МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

# 9 КЛАСС. Вариант 9

1. [3 балла] При каком наименьшем натуральном $n$ число $n! + (n+1)! + (n+2)!$ делится на 361?
2. [3 балла] Из суммы квадратов пяти последовательных натуральных чисел вычли число 10 и получили куб натурального числа $N$, большего 6. Найдите наименьшее возможное значение $N$.
3. [4 балла] Решите неравенство

$$\left|\sqrt{x^2-2x-3}+6\right| \geqslant \left|\sqrt{x^2-2x-3}+2x-1\right| + |7-2x|.$$

4. [5 баллов] На координатной плоскости рассматриваются ромбы с длиной стороны 5 такие, что абсциссы и ординаты всех четырёх вершин каждого ромба — целые числа из промежутка $[1; 50]$. Сколько существует таких ромбов? Напомним, что квадрат также является ромбом.
5. [5 баллов] Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющих уравнению

$$19 \cdot 2^x + 2025 = y^2.$$

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра $a$, при каждом из которых для множества точек плоскости $Oxy$, задаваемых уравнением $x^2+y^2=a^2$, наибольшее значение выражения $x^2-6x+a$ равно 8.
7. [6 баллов] На сторонах $AB$ и $BC$ треугольника $ABC$ выбраны точки $M$ и $N$ соответственно так, что $\angle MNB = \angle ANC = 80°$. Найдите $\angle CAN$, если известно, что $BN \cdot MA = 2BM \cdot NC$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ☒ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ |

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№1

$n!+(n+1)!+(n+2)! \vdots 361$    $361 = 19^2$

$\Rightarrow n!(1+n+1+(n+2)(n+1)) \vdots 19^2$

$n!(2+n+n^2+3n+2) \vdots 19^2$    $n!(n^2+4n+4) \vdots 19^2$

$\Rightarrow n! \cdot (n+2)^2 \vdots 19^2$

$n+2 \vdots 19$

$\Rightarrow n+2 \geq 19$

$n \geq 17.$

$17 < 38$

$\Rightarrow$ Ответ: при $n = 17$.

$n+2$ не $\vdots 19 \Rightarrow$

$(n+2) \perp 19$ (19 - пр. число

(НОД$(n+2, 19) = 1$).

$\Rightarrow n! \vdots 19^2$

$\Rightarrow n \geq 19 \cdot 2 = 38.$ (19 - пр. число)

так как если $n! \vdots 19^2$, 19-простое число, то среди чисел от 1 до n должно быть хотя бы 2 числа, которые $\vdots 19$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№ 2.

Числа ~~a, a+1, a+2, a+3, a+4~~ $a-2, a-1, a, a+1, a+2$.

$a-2 \in \mathbb{N}$ $\quad a^2+4+4a$

$(a-2)^2+(a-1)^2+a^2+(a+1)^2+(a+2)^2 = 5a^2+4\cdot 2+1\cdot 2 = 5a^2+10$

$a^2+4-4a$ $\Rightarrow 5a^2+10-10 = N^3$, $N \in \mathbb{N}$, $N > 6$.

$5a^2 = N^3. \Rightarrow v_5(N^3) \vdots 3 \quad (N \vdots 5).$

$\Rightarrow a^2 \vdots 5$, $a = 5a_1$. $5a^2 = N^3$, $N > 6$. Но тогда

$5a^2$ — куб числа $N$, $N > 6$ и $N \vdots 5$. $\Rightarrow$ ~~$N = 10$ (минимальное число, которое $>6$ и $\vdots 5$).~~

~~Почему $N=10$ подходит: $5a^2 = 25^3$~~

~~Заметим, что $N = 10$ не подходит.~~

$a = 5a_1$. $N = 5N_1 \Rightarrow 5\cdot 25a_1^2 = 5^3\cdot N_1^3 \Rightarrow a_1^2 = N_1^3$. ~~[illegible]~~ — ~~не квадрат натурального числа.~~ Заметим, что тогда $N_1$ — квадрат натурального числа: иначе у него найдётся простой делитель $p$, степень вхождения которого в $N_1$ — нечётна. $\Rightarrow$ степень вхождения $p$ в $N_1^3$ тоже нечётна (н. число $\cdot$ 3 = н. число). Но тогда $a_1^2$ не может быть ~~[illegible]~~ квадратом натурального числа, так как степень вхождения $p$ в него нечётна. $\Rightarrow N_1 = N_2^2$.

$\Rightarrow N = 5N_2^2 > 6 \Rightarrow$ min такое $N_2 = 2$. $\Rightarrow N = 20$ (минимум).

При $N = 20$: $5a^2 = 5^3\cdot 2^6 \Rightarrow a_1^2 = 2^6 \Rightarrow a_1 = 2^3 \Rightarrow a = 40 \Rightarrow$ $N = 20$ подходит.

Ответ: $N = 20$

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 2

№3.

$$\left|\sqrt{(x-3)(x+1)}+6\right| \geq \left|\sqrt{(x-3)(x+1)}+2x-1\right|+|7-2x|.$$

ОДЗ: $(x-3)(x+1) \geq 0$

$+ \quad - \quad +$ ; $-1$ ; $3$ $\Rightarrow x \in (-\infty; -1] \cup [3; +\infty)$.

$$\sqrt{(x-3)(x+1)}+6 \geq 6$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x-3)(x+1)}+6 \geq \left|\sqrt{(x-3)(x+1)}+2x-1\right|+|7-2x|$$

Решим неравенство $\sqrt{(x-3)(x+1)}+2x-1 \geq 0$

$$\sqrt{x^2-2x-3} \geq 1-2x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2-2x-3 \geq 0 & x \in [-\infty; -1] \cup [3; +\infty) \\ 1-2x \leq 0 & x \geq \frac{1}{2} \Rightarrow x \in [3; +\infty) \end{cases} \\ \begin{cases} 1-2x > 0 \\ x^2-2x-3 \geq 4x^2-4x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{1}{2} \\ 3x^2-2x+4 \leq 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x \in [3; +\infty) \\ \begin{cases} x < \frac{1}{2} \\ 3x^2-2x+4 \leq 0 \end{cases} \end{array}\right. \quad D: 4-4 \cdot 4 \cdot 3 < 0 \Rightarrow 3x^2-2x+4 > 0 \text{ всегда.}$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x-3)(x+1)}+2x-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \in [3; +\infty).$$

I. $x \geq 3$ и $x \leq 3\frac{1}{2} \Rightarrow x \in [3; 3\frac{1}{2}]$

$$\sqrt{(x-3)(x+1)}+6 \geq \sqrt{(x-3)(x+1)}+2x-1+7-2x$$

$\Rightarrow 6 \geq 6 \Rightarrow x \in [3; 3\frac{1}{2}]$ подходит.

II $x \geq 3\frac{1}{2}$

$$\sqrt{(x-3)(x+1)}+6 \geq \sqrt{(x-3)(x+1)}+2x-1+2x-7$$

$6 \geq 4x-8 \Rightarrow 14 \geq 4x \Rightarrow 3\frac{1}{2} \geq x \Rightarrow x = 3\frac{1}{2}$.

III $x \leq -1$

$\Rightarrow$ ~~$\sqrt{(x-3)}$~~ $\Rightarrow \sqrt{(x-3)(x+1)}+2x-1 \leq 0$ , $7-2x > 0$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ☐ | ☐ | ☒ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ |

СТРАНИЦА 2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$\sqrt{x^2-2x-3}+6 \geqslant 1-2x-\sqrt{x^2-2x-3}+7-2x$ $\qquad x\in[-\infty;-1]$ $\downarrow$

$2\sqrt{x^2-2x-3} \geqslant 2-4x$

$\sqrt{x^2-2x-3} \geqslant 1-2x \Leftrightarrow$

$\begin{cases}1-2x\leq 0 & x\geqslant\frac{1}{2} \ \times\\ x^2-2x-3\geqslant 0\end{cases}$

$\begin{cases}1-2x\geqslant 0 & x\leq\frac{1}{2} \ \checkmark\\ x^2-2x-3\geqslant 4x^2-4x+1\end{cases}$

$\Rightarrow 3x^2-2x+4\leq 0$

↪ Это невозможно: $3x^2-2x+4=$
$=(x-1)^2+2x^2+3\geqslant 3.$

$\Rightarrow$ Ответ: $x\in[3;3\frac{1}{2}]$

Очевидно, что всевозможные варианты для $x$ были разобраны: I $x\in[3;3\frac{1}{2}]$ II $x\in[3\frac{1}{2};+\infty)$ III $x\in(-\infty;-1]$,
при $x\in(-1;3)$ $x^2-2x-3<0.$

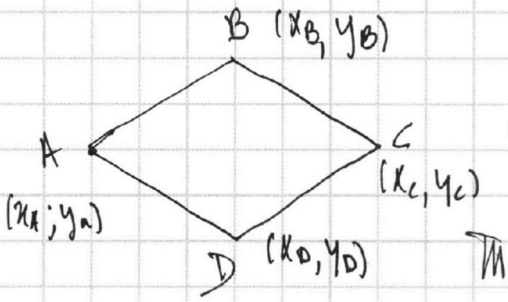
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№4.



Обозначим ромб – ABCD, и обозначим координаты вершин ромба, как показано на рисунке.

Тогда $BC \parallel AD$, $AB \parallel CD$, $AB = BC = CD = AD = 5$ – критерии ромба (ромб – ‖-мм, у которого все стороны равные). I Рассмотрим вариант, когда стороны ABCD не ‖ оси Oy.

$\Rightarrow BC: y = a_{BC}x + b_{BC}$

$$\begin{cases} y_B = a_{BC} \cdot x_B + b_{BC} \\ y_C = a_{BC} \cdot x_C + b_{BC} \end{cases}$$

$\Rightarrow y_B - y_C = a_{BC}(x_B - x_C)$ ~~$(x_B \neq x_C)$~~

$\Rightarrow a_{BC} = \frac{y_B - y_C}{x_B - x_C}$, или $x_B = x_C$, но тогда $y_B = y_C$ (BC не ‖ Oy).

$$\Rightarrow b_{BC} = y_B - \frac{x_B y_B - x_B y_C}{x_B - x_C} = \frac{-y_B x_C + x_B y_C}{x_B - x_C}$$

$$\Rightarrow BC: y = x \cdot \frac{y_B - y_C}{x_B - x_C} + \frac{x_B y_C - x_C y_B}{x_B - x_C}$$

$$CD: y = x \cdot \frac{y_C - y_D}{x_C - x_D} + \frac{x_C y_D - x_D y_C}{x_C - x_D}$$

$$AD: y = x \cdot \frac{y_D - y_A}{x_D - x_A} + \frac{x_D y_A - x_A y_D}{x_D - x_A}$$

$$AB: y = x \cdot \frac{y_A - y_B}{x_A - y_B} + \frac{x_A y_B - x_B y_A}{x_A - x_B}$$

$BC \parallel AD$: $\frac{y_B - y_C}{x_B - x_C} = \frac{y_D - y_A}{x_D - x_A}$ ,

$CD \parallel AB$: $\frac{y_C - y_D}{x_C - x_D} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}$ ,

$(x_B - x_C)^2 + (y_C - y_B)^2 = (x_C - x_D)^2 + (y_C - y_D)^2 = (x_D - x_A)^2 + (y_D - y_A)^2 = (x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 = 25.$

Посмотрим, как можно представить 25 в виде суммы квадратов целых чисел:

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

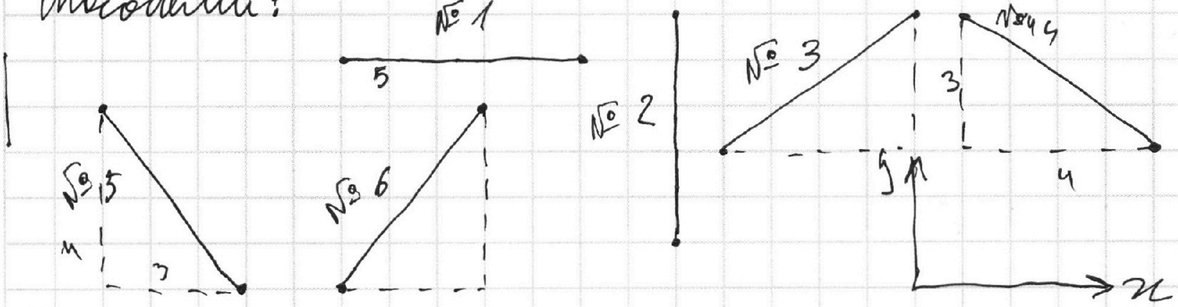
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

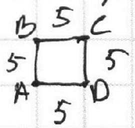
$25 = 0^2 + 5^2 = 0^2 + (-5)^2 = 3^2 + 4^2 = (\pm 3)^2 + (\pm 4)^2$. Очевидно, что это все способы. $25 = 0^2 + (\pm 5)^2 = (\pm 3)^2 + (\pm 4)^2$ ($25 - 1^2 \neq x^2$, $25 - 2^2 \neq x^2$, где $x$ - целое число).

Тогда каждая сторона ABCD может выглядеть такими способами!



I. Кол-во ромбов, у которых стороны вида 1, 2:

$\Rightarrow$ квадрат со стороной 5.



$\Rightarrow A: (x_A, y_A)$

$B: (x_A, y_A+5)$

$C: (x_A+5, y_A+5)$

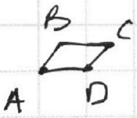
$D: (x_A+5, y_A)$.

$x_A \in [1; 50]$

$\Rightarrow x_A + 5 \in [1; 50]$

$\Rightarrow x_A \in [1; 45]$, аналогично $y_A \in [1; 45] \Rightarrow 45^2$ вариантов.

II. вида 1, 3:



$A: (x_A, y_A)$

$B: (x_A+4, y_A+3)$

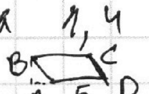
$C: (x_A+9, y_A+3)$

$D: (x_A+5, y_A)$.

$\Rightarrow x_a \in [1; 41]$ $y_A \in [1; 47] \Rightarrow 41 \cdot 47$ вариантов.

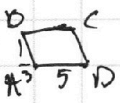
$(x_B = x_D - 9 \geq 1)$ $(y_B = y_D + 3 \leq 50)$

III вида 1, 4 $\Rightarrow$ ~~$x_A \in [10;$~~ $x_D \in [10; 50]$ $y_D \in [1; 47]$



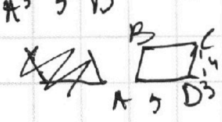
$9: 1+5+3$ $(x_B = x_D - 8 \geq 1)$ $\Rightarrow 41 \cdot 47$ вар. $(y_B = y_D + 3 \leq 50)$

IV вида 1, 5 $\Rightarrow$



$x_D \in [9; 50]$ $y_D \in [1; 46] \Rightarrow 42 \cdot 46$.

V вида 1, 6 $\Rightarrow$



$x_A \in [1; 42]$ $y_A \in [1; 46] \Rightarrow 42 \cdot 46$

$(x_C = x_A + 8 \leq 50)$ $(y_C = y_A + 4 \leq 50)$

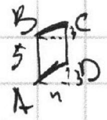
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

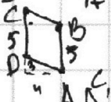
VI вида 2, 3



$(x_C = x_A + 4 \le 50)$ $(y_C = y_A + 8 \le 50)$

$x_A \in [1; 46]$ $y_A \in [1; 42] \Rightarrow 46 \cdot 42.$

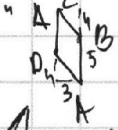
VII вида 2, 4



$(x_D = x_A - 4 \ge 1)$ $(y_C = x_A + 8 \le 50)$

$x_A \in [5; 50]$ $y_A \in [1; 42] \Rightarrow 46 \cdot 42$

VIII вида 2, 5

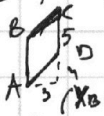


$(x_C = x_A - 3 \ge 1)$ $(y_C = x_A + 9 \le 50)$

$x_A \in [4; 50]$ $y_A \in [1; 41] \Rightarrow 47 \cdot 41$

IX вида 2, 6

Аналогично 47·41

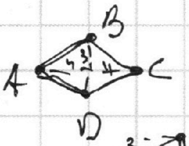


$x_A \in [1; 47]$ $(x_C = y_A + 3 \le 50)$

$y_A \in [1; 41]$ $(y_C = x_A + 9 \le 50)$

$(x_B = y_A + 3 \le 50, y_D = y_A - 3 \ge 1).$

X вида 3, 4

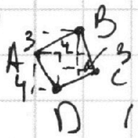


$(x_C = x_A + 8 \le 50)$

$x_A \in [1; 42]$ $y_A \in [4; 47] \Rightarrow 42 \cdot 44$

$(x_C = y_A + 7 \le 50)$ $(y_D = x_A - 4 \ge 1, y_B = x_A + 3 \le 50).$

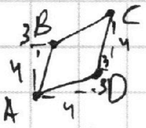
XI вида 3, 5



$x_A \in [1; 43]$ $y_A \in [5; 47] \Rightarrow 43 \cdot 43$

$(x_C = y_A + 7 \le 50)$ $(y_C = x_A + 7 \le 50)$

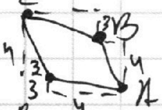
XII вида 3, 6



$x_A \in [1; 43]$ $y_A \in [1; 43] \Rightarrow 43 \cdot 43.$

$(x_C = x_A - 7 \ge 1)$ $(y_C = x_A + 7 \le 50)$

XIII вида 4, 5

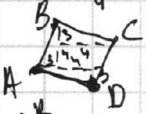


$x_A \in [8; 50]$ $y_A \in [1; 43] \Rightarrow 43 \cdot 43$

$(x_C = x_A + 7 \le 50)$ $(y_D = x_A - 3 \ge 1, y_B = x_A + 4 \le 50).$

$x_A \in [1; 43]$ $y_A \in [4; 46] \Rightarrow 43 \cdot 43$

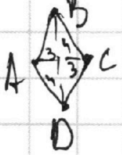
XIV вида 4, 6



$(x_C = x_A + 6 \le 50)$ $(y_B = y_A + 4 \le 50, y_D = y_A - 4 \ge 1)$

$x_A \in [\cancel{3}; 44]$ $y_A \in [5; 46] \Rightarrow 44 \cdot 42.$

XV вида 5, 6



$\Rightarrow$ Ответ: $41 \cdot 47 + 45^2 + 41 \cdot 47 + 42 \cdot 46 + 42 \cdot 46 + 42 \cdot 46 + 42 \cdot 46 +$

$47 \cdot 41 + 47 \cdot 41 + 42 \cdot 44 + 43^2 + 43^2 + 43^2 + 43^2 + 44 \cdot 42 =$

$41 \cdot 47 \cdot 4 + 42 \cdot 46 \cdot 4 + 42 \cdot 44 \cdot 2 + 43^2 \cdot 4 + 45^2$

$= (44^2 - 3^2) \cdot 4 + (44^2 - 2^2) \cdot 4 + (43^2 - 1) \cdot 2 + 43^2 \cdot 4 + 45^2 =$

$= 44^2 \cdot 8 + 43^2 \cdot 6 + 45^2 - 54 = 44^2 \cdot 15 - 44 \cdot 10 + 7 - 54$

$= 44^2 \cdot 15 - 487.$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№5.

$(x, y)$ $x, y \in \mathbb{Z}$

$19 \cdot 2^x + 2025 = y^2$ $\quad 19 \cdot 2^x + 45^2 = y^2$

$19 \cdot 2^x = (y-45)(y+45)$.

Заметим, что число $19 \cdot 2^x$ имеет только 2 простых делителя, ⇒ только одна скобка из $(y-45)$ и $(y+45) \vdots 19$, так как 19 - простое число, ⇒ одна из скобок является степенью двойки.

I. $y-45 = 2^z$ ~~$y$~~, где $z \geq 0$, $z \leq x$. , $x, z \in \mathbb{N}$

$y-45 = 2^z$ $\quad y+45 = 19 \cdot 2^{x-z}$ $\quad (x>0)$ ~~$x \geq 1$~~

$\Rightarrow y = 2^z + 45$

$\Rightarrow 90 + 2^z = 19 \cdot 2^{x-z}$

~~по делю 4, ⇒ $2^{x-z} \vdots 2$ (90 ⋮ 2, или~~

Заметим, что ~~#~~ $x$ - не отрицательное число ~~[illegible]~~, иначе $19 \cdot 2^x \in \mathbb{Z}$, но $2025 \in \mathbb{Z}$, $y^2 \in \mathbb{Z}$ ⇒ противоречие).

Если $z=0$, то $90+1$ - не $\vdots 2$, а $19 \cdot 2^x \vdots 2$ (ясно, что $x>0$, так как $19+2025 \neq y^2$) $\Rightarrow z \neq 0 \Rightarrow z \geq 1$

Если $z = x$, то т.к $x > 0$ $90+2^z \vdots 2$, но $19 \cdot 2^{x-x}$ не $\vdots 2 \Rightarrow$ $z \neq x$. $\Rightarrow z \leq x-1$

(Если $z \geq 2$, то $90+2^z \vdots 2$, но не $\vdots 4$, ($90$ не $\vdots 4$, $2^z \vdots 4$) $\Rightarrow 19 \cdot 2^{x-z}$ не $\vdots 4 \Rightarrow x-z=1$). Заметим, что так как $y-45=2^z$, ~~и~~ $z>0$, то $y$ - н. число. Но $2y = 2^z + 19 \cdot 2^{x-z}$

$\Rightarrow y = 2^{z-1} + 19 \cdot 2^{x-z-1}$ ⇒ либо $z=1$, либо $x=z+1$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

(иначе $2^{z-1} \vdots 2$, $19\cdot 2^{x-z-1} \vdots 2 \Rightarrow$ противоречие).

$\Rightarrow$ 1. $z=1 \Rightarrow y-45=2$ $y=47$ $y+45=47+45=92$, но $92$ не $\vdots 19$ $\Rightarrow z \neq 1$.

2. $x=z+1 \Rightarrow y=2^{z-1}+19=2\cdot 19-45 \Rightarrow$ $y=-7$, но тогда $2^{z-1}<0$, а ~~$y+45=$~~ это невозможно ~~$y-45=19\cdot 2\cdot 45$~~ $\vdots 2$

$\Rightarrow$ $x \neq z+1 \Rightarrow$ этот вариант, когда $y-45=2^z$
$y+45=19\cdot 2^{x-z}$
невозможен.

II. $y-45=19\cdot 2^{x-z}$ $y+45=2^z$. Аналогично $x>0$.

1. Если $z=0$, то $y+45=1$ $y=-44$, $\Rightarrow -44-45=19\cdot 2^{x} \vdots 2$ $\Rightarrow$ противоречие $\Rightarrow z>0$

2. Если $x-z=0$, то $y-45=19 \Rightarrow y=19+45 \Rightarrow$ $y+45=90+19=2^x=2^z$, но $90+19$ не $\vdots 2$ $\Rightarrow$ противоречие, $\Rightarrow z<x$.

$\Rightarrow 2y=2^z+19\cdot 2^{x-z} \Rightarrow y=2^{z-1}+19\cdot 2^{x-z-1}$, аналогично $y$ не $\vdots 2$

$\Rightarrow$ либо $2^{z-1}=1$, либо $x-z-1=0$.

1. $z=1 \Rightarrow y=19\cdot 2^{x-2}+1 \Rightarrow 1+19\cdot 2^{x-2}-45=2^{1} \Rightarrow 19\cdot 2^{x-2}=46$, но $46$ не $\vdots 19$ $\Rightarrow z \neq 1$.

2. $x=z+1 \Rightarrow y=2^{z-1}+19=2^{x-2}+19=19\cdot 2^{1}-45$ $\Rightarrow 2^{x-2}=19-45<0 \Rightarrow$ невозможно $\Rightarrow$ противоречие.

$\Rightarrow$ Ответ: таких целых пар $(x,y)$ нет.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№6.

$x^2+y^2=a^2$ наиб. знач. выраж. $x^2-6x+a=8$.

$\Rightarrow x\in[-a;a]$

$x^2-6x+a=f(x)$

$x_B=\frac{6}{2}=3. \Rightarrow f(3-x)=f(x+3)$, так как

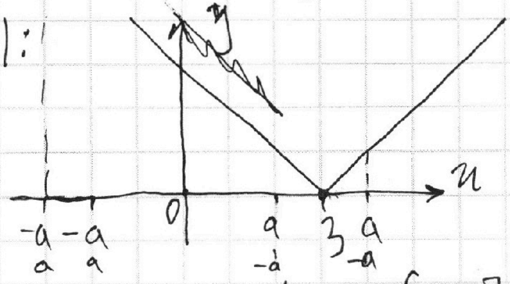
парабола симметрична относительно вершины.

$\Rightarrow$ чтобы $f(x)$ было максимально возможно. большим ([illegible]),

$|x-3|$ должен быть максимально большим, так как

$f(x)$ - парабола рогами вверх.

I. $a\geq 3$ $y=|x-3|$:



Тогда видно по графику, что при $x\in[-a;a]$ $|x-3|$ принимает максимальное значение при $x=-a. \Rightarrow |-a-3|$

$\Rightarrow a^2+6a+a=8. \Rightarrow a^2+7a-8=0$ $(a+8)(a-1)=0$, $a\geq 3$

$\Rightarrow a=-8\ /\ 1$, но а не подходит. $(a\geq 3)$

$\Rightarrow$ II. $a\geq 0$ $a\leq 3$ Тогда $|x-3|$ принимает мах. значение при $x=-a$ (видно по графику).

$\Rightarrow a^2+6a+a=8$ $a^2+7a-8=0$ $a=-8\ /\ 1 \Rightarrow a=1$ подходит.

III. $-a\geq 3 \Rightarrow |x-3|=$ мах. при $x=a$ (видно по графику). $\Rightarrow$

$a^2-6a+a=8$ $a^2-5a-8=0 \Rightarrow a=\frac{5\pm\sqrt{57}}{2}$, $a\leq -3$

$5-\sqrt{57} \vee -6$ $11 \vee \sqrt{57}$ $\Rightarrow$ а не подходит.

IV $a\leq 0$, $a\geq -3 \Rightarrow |x-3|=$ мах при $x=a$ (видно по графику). $\Rightarrow$

$a^2-6a+a=8$ $a^2-5a-8=0$ $a=\frac{5\pm\sqrt{57}}{2} \Rightarrow a=\frac{5-\sqrt{57}}{2}$ подходит.

$\Rightarrow$ Ответ: $a=1, \frac{5-\sqrt{57}}{2}$.

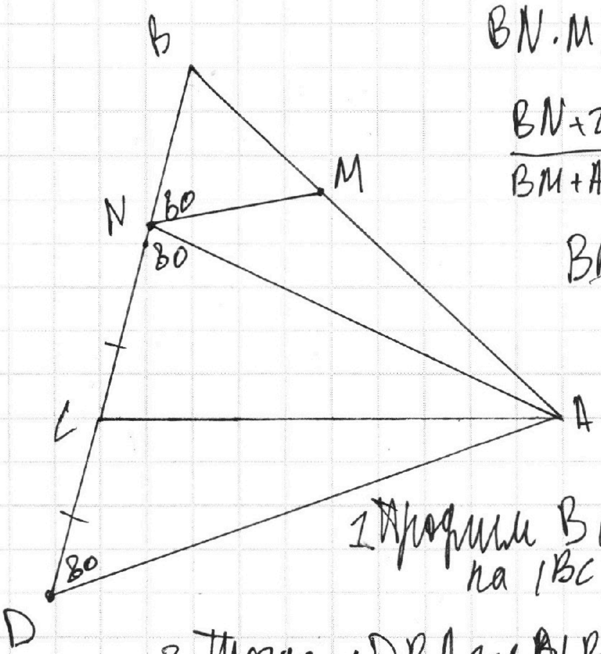
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно.**

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☒ |

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№7.



$BN \cdot MA = 2BM \cdot NC$

$$\frac{BN+2NC}{BM+AM} \vee \frac{BN}{BM}$$

$$\cancel{BM \cdot BN} + BM \cdot 2NC \vee \cancel{BN \cdot BM} + BN \cdot AM$$

$$BM \cdot 2NC \overset{=}{\vee} BN \cdot AM$$

$$\Rightarrow \frac{BN+2NC}{BM+AM} = \frac{BN}{BM}$$

1. Продлим BC на NC: CD = CN, N лежит на (BC) за точкой C.

2. Тогда △DBA ~ △NBM по углу ∠DBA - общий и отношению сторон: $\frac{BN+2NC}{BM+AM} = \frac{BN}{BM}$. ⇒

∠BNM = ∠BDA = 80°. ⇒ △NAD - р/б, (∠AND = ∠ADN = 80)

и AC - медиана ⇒ она же и высота. ⇒ ∠NCA = 90° ⇒

в △CNA: ∠NAC = 180° - 80° - 90° = 10°.

⇒ Ответ: ∠CAN = 10°.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ |

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$z=1$

$80+12=92$

$92$

$\Rightarrow x=z.$

$19\cdot 4=$

$40+36=76$

$19\cdot 3=19$

$a=\frac{5\pm\sqrt{25+32}}{2}=\frac{5\pm\sqrt{57}}{2}$ $45|$

$19\cdot 3=30+27=57$

$2^{z-1}+19$

$45-19$ $9^2-5^2$

$=4\cdot 14$ $-2$

$19-45=y$

$y+45=19$

$y-45$

$y-45$

$\begin{array}{r} 45 \\ -38 \\ \hline 7 \end{array}$

$38-45=$

$y=45+2^z$

$y+45=19\cdot 2^{x-z}$

$45+2-1=$
$46$

$2y=19\cdot 2^{x-z}+2^z$

$y=19\cdot 2^{x-z-1}+2^{z-1}$

$19\cdot 2^{x-z-1}+2^{z-1}=45+2^z$

$19\cdot 9=$

$90+81=$
$171$

$\begin{array}{r|l} 361 & 7 \\ -35 & 5 \\ \hline 11 & \end{array}$

$\begin{array}{r|l} 361 & 11 \\ -33 & 3 \\ \hline 31 & \end{array}$

$\begin{array}{r|l} 361 & 13 \\ -26 & 2 \\ \hline 101 & \end{array}$

$\begin{array}{r|l} 361 & 17 \\ -34 & 2 \\ \hline 21 & \end{array}$

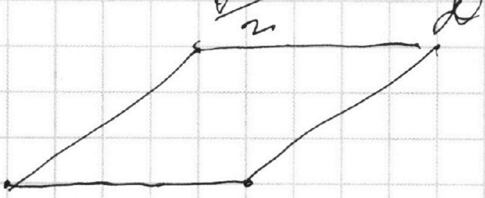
$\begin{array}{r|l} 361 & 19 \\ -19 & 19 \\ \hline 171 & \end{array}$

0 5 $44^2-3^2=$
5 0 $=47\cdot 41$
3 4
4 3

$3x$

4 $22^2=484$

$\frac{6\cdot 5}{2}=15$



Д: 4-1.

$\frac{x_A y_A - x_B y_A}{x_A - x_B}= y_B$

$1-2x\geq 0$

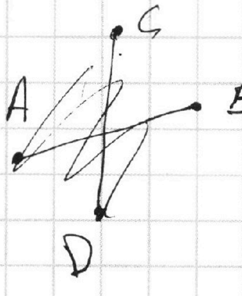
$\frac{1}{2}\geq x$

$a_{BC}x-y+b_{BC}=0.$

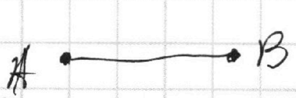
$\sqrt{x^2-2x+3}\leq 1-2x$

$x^2-2x+3\leq 4x^2-4x+1$

$3x^2-2x+4\geq 0$



$50-9$



$y=5$

$50-8=42$

$50-8=$
$42$

$22^2\cdot 60-22^2-3$
$=22^2\cdot 59-3$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

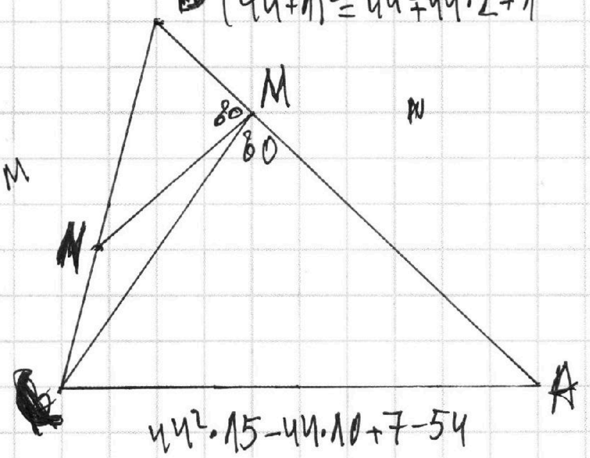
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$(4,3)^2\cdot 26+2(43+1)^2\cdot 8$

$44^2\cdot 8+(44-1)^2\cdot 6=44^2\cdot 6-44\cdot 12+6$

$(44+1)^2=44^2+44\cdot 2+1$

$BN\cdot MA-2BM\cdot NC$



$\frac{BN+NC}{BM+MA} \vee \frac{BN}{BM}$

$BM\cdot BN+BM\cdot NC \vee BN\cdot BM+BN\cdot MA$

$BM\cdot NC \vee BN\cdot MA$

$44^2\cdot 15-44\cdot 10+7-54$

N

$BN\cdot MA=2BM\cdot NC$

$\frac{BN}{2BM}=\frac{NC}{MA}$

$41\cdot 47=$

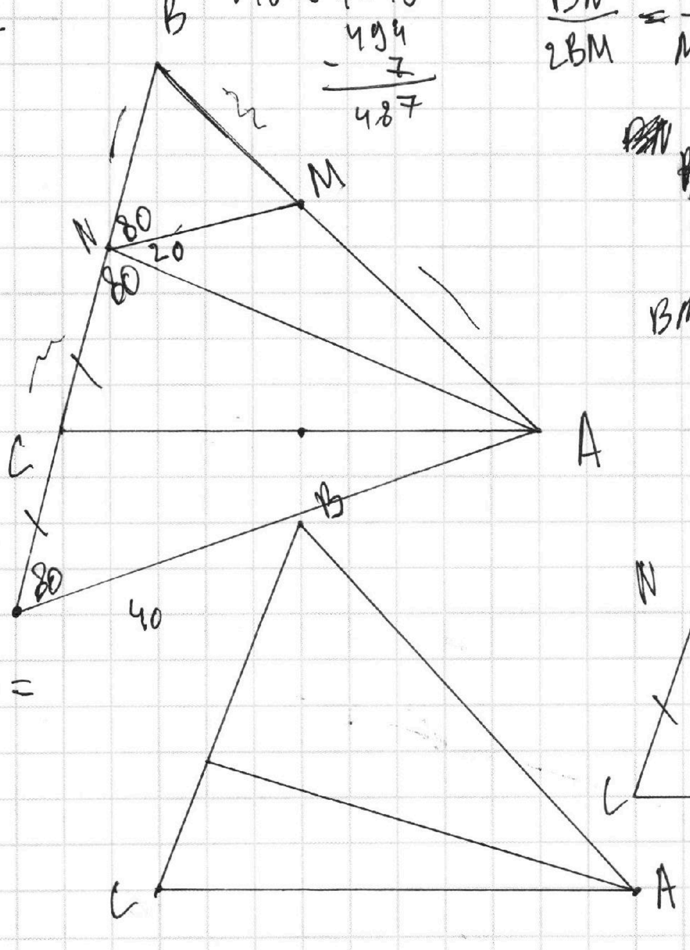
$=(44^2-3^2$

$440+54=494$

$$\begin{array}{r}494\\-\ \ 7\\\hline 487\end{array}$$

$\frac{BN+2NC}{BM+MA} \underset{\vee}{=} \frac{BN}{BM}$

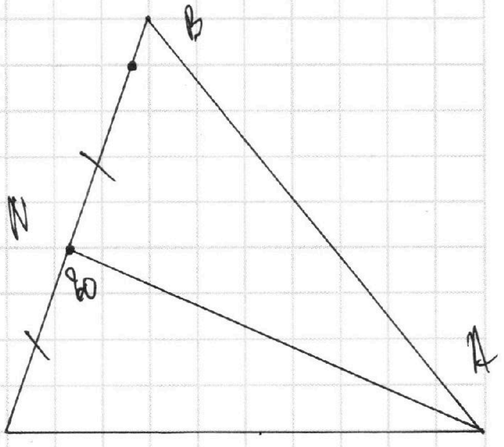
$BM\cdot BN+2NC\cdot BM \overset{=}{\vee} BN\cdot BM+BN\cdot MA$



□
1 5

$[1;45]$

$[1;45)$



$36+16+2=$

$=54$

$18+36$