



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 9



1. [3 балла] При каком наименьшем натуральном n число $n! + (n+1)! + (n+2)!$ делится на 361?
2. [3 балла] Из суммы квадратов пяти последовательных натуральных чисел вычли число 10 и получили куб натурального числа N , большего 6. Найдите наименьшее возможное значение N .
3. [4 балла] Решите неравенство

$$\left| \sqrt{x^2 - 2x - 3} + 6 \right| \geq \left| \sqrt{x^2 - 2x - 3} + 2x - 1 \right| + |7 - 2x|.$$

4. [5 баллов] На координатной плоскости рассматриваются ромбы с длиной стороны 5 такие, что абсциссы и ординаты всех четырёх вершин каждого ромба — целые числа из промежутка $[1; 50]$. Сколько существует таких ромбов? Напомним, что квадрат также является ромбом.
5. [5 баллов] Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющих уравнению

$$19 \cdot 2^x + 2025 = y^2.$$

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при каждом из которых для множества точек плоскости Oxy , задаваемых уравнением $x^2 + y^2 = a^2$, наибольшее значение выражения $x^2 - 6x + a$ равно 8.
7. [6 баллов] На сторонах AB и BC треугольника ABC выбраны точки M и N соответственно так, что $\angle MNB = \angle ANC = 80^\circ$. Найдите $\angle CAN$, если известно, что $BN \cdot MA = 2BM \cdot NC$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$N=1$$

$$n! + (n+1)! + (n+2)! : 361$$

$$361 = 19^2$$

$$\Leftrightarrow n! (1 + n + 1 + (n+2)(n+1)) : 19^2$$

$$n! (2 + n + n^2 + 3n + 2) : 19^2$$

$$n! (n^2 + 4n + 4) : 19^2$$

$$\Rightarrow n! \cdot (n+2)^2 : 19^2$$

$$\begin{aligned} n+2 &: 19 \\ \Rightarrow n+2 &\geq 19 \end{aligned}$$

$$n \geq 17$$

$$17 < 38$$

$\Rightarrow$ Ответ: при $n=17$.

$$\begin{aligned} n+2 &\nmid 19, \Rightarrow \\ (n+2) &\perp 19 \text{ (19 - пр. число)} \\ (\text{НОД}(n+2, 19) &= 1). \end{aligned}$$

$$\Rightarrow n! : 19^2$$

$$\Rightarrow n \geq 19 \cdot 2 = 38. \text{ (19 - пр. число)}$$

так как если $n! : 19^2$, 19-примое число, то среди чисел от 1 до n должно быть хотя бы 2 числа, которые $: 19$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$N \equiv 2.$$

из числа ~~$a-2, a-1, a, a+1, a+2$~~ $a-2, a-1, a, a+1, a+2$.

$$a-2 \in \mathbb{N}$$

$$a^2 + 4 + 4a$$

$$(a-2)^2 + (a-1)^2 + a^2 + (a+1)^2 + (a+2)^2 = 5a^2 + 4 \cdot 2 + 1 \cdot 2 = 5a^2 + 10$$

$$a^2 + 4 + 4a \Rightarrow 5a^2 + 10 - 10 = N^3, N \in \mathbb{N}, N > 6.$$

$$5a^2 = N^3 \Rightarrow \sqrt[3]{5(N^3)} \div 3 \quad (N \div 5).$$

$$\Rightarrow a^2 \div 5, a = 5a_1. \quad 5a^2 = N^3, N > 6. \text{ Но тогда}$$

$5a^2$ - куб числа N , $N > 6$, $N \div 5 \Rightarrow$ ~~какое-то число, которое > 6 и $\div 5$~~ .

Попробуем $N=10$ подогнать: $5a^2 = 25^3 \Rightarrow$

~~Заметим, что $N=10$ не подходит~~

$$a = 5a_1. \quad N = 5N_1 \Rightarrow 5 \cdot 25a_1^2 = 5^3 \cdot N_1^3 \Rightarrow a_1^2 = N_1^3. \text{ ~~Заметим, что~~$$

~~Заметим, что N_1 - квадрат натурального числа~~. Заметим, что тогда

N_1 - квадрат натурального числа: иначе у него найдётся простой делитель p , степень вхождения которого в N_1 - нечётка. $\Rightarrow$ степень вхождения p в N_1^3 тоже нечётка (н.число $\cdot 3 =$ н.число). Но тогда a_1^2 не может быть ~~квадратом~~ квадратом натурального числа, так как степень вхождения p в него нечётка. $\Rightarrow N_1 = N_2^2$.

$$\Rightarrow N = 5N_2^2, > 6 \Rightarrow \min \text{ такое } N_2 = 2. \Rightarrow N = 20 \text{ (минимум).}$$

$$\text{При } N=20: 5a^2 = 5^3 \cdot 2^6 \Rightarrow a_1^2 = 2^6 \Rightarrow a_1 = 2^3 \Rightarrow a = 40 \Rightarrow$$

$$N=20 \text{ подходит.}$$

$$\text{Ответ: } N=20$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 3.

$$|\sqrt{(x-3)(x+1)} + 6| \geq |\sqrt{(x-3)(x+1)} + 2x - 1| + |7 - 2x|$$

ОДЗ: $(x-3)(x+1) \geq 0$

$$\begin{array}{c} + \quad - \quad + \\ -1 \quad 3 \end{array} \Rightarrow x \in (-\infty; -1] \cup [3; +\infty)$$

$$\sqrt{(x-3)(x+1)} + 6 \geq 6$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x-3)(x+1)} + 6 \geq |\sqrt{(x-3)(x+1)} + 2x - 1| + |7 - 2x|$$

Решим неравенство $\sqrt{(x-3)(x+1)} + 2x - 1 \geq 0$

$$\sqrt{x^2 - 2x - 3} \geq 1 - 2x \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x - 3 \geq 0 & x \in (-\infty; -1] \cup [3; +\infty) \\ 1 - 2x \leq 0 & x \geq \frac{1}{2} \Rightarrow x \in [3; +\infty) \\ \text{или} \\ 1 - 2x > 0 & x < \frac{1}{2} \\ x^2 - 2x - 3 \geq 4x^2 - 4x + 1 & 3x^2 - 2x + 4 \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \in [3; +\infty) \\ x < \frac{1}{2} \\ 3x^2 - 2x + 4 \leq 0 \end{cases}$$

О: $4 - 4 \cdot 4 \cdot 3 < 0 \Rightarrow 3x^2 - 2x + 4 > 0$ всегда.

$$\Rightarrow \sqrt{(x-3)(x+1)} + 2x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \in [3; +\infty)$$

I. $x \geq 3$ и $x \leq 3\frac{1}{2} \Rightarrow x \in [3; 3\frac{1}{2}]$

$$\sqrt{(x-3)(x+1)} + 6 \geq \sqrt{(x-3)(x+1)} + 2x - 1 + 7 - 2x$$

$$\Rightarrow 6 \geq 6 \Rightarrow x \in [3; 3\frac{1}{2}] \text{ подходит}$$

II $x \geq 3\frac{1}{2}$

$$\sqrt{(x-3)(x+1)} + 6 \geq \sqrt{(x-3)(x+1)} + 2x - 1 + 2x - 7$$

$$6 \geq 4x - 8 \Rightarrow 14 \geq 4x \Rightarrow 3\frac{1}{2} \geq x \Rightarrow x = 3\frac{1}{2}$$

III $x \leq -1$

$$\Rightarrow \sqrt{(x-3)(x+1)} + 2x - 1 \leq 0, \quad 7 - 2x \geq 0$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{x^2 - 2x + 3} + 6 \geq 1 - 2x - \sqrt{x^2 - 2x - 3} + 7 - 2x \quad x \in (-\infty; -1]$$

$$2\sqrt{x^2 - 2x - 3} \geq 2 - 4x$$

$$\sqrt{x^2 - 2x - 3} \geq 1 - 2x \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 1 - 2x \leq 0 & x \geq \frac{1}{2} \quad \times \\ x^2 - 2x - 3 \geq 0 & \\ 1 - 2x \geq 0 & x \leq \frac{1}{2} \quad \checkmark \\ x^2 - 2x - 3 \geq 4x^2 - 4x + 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 3x^2 - 2x + 4 \leq 0$$

$$\hookrightarrow \text{это невозможно: } 3x^2 - 2x + 4 = (x-1)^2 + 2x^2 + 3 \geq 3.$$

$$\Rightarrow \text{Ответ: } x \in [3; 3\frac{1}{2}]$$

Очевидно, что всевозможные варианты для x были рассмотрены: $\neg x \in [3; 3\frac{1}{2}] \vee x \in [3\frac{1}{2}; +\infty) \vee x \in (-\infty; -1]$,

$$\text{или } x \in (-1; 3) \quad x^2 - 2x - 3 < 0.$$

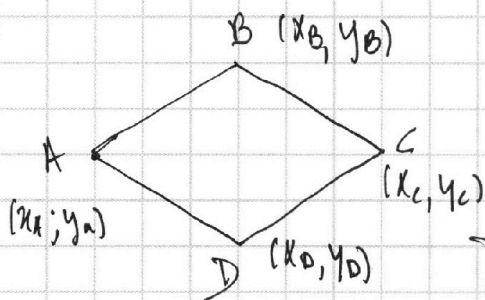


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



№ 4.

Обозначим ромб - ABCD, и обозначим координаты вершин ромба, как показано на рисунке.

Тогда $BC \parallel AD$, $AB \parallel CD$, $AB = BC = CD = AD =$

$= 5$ - критерии ромба (ромб - 11-ый, у которого все стороны равны). Рассмотрим вариант, когда стороны ABCD не $\parallel$ осм.

$$\Rightarrow BC: y = a_{BC}x + b_{BC}$$

$$\begin{cases} y_B = a_{BC} \cdot x_B + b_{BC} \\ y_C = a_{BC} \cdot x_C + b_{BC} \end{cases}$$

$$\Rightarrow y_B - y_C = a_{BC}(x_B - x_C) \quad (\cancel{x_B \neq x_C})$$

$$\Rightarrow a_{BC} = \frac{y_B - y_C}{x_B - x_C}, \text{ или } x_B = x_C, \text{ но тогда } y_B = y_C \text{ (BC не } \parallel \text{ осм).}$$

$$\Rightarrow b_{BC} = y_B - \frac{x_B y_B - x_C y_C}{x_B - x_C} = \frac{-y_B x_C + x_B y_C}{x_B - x_C}$$

$$\Rightarrow BC: y = k \cdot \frac{y_B - y_C}{x_B - x_C} + \frac{x_B y_C - x_C y_B}{x_B - x_C}$$

$$CD: y = k \cdot \frac{y_C - y_D}{x_C - x_D} + \frac{x_C y_D - x_D y_C}{x_C - x_D}$$

$$AD: y = k \cdot \frac{y_D - y_A}{x_D - x_A} + \frac{x_D y_A - x_A y_D}{x_D - x_A}$$

$$AB: y = k \cdot \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} + \frac{x_A y_B - x_B y_A}{x_A - x_B}$$

$$BC \parallel AD: \frac{y_B - y_C}{x_B - x_C} = \frac{y_D - y_A}{x_D - x_A}$$

$$CD \parallel AB: \frac{y_C - y_D}{x_C - x_D} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}$$

$$\begin{aligned} (x_B - x_C)^2 + (y_C - y_B)^2 &= (x_C - x_D)^2 + (y_D - y_C)^2 \\ &= (x_D - x_A)^2 + (y_D - y_A)^2 = (x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 \\ &= 25. \end{aligned}$$

Рассмотрим, как можно представить 25 в виде суммы квадратов целых чисел!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

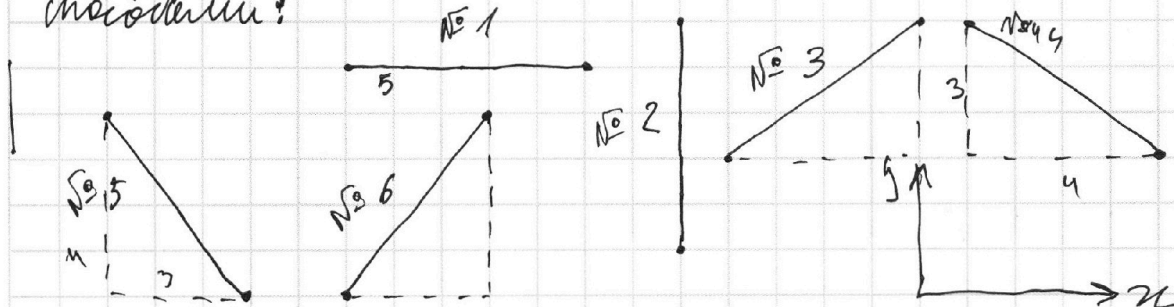
СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$25 = 0^2 + 5^2 = 0^2 + (-5)^2 = 3^2 + 4^2 = (\pm 3)^2 + (\pm 4)^2. \text{ Очевидно, что}$$

$$\text{это все способы. } 25 = 0^2 + (\pm 5)^2 = (\pm 3)^2 + (\pm 4)^2 \\ (25 - 1^2 \neq x^2, 25 - 2^2 \neq x^2, 25 - 3^2 \neq x^2, \text{ где } x - \text{целое число}).$$

Тогда каждая сторона ABCD может вписываться таким способом:



I. Кольво ромбов, у которых стороны вида 1, 2:

$$\Rightarrow \text{исходит со стороны 5.} \begin{matrix} B & 5 & C \\ 5 & \square & 5 \\ A & 5 & D \end{matrix} \Rightarrow \begin{aligned} A &: (x_A, y_A) \\ B &: (x_A + 5, y_A + 5) \\ C &: (x_A + 5, y_A + 5) \\ D &: (x_A + 5, y_A) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow x_A \in [1; 50] \\ \Rightarrow x_A + 5 \in [1; 50]$$

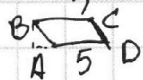
$$\Rightarrow x_A \in [1; 45], \text{ аналогично } y_A \in [1; 45] \Rightarrow 45^2 \text{ вариантов.}$$

II. вида 1, 3:

$$\begin{matrix} B & & C \\ & \square & \\ A & & D \end{matrix} \begin{aligned} A &: (x_A, y_A) \\ B &: (x_A + 4, y_A + 3) \\ C &: (x_A + 5, y_A + 3) \\ D &: (x_A + 5, y_A) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow x_A \in [1; 41] \quad y_A \in [1; 47] \Rightarrow 41 \cdot 47 \text{ вариантов.} \\ (x_B = x_0 - 9 \geq 1) \quad (y_B = y_0 + 3 \leq 50)$$

III. вида 1, 4 $\Rightarrow x_A \in [10; 50] \quad y_D \in [1; 47]$

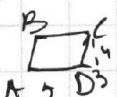


$$y: 1 + 5 + 3 \quad (x_B = x_0 - 8 \geq 1) \quad (y_B = y_0 + 3 \leq 50)$$

IV. вида 1, 5 $\Rightarrow x_D \in [9; 50] \quad y_D \in [1; 46] \Rightarrow 42 \cdot 46$



V. вида 1, 6 $\Rightarrow x_A \in [1; 42] \quad y_A \in [1; 46] \Rightarrow 42 \cdot 46$



$$(x_C = x_A + 6 \leq 50) \quad (y_C = y_A + 4 \leq 50)$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

VI задача 2, 3 $(x_c = x_a + y \leq 50)$ $(y_c = y_a + b \leq 50)$
 $x_a \in [1; 46]$ $y_a \in [1; 42] \Rightarrow 46 \cdot 42$
 $(x_0 = x_a - 4 \geq 1)$ $(y_c = x_a + b \leq 50)$

VII задача 2, 4 $x_a \in [5; 50]$ $y_a \in [1; 42] \Rightarrow 46 \cdot 42$
 $(x_c = x_a - 3 \geq 1)$ $(y_c = x_a + b \leq 50)$

VIII задача 2, 5 $x_a \in [4; 50]$ $y_a \in [1; 41] \Rightarrow 47 \cdot 41$
 $(x_c = x_a + b \leq 50)$ $(y_c = x_a + b \leq 50)$

IX задача 2, 6 Аналогично 47 · 41 $x_a \in [1; 47]$ $(x_c = x_a + 3 \leq 50)$
 $(x_c = x_a + b \leq 50)$ $y_a \in [4; 47] \Rightarrow 42 \cdot 44$
 $(y_c = x_a + b \leq 50)$ $(y_0 = x_a - 4 \geq 1, y_b = x_a + 3 \leq 50)$

X задача 3, 4 $x_a \in [1; 42]$ $y_a \in [4; 47] \Rightarrow 42 \cdot 44$
 $(x_c = x_a + 7 \leq 50)$ $(y_0 = x_a - 4 \geq 1, y_b = x_a + 3 \leq 50)$

XI задача 3, 5 $x_a \in [1; 43]$ $y_a \in [5; 47] \Rightarrow 43 \cdot 43$
 $(x_c = x_a + 7 \leq 50)$ $(y_c = x_a + 7 \leq 50)$

XII задача 3, 6 $x_a \in [1; 43]$ $y_a \in [1; 43] \Rightarrow 43 \cdot 43$
 $(x_c = x_a - 7 \geq 1)$ $(y_c = x_a + 7 \leq 50)$

XIII задача 4, 5 $x_a \in [8; 50]$ $y_a \in [1; 43] \Rightarrow 43 \cdot 43$
 $(x_c = x_a + 7 \leq 50)$ $(y_0 = x_a - 3 \geq 1, y_b = x_a + 4 \leq 50)$

XIV задача 4, 6 $x_a \in [1; 43]$ $y_a \in [4; 46] \Rightarrow 43 \cdot 43$
 $(x_c = x_a + 6 \leq 50)$ $(y_b = y_a + 6 \leq 50, y_0 = y_a - 4 \geq 1)$

XV задача 5, 6 $x_a \in [4; 44]$ $y_a \in [5; 46] \Rightarrow 44 \cdot 42$
 $(x_c = x_a + 6 \leq 50)$ $(y_b = y_a + 6 \leq 50, y_0 = y_a - 4 \geq 1)$

$$\Rightarrow \text{ответ: } 41 \cdot 47 + 45^2 + 41 \cdot 47 + 42 \cdot 46 + 42 \cdot 46 + 42 \cdot 46 + 42 \cdot 46 +$$

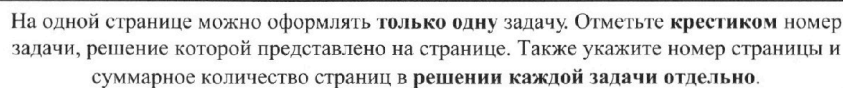
$$47 \cdot 41 + 47 \cdot 41 + 42 \cdot 44 + 43^2 + 43^2 + 43^2 + 43^2 + 44 \cdot 42 =$$

$$41 \cdot 47 \cdot 4 + 42 \cdot 46 \cdot 4 + 42 \cdot 44 \cdot 2 + 43^2 \cdot 4 + 45^2$$

$$= (44^2 - 3^2) \cdot 4 + (44^2 - 2^2) \cdot 4 + (43^2 - 1) \cdot 2 + 43^2 \cdot 4 + 45^2 =$$

$$= 44^2 \cdot 8 + 43^2 \cdot 6 + 45^2 - 54 = 44^2 \cdot 15 - 44 \cdot 10 + 7 - 54$$

$$= 44^2 \cdot 15 - 487$$



СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач проверяются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(n, y) \quad n, y \in \mathbb{Z}$$

$$19 \cdot 2^n + 2025 = y^2$$

$$19 \cdot 2^n + 45^2 = y^2$$

$$19 \cdot 2^n = (y-45)(y+45).$$

Заметим, что число $19 \cdot 2^n$ имеет только 2 простых делителя, $\Rightarrow$ только одна скобка из $(y-45)$ и $(y+45) \div 19$, так как 19 - простое число, $\Rightarrow$ одна из скобок является степенной двойки.

$$D. \quad y-15 = 2^z, \text{ for } z \geq 0, z \leq n, n, z \in \mathbb{N}$$

$$\begin{aligned} y-45 &= 2^z & y+45 &= 19 \cdot 2^{n-z} & (n>0) \text{ und } 1 \\ \Rightarrow y &= 2^z + 45 & \Rightarrow 90 + 2^z &= 19 \cdot 2^{n-z} \end{aligned}$$

на сегодня, 2^{нз} 12:20:20
не опубликовано

2) внутренним, что $\mathbb{Z}$ - коммутативное кольцо, и даже
 (с. $2^2 \in \mathbb{Z}$, но $2025 \in \mathbb{Z}$, $5^2 \in \mathbb{Z} \Rightarrow$ нормальное).

Если $z=0$, то $90+1-k \leq 2$, а $15 \cdot 2^x \leq 2$ (также, если $x > 0$,
так как $19+2015 \neq y^2$) $\Rightarrow z \neq 0, \Rightarrow z \geq 1$

$\forall n \in \mathbb{Z}, \text{ vmo } m, k \text{ n} > 0 \quad 90 + 2^k \cdot i, \text{ no } 19 \cdot 2^{n-k} \text{ ne } i \cdot 2^k$
 $z \neq n. \Rightarrow z \leq n-1$

$\left(\begin{aligned} &\text{Если } z \geq 2, \text{ то } y \geq 2^z : 2, \text{ но не } : 4, (y \text{ не } : 4, 2^z : 4) \Rightarrow y \cdot 2^{n-z} \text{ не} \\ &: 4 \Rightarrow n-z=1 \end{aligned} \right)$ Значит, что так как $y-45=2^z$, $z > 0$,
 то y - ч.цисл. Но $2y = 2^z + 19 \cdot 2^{n-z}$
 $\Rightarrow y = 2^{z-1} + 19 \cdot 2^{n-z-1} \Rightarrow$ либо $z=1$, либо $n=z+1$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

(иначе $2^{z-1} \nmid 2$, $19 \cdot 2^{x-z} \nmid 2 \Rightarrow$ противоречие).

$\Rightarrow 1. z=1 \Rightarrow y-45=2 \quad y=47 \quad y+45=47+45=92$, но $92 \nmid 19$

$\Rightarrow z \neq 1$.

2. $x=z+1 \Rightarrow y = 2^{z-1} + 19 = 2 \cdot 19 - 45 \Rightarrow y = -7$, но тогда $2^{z-1} < 0$, а $y+45 = 19 \cdot 2^{x-z} \Rightarrow y+45 = 19 \cdot 2^{z+1-z} = 38$ это невозможно

$\Rightarrow x \neq z+1 \Rightarrow$ этот вариант, когда $y-45=2^z$
 $y+45=19 \cdot 2^{x-z}$ невозможен.

II. $y-45=19 \cdot 2^{x-z} \quad y+45=2^z$. Аналогично $x > 0$.

1. Если $z=0$, то $y+45=1 \quad y=-44 \Rightarrow -44-45=19 \cdot 2^x \nmid 2$
 $\Rightarrow$ противоречие $\Rightarrow z > 0$

2. Если $x-z=0$, то $y-45=19 \Rightarrow y=19+45 \Rightarrow y+45=90+19=2^x=2^z$, но $90+19 \nmid 2$
 $\Rightarrow$ противоречие, $\Rightarrow z < x$.

$\Rightarrow 2y = 2^z + 19 \cdot 2^{x-z} \Rightarrow y = 2^{z-1} + 19 \cdot 2^{x-z-1}$, аналогично $y \nmid 2$

$\Rightarrow$ либо $2^{z-1} = 1$, либо $x-z-1=0$.

1. $z=1 \Rightarrow y = 19 \cdot 2^{x-2} + 1 \Rightarrow 19 \cdot 2^{x-2} - 45 = 2^1 \Rightarrow 19 \cdot 2^{x-2} = 46$, но $46 \nmid 19$

$\Rightarrow z \neq 1$.

2. $x=z+1 \Rightarrow y = 2^{z-1} + 19 = 2^{x-2} + 19 = 19 \cdot 2^1 - 45$
 $\Rightarrow 2^{x-2} = 19 - 45 < 0 \Rightarrow$ невозможно
 $\Rightarrow$ противоречие.

$\Rightarrow$ Ответ: таких целых пар (x, y) нет.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№6.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2 & \text{наиб. знач. функции} \\ x^2 - 6x + a = 8. \end{cases}$$

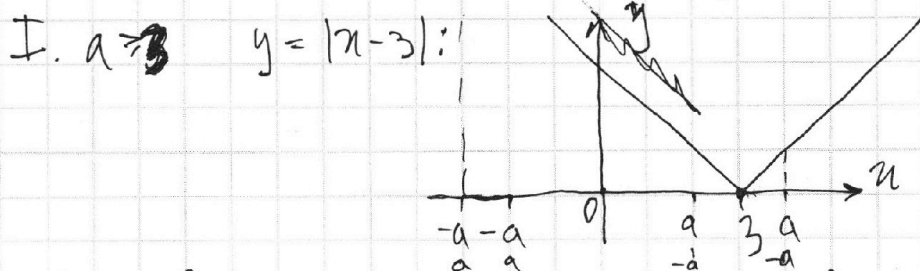
$$\Rightarrow x \in [-a; a]$$

$$x^2 - 6x + a = f(x)$$

$$x_B = \frac{6}{2} = 3. \Rightarrow f(3) = f(x+3), \text{ так как}$$

парабола симметрична относительно вершины.

$\Rightarrow$ чтобы $f(x)$ было максимально возможным, берем $|x-3|$ должен быть максимально большим, так как $f(x)$ -парабола рожками вверх.



Тогда видно по графику, что при $x \in [-a; a]$ $|x-3|$ принимает максимальное значение при $x = -a \Rightarrow |-a-3|$
 $\Rightarrow a^2 + 6a + a = 8. \Rightarrow a^2 + 7a - 8 = 0 \quad (a+8)(a-1) = 0, a \geq 3$
 $\Rightarrow a = -8 / 1$, но $a \geq 3$

$\Rightarrow$ II. $a \geq 0 \quad a \leq 3$ Тогда $|x-3|$ принимает мин. значение при $x = -a$ (видно по графику).
 $\Rightarrow a^2 + 6a + a = 8 \quad a^2 + 7a - 8 = 0 \quad a = -8 / 1 \Rightarrow a = 1$ подходит.

III. $-a \geq 3 \Rightarrow |x-3| = \text{макс. при } x = a \text{ (видно по графику)} \Rightarrow$
 $a^2 - 6a + a = 8 \quad a^2 - 5a - 8 = 0 \Rightarrow a = \frac{5 \pm \sqrt{57}}{2}, a \leq -3$
 $\frac{5 - \sqrt{57}}{2} \approx -6.11 \quad \frac{5 + \sqrt{57}}{2} \approx 8.11 \Rightarrow a \text{ не подходит.}$

IV. $a \leq 0, a \geq -3 \Rightarrow |x-3| = \text{макс. при } x = a \text{ (видно по графику)} \Rightarrow$
 $a^2 - 6a + a = 8 \quad a^2 - 5a - 8 = 0 \quad a = \frac{5 \pm \sqrt{57}}{2} \Rightarrow a = \frac{5 - \sqrt{57}}{2}$ подходит.
 $\Rightarrow$ Ответ: $a = 1, \frac{5 - \sqrt{57}}{2}$.



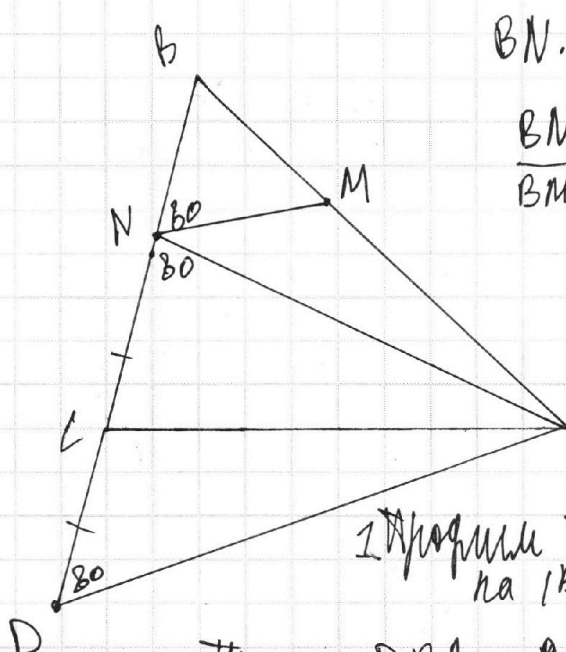
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№7.



$$BN \cdot MA = 2BM \cdot NC$$

$$\frac{BN + 2NC}{BM + AM} \vee \frac{BN}{BM}$$

$$BM \cdot BN + BM \cdot 2NC \vee BA \cdot BM + BN \cdot AM$$

$$BM \cdot 2NC \vee BN \cdot AM$$

$$\Rightarrow \frac{BN + 2NC}{BM + AM} = \frac{BN}{BM}$$

1. Проведем BC на NC : $CD = CN$, N лежит на (BC) за точкой C .

2. Тогда $\triangle DBA \sim \triangle DBM$ по углу $\angle DBA$ - общему и отношению сторон: $\frac{BN + 2NC}{BM + AM} = \frac{BN}{BM} \Rightarrow$

$\angle BNM = \angle BDA = 80^\circ \Rightarrow \triangle NAD$ - $\pi/2$, ($\angle AND = \angle ADN = 80^\circ$)

и AN - медиана $\Rightarrow$ она же и высота. $\Rightarrow \angle NCA = 90^\circ \Rightarrow$

в $\triangle CNA$: $\angle NAC = 180^\circ - 80^\circ - 90^\circ = 10^\circ$.

$\Rightarrow$ Ответ: $\angle CAN = 10^\circ$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

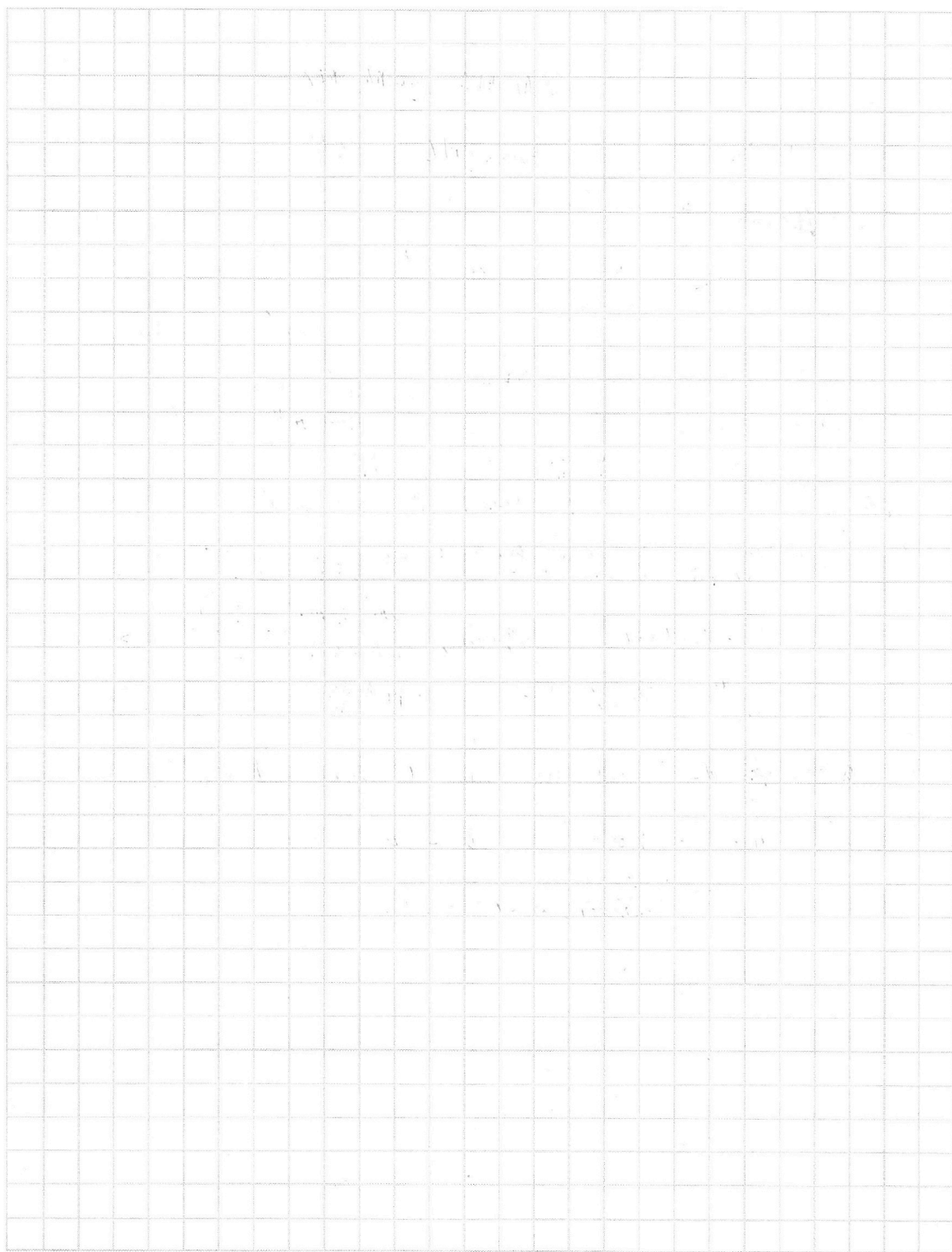
5
☐

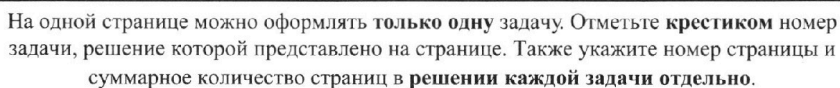
6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!





СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\Rightarrow u=7.$$

$$40 + 36 = 76$$

11. 55. 70

$$\frac{5 \pm \sqrt{25 + 32}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{57}}{2} \quad \text{F}$$

$$7z^{-1} + 1y$$

45-119

$$9^2 - 5^2$$

$$= 4.14 - 2$$

$$49 - 45 = 4$$

$$y + 45 = 10$$

y-45

y-45

$$\begin{array}{r} 45 \\ - 38 \\ \hline 7 \end{array}$$

$$38 - 45 =$$

$$y = 45 + 2^z$$

$$y + 45 = 19.2^{x-2}$$

$$45 + 2 - 1 = 46$$

$$2y = 19 \cdot 2^{n-z} + 2^z$$

$$y = 19.2^{n-1} + 2^{z-1}$$

$$19 \cdot 2^{x-1} + 2^{x-1} = 45 + 2^x$$

$$22^2 \cdot 60 - 22^2 - 3$$

$$= 22^2 \cdot 59 - 3$$

$$10.92$$

$$20 + 8N = 17N$$

$$\begin{array}{r} 367 \overline{) 13500} \\ \underline{- 1080} \\ 2700 \\ \underline{- 2160} \\ 5400 \\ \underline{- 5040} \\ 360 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 361 \overline{) 113} \\ \underline{36} \\ 37 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 361 \overline{) 13} \\ - 26 \\ \hline 101 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 361 \overline{) 17} \\ - 34 \\ \hline 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 36 \overline{) 19} \\ -18 \\ \hline 171 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} 0 & 5 & 44^2 - 3^2 = \\ 5 & 0 & = 47 \cdot 41 \\ 3 & 4 & \\ 4 & 3 & \\ & 3\pi & \end{array}$$

$$22^2 = 484$$

$$\frac{6.5}{2} = 15$$

$$2:4-1$$

$$\frac{K_A Y_A - K_B Y_A}{K_A - K_B}$$

$$1 - 2x \geq 0$$
$$\frac{1}{2} \geq x$$

$$a_{BC}x - y + b_{BC} = 0$$

$$\sqrt{n^2 - 2n + 3} \leq 1 - \frac{1}{2}n$$

$$x^2 - 2x + 3 \leq 4x^2 - 4x + 1$$

$$3x^2 - 2x + 4 \geq 0$$

50-9

$y = 5$

$$50 - 8 = 42$$

50-62
42



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

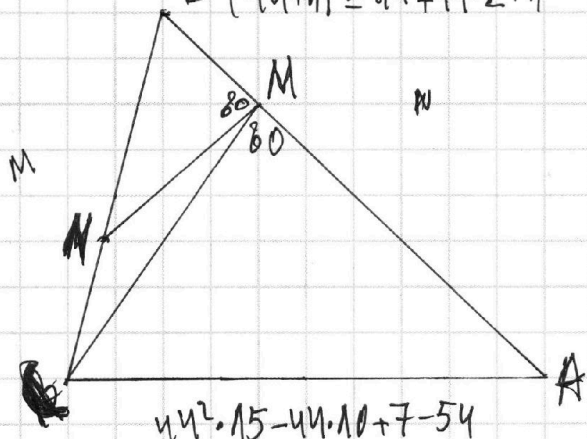
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(44^2 \cdot 26 + 2(44 \cdot 7 + 1)^2 \cdot 8$$

$$44^2 \cdot 8 + (44 - 1)^2 \cdot 6 = 44^2 \cdot 6 - 44 \cdot 12 + 6$$

$$(44 + 1)^2 = 44^2 + 44 \cdot 2 + 1$$

$$BN \cdot MA = 2 BM \cdot NC$$



$$\frac{BN + NC}{BM + MA} \vee \frac{BN}{BM}$$

$$BM \cdot BN + BM \cdot NC \vee BN \cdot BM + BN \cdot MA$$

$$BM \cdot NC \vee BN \cdot MA$$

$$BN \cdot MA = 2 BM \cdot NC$$

$$\frac{BN}{2 BM} = \frac{NC}{MA}$$

$$\frac{BN + NC}{BM + MA} = \frac{BN}{BM}$$

$$BM \cdot BN + 2 NC \cdot BM \vee BN \cdot BM + BN \cdot MA$$

$$44 \cdot 47 =$$

$$= (44^2 - 3^2)$$

$$440 + 54 = 494$$

$$\begin{array}{r} 494 \\ - 7 \\ \hline 487 \end{array}$$



[1; 5]

[1; 45]

$$36 + 16 + 2 =$$

$$= 54$$

$$16 \cdot 36$$

