



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ



9 КЛАСС. Вариант 9

- [3 балла] При каком наименьшем натуральном n число $n! + (n+1)! + (n+2)!$ делится на 361?
- [3 балла] Из суммы квадратов пяти последовательных натуральных чисел вычли число 10 и получили куб натурального числа N , большего 6. Найдите наименьшее возможное значение N .
- [4 балла] Решите неравенство

$$\left| \sqrt{x^2 - 2x - 3} + 6 \right| \geq \left| \sqrt{x^2 - 2x - 3} + 2x - 1 \right| + |7 - 2x|.$$

- [5 баллов] На координатной плоскости рассматриваются ромбы с длиной стороны 5 такие, что абсциссы и ординаты всех четырёх вершин каждого ромба — целые числа из промежутка $[1; 50]$. Сколько существует таких ромбов? Напомним, что квадрат также является ромбом.
- [5 баллов] Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющих уравнению
$$19 \cdot 2^x + 2025 = y^2.$$
- [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при каждом из которых для множества точек плоскости Oxy , задаваемых уравнением $x^2 + y^2 = a^2$, наибольшее значение выражения $x^2 - 6x + a$ равно 8.
- [6 баллов] На сторонах AB и BC треугольника ABC выбраны точки M и N соответственно так, что $\angle MNB = \angle ANC = 80^\circ$. Найдите $\angle CAN$, если известно, что $BN \cdot MA = 2BM \cdot NC$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$\sqrt{1}$

$$n! + (n+1)! + (n+2)! : 361 \quad 361 = 19^2$$

$$n! (1 + n + 1 + (n+1)(n+2)) = n! (n^2 + 4n + 4) = 19 - \text{простое число}$$

$$= n! (n+2)^2$$

$n = 17$ подходит

При $n < 17$ $n! \not\equiv 19$, т.к. n -простое

$n+2 \not\equiv 19$, т.к. $n+2 < 19$

↓

$n = 17$ - минимальное, подходящее n

Ответ: $n = 17$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$\sqrt{2}$

третье

a - первое из посл. чисел

$$+a^2 + (a+1)^2 + (a+2)^2 + (a+3)^2 + (a+4)^2 = 5a^2$$

$$(a-2)^2 + (a-1)^2 + a^2 + (a+1)^2 + (a+2)^2 - 10 = 5a^2 \cancel{+N^3} = N^3$$

Тогда $N \neq 5$, но $N > 6$, так что $N \neq 5$

Пусть $N = 5x$, тогда $5a^2 = 125x^3$

$$a^2 = 25x^3$$

$a = 5\sqrt[3]{x^3} \Rightarrow x - \text{полный квадрат}, \text{т.к. } a \in \mathbb{N}$

Минимальный $x = 4$

$$38^2 + 39^2 + 40^2 + 41^2 + 42^2 - 10 = 20^3$$

← Минимальный $N = 20$

Ответ: $N = 20$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

 1 2 3 4 5 6 7СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

 $\sqrt{3}$

Запомним, что $\sqrt{x^2 - 2x - 3} + 6$ всегда $> 0 \Rightarrow$ Могу быть с плюсом

Запишем $0 \leq 3$ $x^2 - 2x - 3 \geq 0 \rightarrow (x+1)(x-3) \geq 0 \rightarrow x \in (-\infty; -1] \cup [3; +\infty)$

Рассмотрим 2 случая

$$x \geq 3$$

$$\sqrt{x^2 - 2x - 3} + 2x - 1 \geq 0$$

$$\sqrt{x^2 - 2x - 3} + 6 \geq \sqrt{x^2 - 2x - 3} + 2x - 1 + |7 - 2x|$$

$$7 - 2x \geq |7 - 2x|$$

↓

$7 - 2x \geq 0$, тогда равенство

Иначе отрицательно $\geq 1 > 0$ и

$$7 \geq 2x$$

$$x \leq 3,5$$

↓

$$x \in [3; 3,5]$$

$$x \leq -1$$

$$7 - 2x \geq 0$$

$$\sqrt{x^2 - 2x - 3} + 6 \geq |\sqrt{x^2 - 2x - 3} + 2x - 1| + 7 - 2x$$

$$\sqrt{x^2 - 2x - 3} + 2x - 1 \geq |\sqrt{x^2 - 2x - 3} + 2x - 1|$$

Аналогично следует, что $\sqrt{x^2 - 2x - 3} + 2x - 1 \geq 0$

$$\sqrt{x^2 - 2x - 3} \geq 1 - 2x$$

$$\begin{cases} 1 - 2x \leq 0 \\ x^2 - 2x - 3 \geq (1 - 2x)^2 \end{cases} \rightarrow x \geq \frac{1}{2}, \text{ не подходит по условию случая}$$

$$x^2 - 2x - 3 \geq 4x^2 - 4x + 1$$

$$3x^2 - 2x + 4 \leq 0$$

$$D = 4 - 4 \cdot 3 \cdot 4 < 0$$

корней нет, всегда вверх

всегда > 0

Ответ: $x \in [3; 3,5]$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

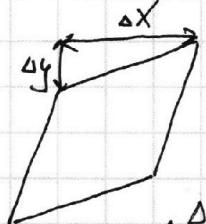
6

7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть есть какой-то ромб! $\sqrt{4}$



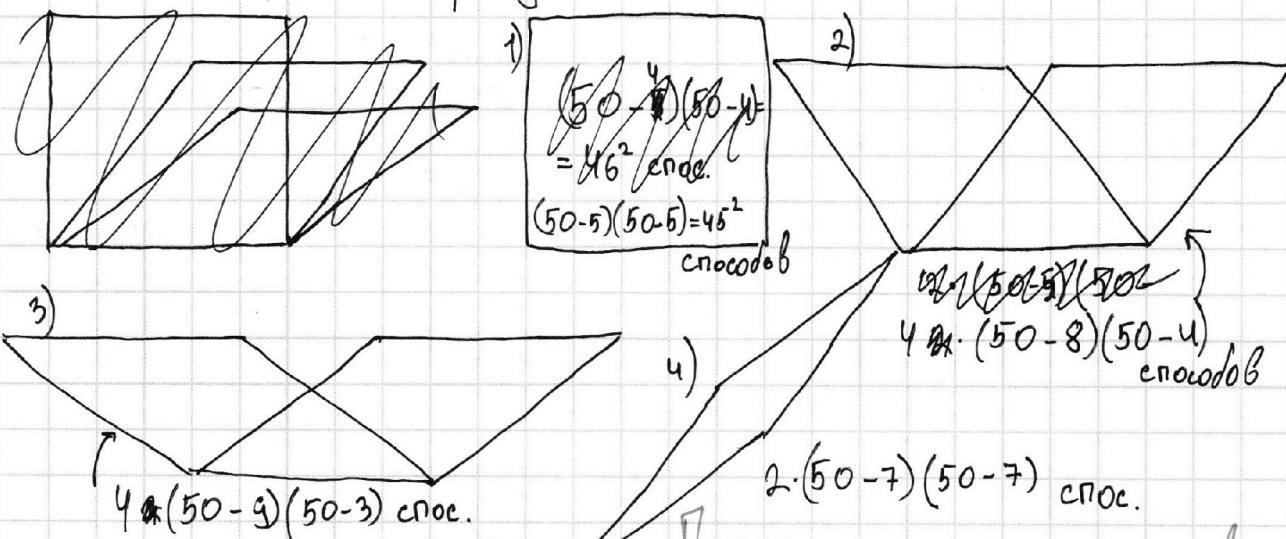
Так как координаты целые, Δx и Δy также целые

$$\Delta x^2 + \Delta y^2 = 5^2$$

Передором всех чисел от 0 до 5

Мы можем понять, что подойдет только пары $(0; 5)$ $(5; 0)$ $(3; 4)$ $(4; 3)$

Теперь мы можем выбрать любые 2 пары из них и составить ромб, зарисован все варианты:



Пояснение, как я считал кол-во способов

Первый множитель - сколько способов повернуть картинку по лучив другую

Второй и третий множители - сколько способов выставить вершину по х и по у, чтобы фигура полностью поместилась.

Всего $4^2 + 4 \cdot 42 \cdot 46 + 4 \cdot 41 \cdot 47 + 4 \cdot 43^2 = 24857$

Ответ: 24857 способов разместить ромб

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.



- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input checked="" type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{5}$$

$$19 \cdot 2^x + 2025 = y^2$$

$$19 \cdot 2^x = y^2 - 2025 = (y-45)(y+45)$$

$$\begin{cases} y-45 = 2^\alpha \\ y+45 = 2^\beta \end{cases}$$

$$90 = 2^\beta \cdot 19 - 2^\alpha = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$$

$$\alpha > \beta$$

$$2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 2^\beta (19 - 2^{\alpha-\beta})$$

$$\beta = 1$$

$$19 - 2^{\alpha-1} = 45$$

$$2^{\alpha-1} < 0 \quad \text{W}$$

$$\begin{cases} y-45 = 2^\alpha \cdot 19 \\ y+45 = 2^\beta \end{cases}$$

$$\alpha = \beta \quad 2^\alpha (19-1) = 90$$

$$2^\alpha = 5 \quad \text{W}$$

$$\alpha < \beta$$

$$2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 2^\beta (19 \cdot 2^{\beta-\alpha} - 1)$$

$$\begin{cases} \alpha = 1 \\ 19 \cdot 2^{\beta-1} = 45 + 1 \end{cases}$$

$$46 / 19$$

$$\text{W}$$

$$46 > 19$$

$$90 = 2^\beta - 2^\alpha \cdot 19$$

$$\begin{cases} \alpha > \beta \\ 90 < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha = 1 \\ 2^{\beta-1} - 19 = 45 \end{cases}$$

$$2^{\beta-1} = 64$$

$$\begin{cases} \beta-1 = 6 \\ \beta = 7 \end{cases}$$

$$x = \alpha + \beta = 8$$

$$y = 45 + 2^\alpha = 47$$

Нам не важен знак $y \Rightarrow y = \pm 47$

После полного разбора оказалось, что нашлась лишь одна пара!

Ответ: $(8; 47)$ и $(8; -47)$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

z₁
z₂
z₃
z₄



$x^2 + y^2 = a^2 \rightarrow$ График явл. окр. с центром в $(0;0)$
 \sqrt{a}
радиуса a

$$x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2 + a - 9$$

$$x \in [-a; a]$$

максимум в наи более удаленной от $x=3$ точке, то есть

$$(x=-a) \Rightarrow (a+3)^2 + a - 9 = 8$$

$$a^2 + 6a + 9 + a - 9 = 8$$

$$a^2 + 7a - 8 = 0$$

$$a = -8 ; a = 1$$

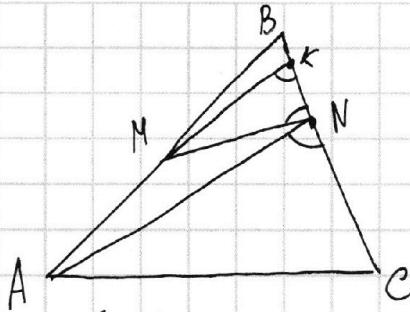
Ответ: $a = -8; 1$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи **отдельно**.

 1 2 3 4 5 6 7СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!



\sqrt{N}
Проведён отрезок из $M \parallel AN$
 $\angle MKN = \angle ANC = 80^\circ = \angle MNK$
 $\triangle MKN - \text{pr}\delta$

$$\text{Пусть } BK = x. \quad 2BM \cdot NC = BN \cdot MA \Rightarrow \frac{2BM}{MA} = \frac{BN}{NC}$$

Если $\frac{BM}{MA} = k$, $\frac{BN}{NC} = 2k$, $\frac{BK}{KN} = k$ по т. Фалеса

$$BK = x \quad KN = kx \quad NC = 2k(k+1)x$$

$$\triangle MKN - \text{pr}\delta \Rightarrow MK = MN = \frac{kx}{2\cos 80}$$

$$AN = k \cdot MK = \frac{k^2 x}{2\cos 80}$$

$$\text{По т. косинусов } AC = \sqrt{\frac{k^4 x^2}{4\cos^2 80} + \frac{4k^2(k+1)^2 x^2}{4\cos^2 80} + 2 \cdot \frac{k^3(k+1)x^2}{2\cos 80}} =$$

$$\begin{aligned} \text{для } \angle NAC \\ \cos \alpha &= \frac{AN^2 + AC^2 - NC^2}{2 \cdot AN \cdot AC} = \frac{\frac{k^4 x^2}{2\cos^2 80} + \frac{2k^3(k+1)x^2}{2\cos 80} - \frac{4k^2(k+1)^2 x^2}{4\cos^2 80}}{\frac{k^2 x}{2\cos 80} \cdot AC} = \\ &= \frac{\frac{k^4 x^2}{2\cos^2 80} + 2k^2(k+1)x \cdot \cos(80)}{AC} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{AC} \Rightarrow \alpha = 30^\circ \end{aligned}$$

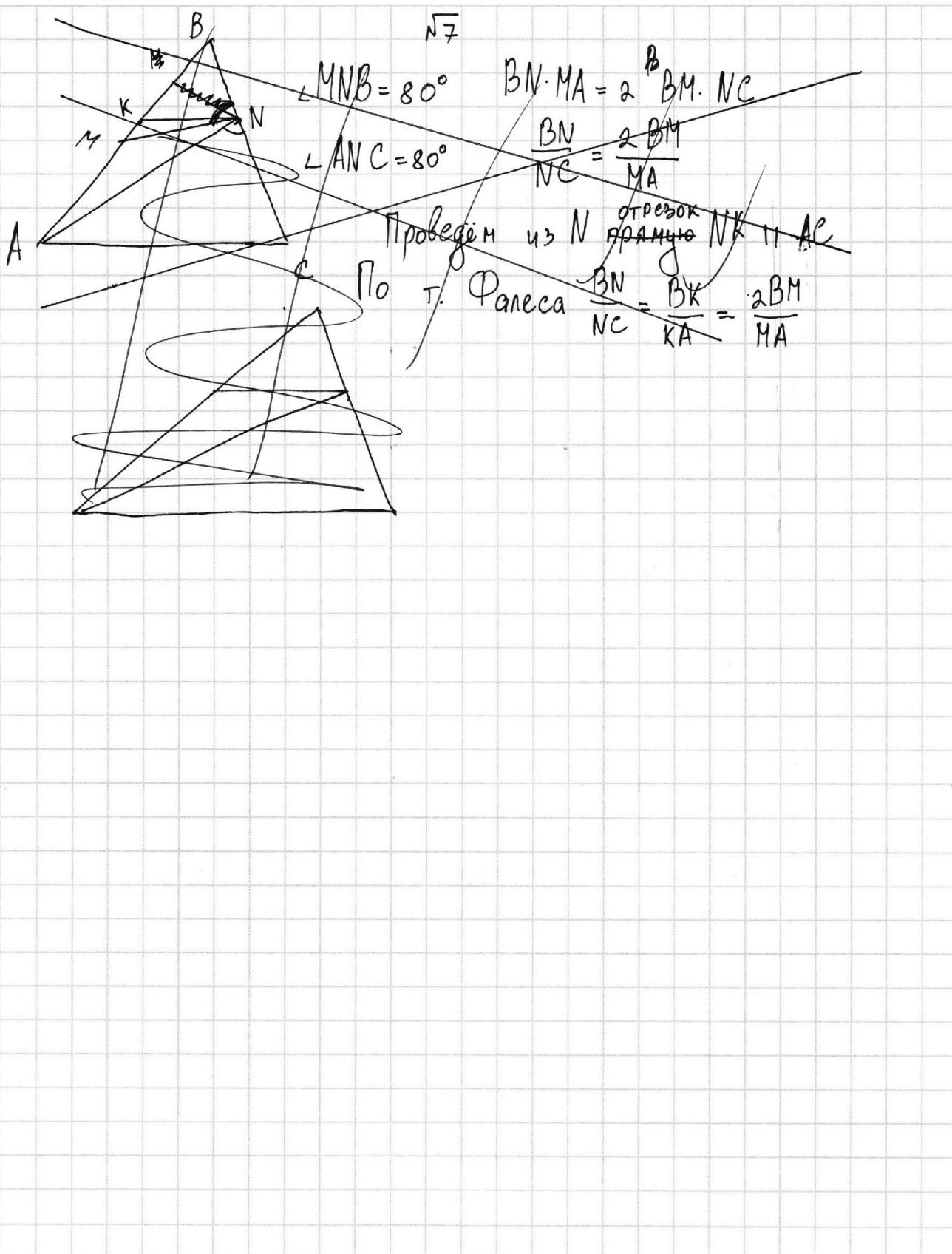
Ответ: $\alpha = 30^\circ$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$|\sqrt{x^2 - 2x - 3} + 6| \geq |\sqrt{x^2 - 2x - 3} + 2x - 1| + |7 - 2x|$$

\downarrow

Этот модуль всегда раскроется с плюсом, так как $\sqrt{\cdot} + 6 \geq 6 > 0$

Уз ОДЗ $x \leq 3$

\downarrow

$7 - 2x \geq 1$

\downarrow

Раскроется с плюсом

$$\sqrt{x^2 - 2x - 3} + 6 \geq |\sqrt{x^2 - 2x - 3} + 2x - 1| + 7 - 2x$$

$$\sqrt{x^2 - 2x - 3} + 2x - 1 \geq |\sqrt{x^2 - 2x - 3} + 2x - 1|$$

Это верно тогда, когда $\sqrt{x^2 - 2x - 3} + 2x - 1 \geq 0$, тогда будет равенство

Иначе $0 > |\cdot| > 0$

$$\sqrt{x^2 - 2x - 3} \geq 2x - 1 - 2x$$

$\sqrt{4}$

$\frac{BN}{NC} = \frac{2BM}{MA}$

$BN \cdot MA = 2BM \cdot NC$

$\frac{BN}{NC} = \frac{2}{1}$

$45^2 + 4 \cdot 42 \cdot 46 + 4 \cdot 41 \cdot 47 + 4 \cdot 43^2$

$$4(42 \cdot 46 + 41 \cdot 47 + 43 \cdot 43) =$$

$$= 4((44-2)(44+2) + (44-1)(44+1) + (44-1)^2) =$$

$$= 4(44^2 - 4 + 44^2 - 9 + 44^2 - 8) =$$

$$= 4(3 \cdot 44^2 - 100)$$

$$45^2 + 12 \cdot 44^2 - 400$$

$$45^2 + 12(45-1)^2 - 400$$

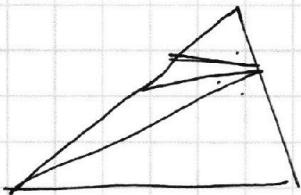
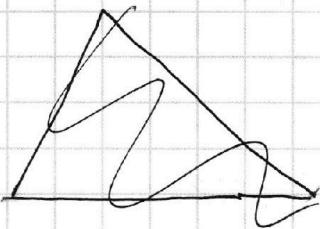
$$13 \cdot 45^2 - 12 \cdot 90 + 12 - 400$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



$$19 \cdot 2^x + 2025 = y^2$$

$$19 \cdot 2^x = (y - 45)(y + 45)$$

$$35^4 = 900 + 25 + 300 = 1225$$

$$a = 2^x$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a+90 = 2^P \cdot 19 \\ \end{array} \right.$$

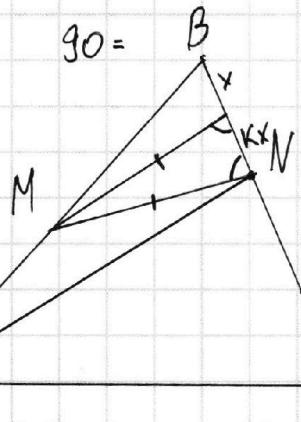
$$g_0 = 2^\beta \left(2^{\alpha-\beta} + 19 \right)$$

$$g_0 = 2^\alpha \left(4t^2^{\frac{1}{\alpha-1}} \cdot 19 - 1 \right)$$

$$\frac{BN}{NC} = 2k$$

$$\frac{BM}{MA} = k$$

$$1 - \frac{1}{k+1} = \frac{k}{k+1}$$



$$2025 \cdot 13 - 4(100 + 89 \cdot 3) =$$

$$= 2025 \cdot 13 \cdot 4 \cdot 367 =$$

$$1468 = 24857$$

$$x + kx = y + 2ky$$

$$\frac{x}{y} = \frac{1+2k}{1+k}$$

$$BM = \sqrt{x^2 + \frac{k^2 x^2}{m^4 \cdot \cos^2 90}}$$

$$\beta M = X \cdot \sqrt{1 + \frac{k^2}{4 \cdot \cos^2 80^\circ} + 2k \cdot \cos 80^\circ}$$

