightarrow$ нет корней, в параболе $a = 3 > 0 \Rightarrow$
 $\Rightarrow$ график схематично такой: , т.е. никогда не меньше 0,

значит в промежутке $(-\infty; -1]$ нет подходящих x и
единственный промежуток - $x \in [3; 3,5]$

Ответ: при $x \in [3; 3,5]$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть какая-то вершина ромба находится в координатах $(1; 1)$, тогда две соседние точки находятся либо на координатах $(0; 1)$ и $(1; 0)$, то есть стороны ромба будут параллельны OX и OY и получится квадрат, либо в координатах $(0; 2)$ и $(2; 0)$, так как ромб тогда получится треугольник Паскаля с отношением сторон $5:4:3$, если брать уже не 1 , а 2 ромба

Поменяв координаты точки поймаем, что из каждой точки, входящей в квадрат 40×40 можно построить квадрат, а из каждой точки в квадрате 40×40 можно построить второй ромб. Каждая точка составляет только ромбы, где координаты могут быть или больше, а другие будут отрицательными относительно декартовой системы.

Итого каждой точке квадрата по 1 и по 1 ромбу, а каждой точке квадрата $40^2 + 40^2 : 40^2 + 40^2$

И не забудем ромб-квадрат в центре, который одинаков при сдвиге на 1 единицу декартовой:

$$40^2 + 40^2 - 1$$

Ответ: $40^2 + 40^2 - 1$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Перенесём 2025 в правую ^{N5} часть: $y^2 - 2025 = 19 \cdot 2^x$
по разности квадратов: $(y-45)(y+45) = 19 \cdot 2^x$

Сразу выделены отрицательные x , ведь в таком случае правая часть $= \frac{19}{2^x}$, а это не целое число, хотя левая часть целая. ^{противоречие}

Левая часть состоит только из 19 и двоек, а тогда какое-то из скобок - это $19 \cdot 2^a$, а другая - 2^b , иначе не было бы

в случае, если 19 содержится в большей скобке $(y+45)$
получим $19 \cdot 2^a = 2^b \cdot 2^c$, где 2^c - разность $(\frac{y+45}{y-45})$

тогда $19 = \frac{2^b \cdot 2^c}{2^a} = 2^{b+c-a}$, но 19 - не степень 2 - противоречие

если же 19 - в скобке $y-45$ получим:

$$19 \cdot 2^a \cdot 2^c = 2^b; 19 = 2^{b-a-c}, \text{ такое же противоречие}$$

Значит таких x и y нет

Ответ: нет решений



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

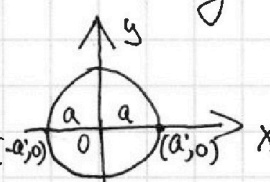
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Уравнение $x^2 + y^2 = a^2$ - это окружность на координатной прямой, т.е. для формулы $(x-a)^2 + (y-b)^2 = c^2$ у нас a и $b = 0$.
 a и $b = 0$, значит ~~центр~~ центр окружности находится в точке с координатами $(0; 0)$, a - радиус этой окружности.

На графике нашей окружности X каждой точке принадлежит промежутку $[-a; a]$

Найдём X , при котором $x^2 - 6x + a$ принимает наибольшее значение: 

наибольшее значение $-6x$ - при $x = -a$, а наибольшее значение x^2 - при $x = a$ и $x = -a$, тогда $x = -a$ - это лучший вариант.

$$\text{при } x = -a \quad x^2 - 6x + a = a^2 + 6a + a = 8$$

$$a^2 + 7a - 8 = 0$$

$$D = 49 + 4 \cdot 8 = 81$$

$$a = \frac{-7 \pm 9}{2} = -8; 1$$

-8 не подходит т.к. радиус всегда положительный, остаётся $a = 1$

Ответ: $a = 1$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☒

СТРАНИЦА
1 из 1

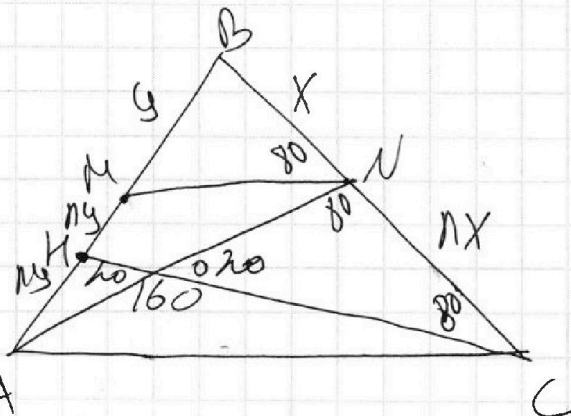
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$BN \cdot MA = 2BM \cdot NC$$

$$\frac{BN}{NC} = 2 \cdot \frac{BM}{MA}$$

Поделим AM наполовину
и получим отношение

$$\frac{1}{n} \text{ и } \frac{1}{2n}$$



$\triangle BMN \sim \triangle BNC$ т.к. $\angle NBC = \angle MBN$ и $\frac{y}{ny+y} = \frac{x}{nx+x}$

Всегда $\angle NCM = \angle BNM = 80^\circ \Rightarrow \angle NOC = 180 - 80 - 80 = 20$
 $= \angle NOA$ как верт. $\angle COA = 180 - 20 = 160$ как смеж.

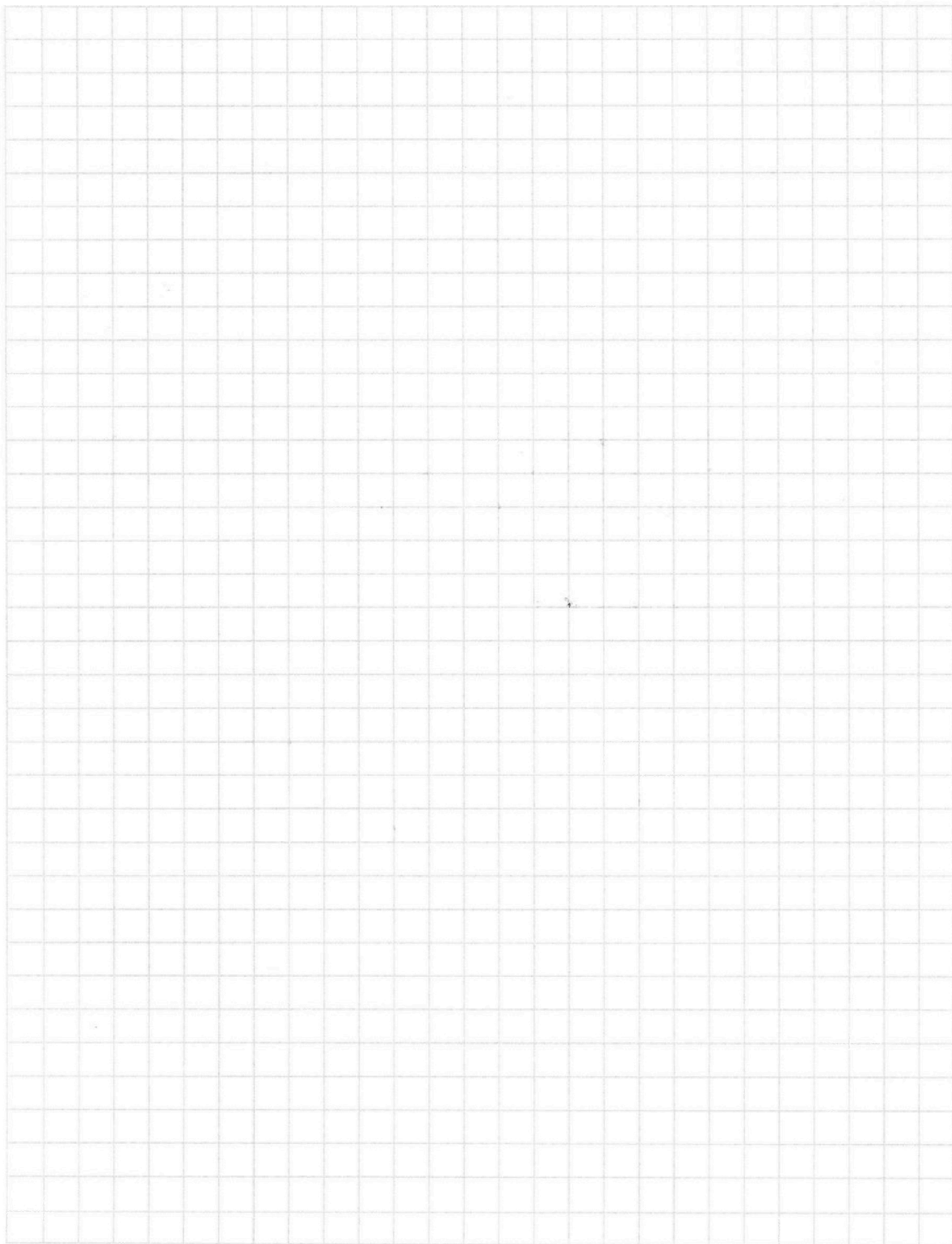


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x+6 \geq x+1-1+7-2x$$

$$6 \geq 6$$

$$t+6 \geq -t-2x+1+2x-7$$

$$2t \geq -6$$

$$t+6 \geq -t-6$$

$$2t \geq -12$$

$$t \geq -6$$

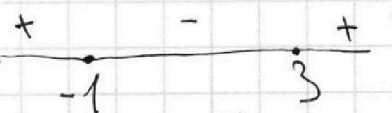
$$\sqrt{x^2-2x-3}+1-4$$

$$\sqrt{(x-1)^2-4}$$

$$\sqrt{(x+2)(x-1+2)}$$

$$\sqrt{(x-3)(x+1)} \geq 1-2x$$

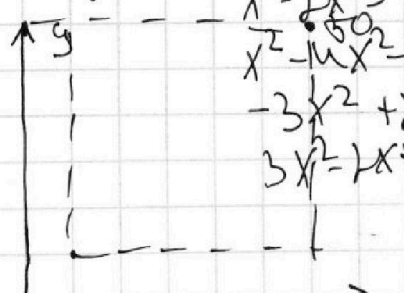
$$(x-3)(x+1) \geq 0$$



$$\sqrt{13} \cdot 19$$

$$\sqrt{13} - 10 \geq 1$$

$$3\sqrt{13} - 10 \geq 1$$



$$y+45 = (y-45) \cdot 19 \cdot 2^x$$

$$y+45 = (19y-855) \cdot 2^x$$

$$1) \Pi O$$

$$x \leq 3,5$$

$$t+2x \geq 1$$

$$2x > 7$$

$$3) t+2x \geq 1$$

$$2x \leq 7$$

$$x \leq 3,5$$

$$x \in (0; 3,5]$$

$$x \in [3; 3,5]$$

$$\sqrt{(x-3)(x+1)}+2x \geq 1$$

$$-8 \cdot -4$$

$$8 \cdot 4 - 5 \cdot 2$$

$$-6 \cdot -2$$

$$-2 \cdot 3 - 2 \cdot 1$$

$$-5 \cdot -1$$

$$2) \Pi O$$

$$x \geq 0,5-0,5t$$

$$t+2x < 1$$

$$2x \leq 7$$

$$4) \Pi O$$

$$t+2x < 1$$

$$2x > 7$$

$$x > 3,5$$

$$\frac{1-t}{2} \leq x \leq 3,5$$

$$x \in [3; 3,5]$$

$$t \geq 1-2x$$

$$(x-3)(x+1) \geq 1-2x$$

$$x^2-3x-3 \geq 1-2x$$

$$x^2-x-4 \geq 0$$

$$x \geq 4$$

$$(x-3)(x+1) \geq 1-4x+4x^2$$

$$x^2-3x-3 \geq 1-4x+4x^2$$

$$-3x^2+2x-4 \geq 0$$

$$3x^2-2x-4 \geq 0$$

$$D=4-2 \cdot 6 \cdot 19 \cdot 12^c$$

$$2a \cdot 19 = 2^6 \cdot 2^c$$

$$y^2-45^2-19 \cdot 2^x = 0$$

$$(y-45)(y+45) = 19 \cdot 2^x$$

$$87 \cdot 19$$

$$y \equiv 0 \pmod{12} \pmod{19}$$