



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 9



1. [3 балла] При каком наименьшем натуральном n число $n! + (n+1)! + (n+2)!$ делится на 361?
2. [3 балла] Из суммы квадратов пяти последовательных натуральных чисел вычли число 10 и получили куб натурального числа N , большего 6. Найдите наименьшее возможное значение N .
3. [4 балла] Решите неравенство

$$\left| \sqrt{x^2 - 2x - 3} + 6 \right| \geq \left| \sqrt{x^2 - 2x - 3} + 2x - 1 \right| + |7 - 2x|.$$

4. [5 баллов] На координатной плоскости рассматриваются ромбы с длиной стороны 5 такие, что абсциссы и ординаты всех четырёх вершин каждого ромба — целые числа из промежутка $[1; 50]$. Сколько существует таких ромбов? Напомним, что квадрат также является ромбом.
5. [5 баллов] Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющих уравнению

$$19 \cdot 2^x + 2025 = y^2.$$

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при каждом из которых для множества точек плоскости Oxy , задаваемых уравнением $x^2 + y^2 = a^2$, наибольшее значение выражения $x^2 - 6x + a$ равно 8.
7. [6 баллов] На сторонах AB и BC треугольника ABC выбраны точки M и N соответственно так, что $\angle MNB = \angle ANC = 80^\circ$. Найдите $\angle CAN$, если известно, что $BN \cdot MA = 2BM \cdot NC$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} n! + (n+1)! + (n+2)! &= n! (1 + n+1 + (n+1)(n+2)) = \\ &= n! (1 + n+1 + n^2 + 3n + 2) = n! (n^2 + 4n + 4) = \\ &= n! (n+2)^2. \end{aligned}$$

$$361 = 19^2. \quad 19 - \text{простое число}$$

Очевидно, что при $n=17$ $n! (n+2)^2 : 19^2$.

Если $n < 17$, то $n! \not\vdots 19$ и $(n+2)^2 \not\vdots 19 \Rightarrow$
 $\Rightarrow n! (n+2)^2$ при $n < 17 \not\vdots 19^2$.

Значит, наименьшее натуральное n , при котором $n! + (n+1)! + (n+2)! : 361$, $n=17$.

Ответ: $n=17$.



1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Запишем сумму квадратов пяти послед. натуральных чисел.

$$n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 + (n+3)^2 + (n+4)^2 = n^2 + n^2 + 2n + 1 + n^2 + 4n + 4 + n^2 + 6n + 9 + n^2 + 8n + 16 = 5n^2 + 20n + 30$$

Вычтем 10:

$$5n^2 + 20n + 30 - 10 = 5n^2 + 20n + 20 = 5(n^2 + 4n + 4) = 5(n+2)^2$$

П.к. $5(n+2)^2 = N^3$, где $N \in \mathbb{N}$, то $(n+2) : 5$. $n+2 \neq 5$, т.к. N в таком случае $5 < 6$. Значит $n+2 = 5x$, где $x \neq 1$, $x \in \mathbb{N}$. В таком случае $N^3 = 5^3 \cdot x^2$.
~~т.к.~~ П.к. все числа натуральные, то x^2 должен быть кубом натур. числа, т.е. сам x - куб натур. числа.
 П.к. $x \neq 1$, минимальное x : ~~т.к.~~ $x = 2^3$.
 Тогда $N^3 = 5^3 \cdot (2^3)^2 = (5 \cdot 2^2)^3$; $N \in \mathbb{N} \Rightarrow$
 $\Rightarrow N = 5 \cdot 2^2 = 20$

Ответ: $N = 20$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☒

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

График $f(x) = x^2 - 2x - 3$ — парабола, пересекающая Ox в точках $(-1; 0)$ и $(3; 0)$. $a = 1 > 0$ (старший коэффициент).

П.к. $f(x)$ под корнем, то $x \in (-\infty; -1] \cup [3; +\infty)$.

Очевидно, что всегда выполняется следующее

$$|\sqrt{x^2 - 2x - 3} + 6| = \sqrt{x^2 - 2x - 3} + 6$$
$$(\sqrt{x^2 - 2x - 3} \geq 0 \text{ и } 6 > 0)$$

I. $x \in [3; 3,5]$

$$\sqrt{x^2 - 2x - 3} + 6 \geq \sqrt{x^2 - 2x - 3} + 2x - 1 + 7 - 2x$$

$6 \geq 6$, т.е. любой $x \in [3; 3,5]$ подходит

II. $x \in (3,5; +\infty)$

$$\sqrt{x^2 - 2x - 3} + 6 \geq \sqrt{x^2 - 2x - 3} + 2x - 1 - 7 + 2x$$

$$14 \geq 4x$$

$$x \leq 3,5$$

При $x \in (3,5; +\infty)$ решений нет.

Вычислим, при каких x $\sqrt{x^2 - 2x - 3}$ больше или равно $|2x - 1|$

$$\sqrt{x^2 - 2x - 3} \geq |2x - 1|$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☒	☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{x^2 - 2x - 3} \geq \sqrt{(2x - 1)^2}$$

$$x^2 - 2x - 3 \geq (2x - 1)^2$$

$$x^2 - 2x - 3 \geq 4x^2 - 4x + 1$$

$$-3x^2 + 2x - 4 \geq 0$$

$$3x^2 - 2x + 4 \leq 0$$

$$D = 4 - 4 \cdot 4 \cdot 3 = -44 < 0, \text{ т. е.}$$

$$|2x - 1| > \sqrt{x^2 - 2x - 3} \text{ всегда}$$

П.е. при $x \in (-\infty; -1]$, когда $2x - 1 < 0$
это первый модуль $|\sqrt{x^2 - 2x - 3} + 2x - 1|$
всегда равен $-\sqrt{x^2 - 2x - 3} - 2x + 1$

$$\text{III. } x \in (-\infty; -1]$$

$$\sqrt{x^2 - 2x - 3} + 6 \geq -\sqrt{x^2 - 2x - 3} - 2x + 1 + 7 - 2x$$

$$2\sqrt{x^2 - 2x - 3} \geq -4x + 2$$

$$\sqrt{x^2 - 2x - 3} \geq -2x + 1$$

Но при $x \in (-\infty; -1]$ $|2x - 1| = -2x + 1$,
а уже доказано, что $|2x - 1| > \sqrt{x^2 - 2x - 3}$
всегда

При $x \in (-\infty; -1]$ решений нет

$$\text{Ответ: } x \in [3; 3,5]$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☒

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$19 \cdot 2^x + 2025 = y^2 \quad \text{Очевидно.}$$

$$19 \cdot 2^x = y^2 - 45^2$$

$$19 \cdot 2^x = (y-45)(y+45)$$

$$\boxed{z = y-45}$$

$$19 \cdot 2^x = z(z+90) \quad \boxed{z \neq 0}$$

Пусть $z \div 2$, тогда $z+90 \div 2^x$.

$\boxed{\text{П.к. } y \in \mathbb{Z}; 2025 \in \mathbb{Z}, \text{ но } 19 \cdot 2^x \in \mathbb{Z} \Rightarrow \Rightarrow x \geq 0}$

Если $x=0$, то $y^2 = 2044$ но нет
таких целых y . Значит $x \geq 1$.

$$z+90 = 2^x \cdot n, \text{ где } n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$$

$$19 \cdot 2^x = z \cdot 2^x \cdot n$$

$19 = z \cdot n$ но п.к. $z \in \mathbb{Z}$ и $n \in \mathbb{Z}$,
а 19 - простое, но $z = -1$ или $z = 1$ или
 $z = 19$ или $z = -19$

~~При $z = -1$ $z+90 = 89 \nmid 2^x$~~

При всех z $z+90 \nmid 2$, противоречие.

Значит $z \div 2$. $z = 2^m \cdot k$, где $k \in \mathbb{Z}, k \neq 0$;

$$z \cdot (z+90) = 2^m \cdot k \cdot 2(2^{m-1} \cdot k + 45).$$

$$2^{m+1} \cdot k(2^{m-1} \cdot k + 45) = 19 \cdot 2^x$$

Отсюда $\begin{matrix} \div 2 & (1) \text{-предела} & \div 1 \\ m+1 = x & & m-1 \\ \text{п.к. } 2^{m+1} = 2^x \end{matrix} \quad k(2^{m-1} \cdot k + 45) = 19$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$k \in \mathbb{Z} \Rightarrow k = -1 \text{ или } k = -19 \text{ или } k = 19$$

Тип $k > 0$

$$k(2^{m-1} \cdot k + 45) > 19$$

Тип $k = -1$

$$-2^{m-1} \cdot k + 45 = -19$$

$$-2^{m-1} = -64$$

$$m = 7$$

Тип $k = -19$

$$-19 \cdot 2^{m-1} + 45 = -1$$

$$-19 \cdot 2^{m-1} = -46, \text{ но } 46 \nmid 19$$

$$m = 7; x = m + 1 = 8$$

$$19 \cdot 2^8 + 2025 = y^2$$

$$6889 = y^2$$

$$y = 83$$

Ответ: (8; 83)

Ответ:

Предположение верно только для

В таком случае где $n' \in \mathbb{Z}; n' \neq 0$

$$k(2^{m-1} \cdot k + 45) \neq 2$$

$$m \neq 1. \text{ Пусть } m = 1$$

$$k(2^{m-1} \cdot k + 45) = 19n'$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

График $f(x) = x^2 - 6x + a$ — парабола с ветвями вверх, вершина которой в точке с абсциссой 3.

$x^2 + y^2 = a^2$ — это уравнение окружности, с центром в точке $(0; 0)$.

$$x \in [-\sqrt{a^2}; \sqrt{a^2}], \quad x \in [-|a|; |a|]$$

П.к. $f(x)$ — парабола с ветвями вверх и с вершиной в точке, абсцисса которой 3, то $f(x)$ максимална при $x = -|a|$.

$$(-|a|)^2 + 6|a| + a \leq 8$$

$$a^2 + 6|a| + a \leq 8$$

I. $a \geq 0$:

$$a^2 + 6a + a \leq 8$$

$$a^2 + 7a - 8 \leq 0$$

$a \in [-8; 1]$, но т.к. $a \geq 0$, то

$$a \in [0; 1]$$

II. $a < 0$:

$$a^2 - 6a + a \leq 8$$

$$a^2 - 5a - 8 \leq 0$$

$$a^2 - 5a - 8 = 0$$

$$D = 25 + 32 = 57$$

$$a_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{57}}{2}$$

$$a \in \left[\frac{5 - \sqrt{57}}{2}; \frac{5 + \sqrt{57}}{2} \right]$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☒

7
☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{5 - \sqrt{57}}{2} < \frac{5 - \sqrt{25}}{2} < 0$$

$$\frac{5 + \sqrt{57}}{2} > 0$$

$$a \in \left[\frac{5 - \sqrt{57}}{2}; 0 \right)$$

$$\text{Ответ: } a \in \left[\frac{5 - \sqrt{57}}{2}; 0 \right) \cup$$

$$\text{Ответ: } a \in \left[\frac{5 - \sqrt{57}}{2}; 1 \right]$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Но в этом случае можно провести аналогичные рассуждения и показать, что $k < 0$ и при $k = -19$ и $19 \in \mathbb{N}$

Предполож. n неверно для $m = 1$

При $m = 1$; $z = 2k$

$$19 \cdot 2^x = 2k(2k + 90)$$

$$19 \cdot 2^x = 4k(k + 45)$$

~~Отсюда $x = 2$ ($2^x = 4$)~~

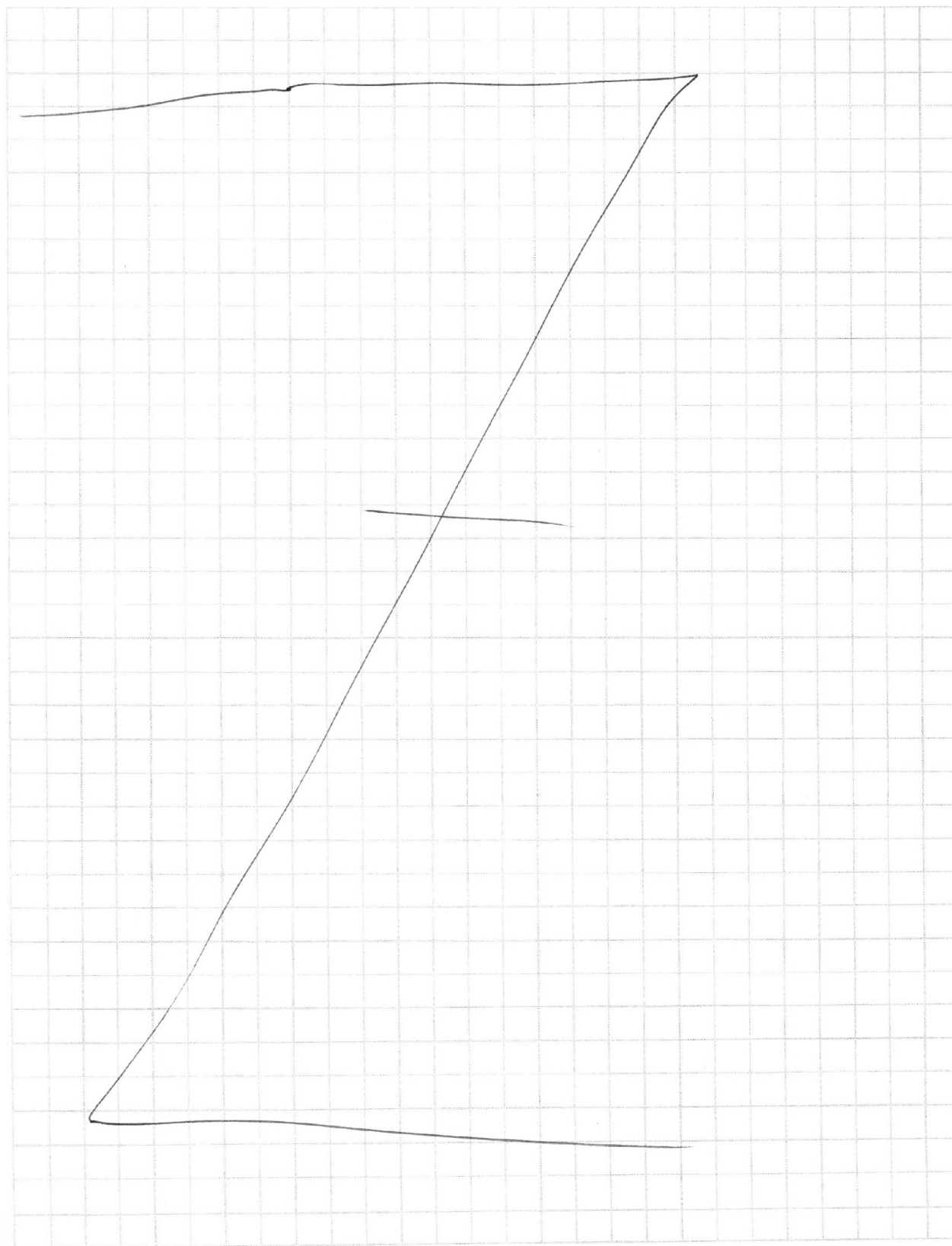


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи **отдельно**.



СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.



СТРАНИЦА
__ ИЗ __

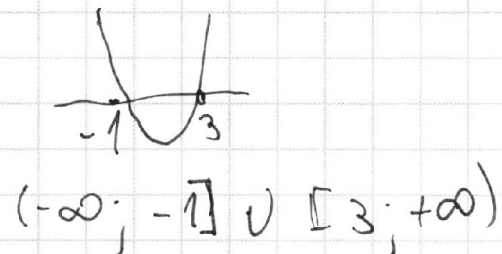
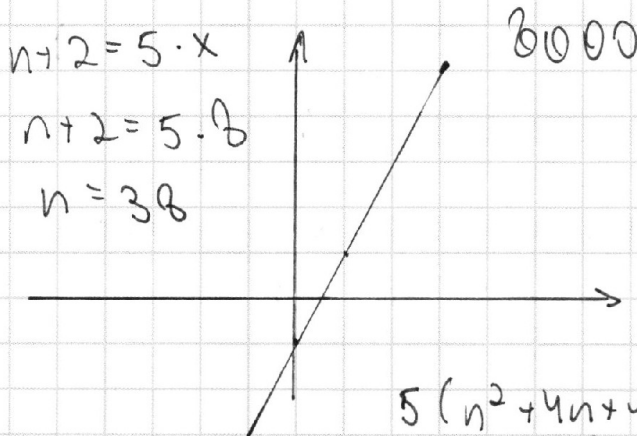
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{x^2 - 2x - 3} = \sqrt{x^2 - 2x + 1 - 4} = \sqrt{(x-1)^2 - 2^2} =$$

$$= \sqrt{(x-3)(x+1)}$$

П.к. это под знаком $40^2 \cdot 5 =$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 \cdot x_2 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -1 \end{cases}$$



$$5(n^2 + 4n + 4) =$$

$$= 5(n+2)^2$$

$$5n^2 + 20n + 20$$

$$\Delta x^2 + \Delta y^2 =$$

$$\begin{array}{r} 125 \\ 64 \\ \hline 500 \\ 750 \end{array}$$

$$x^2 - 2x - 3 + 4x^2 - 4x + 1 =$$

$$= 5x^2 - 6x - 2$$

$$n^2 + n^2 + 2n + 1 + n^2 + 4n + 4 + n^2 + 6n + 9 + n^2 + 8n + 16 =$$

$$= 5n^2 + 20n + 30$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 - 6x + a \leq 8$$

$$a \leq 8 + 6x - x^2$$

$$\begin{array}{r} x \cdot 45 \\ 45 \\ \hline 225 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2025 \\ 19 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 83 \\ 83 \\ \hline 249 \end{array}$$

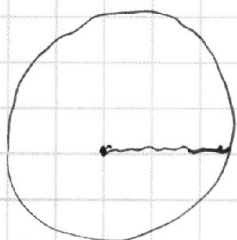
$$a \leq 8664$$

$$6229$$

$$6889$$

$$2025 = 45^2 \quad 405 \cdot 5 = 6889$$

$$\begin{array}{r} x \cdot 45 \\ 45 \\ \hline 225 \\ 180 \\ \hline 2025 \end{array}$$



$$2025 = 45^2$$

$$\sqrt{a}$$



mod 9

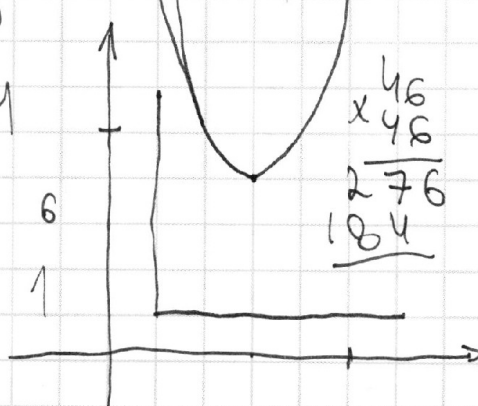
x	x ²
1	1
2	4
3	0
4	7
5	7
6	0
7	4
8	1

$$y \equiv 2$$

$$y \equiv 7$$

$$2a + 6\sqrt{a}$$

$$a + 3\sqrt{a}$$



$$\begin{array}{r} 46 \\ 46 \\ \hline 276 \\ 184 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2025 \cdot 19 \\ 19 \\ \hline 125 \\ -114 \\ \hline 11 \end{array}$$

$$a - 6\sqrt{a} + a$$

$$a - 3\sqrt{a}$$

$$0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4$$

$$[1, 2]; [4]; 6; [7]; 5; 1$$

$$-8; 1$$

$$\begin{array}{r} 6x \\ 6x+2 \\ 6x+4 \end{array}$$



$$\begin{array}{r} 5x \\ 5x+2 \\ 5x+4 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

36

361

M

N

$$BN \cdot MA = 2BM \cdot NC$$

$$361 = 19^2$$

$$\begin{array}{r} 361 \\ - 19 \\ \hline 171 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 45 \\ \times 45 \\ \hline 225 \\ 180 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 19 \\ \times 19 \\ \hline 171 \\ 19 \\ \hline 361 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4864 \\ + 2025 \\ \hline 6889 \end{array}$$

$$x \geq 3$$

$$\begin{aligned} n! \cdot (n+1 + (n+1)(n+2) - 1) &= \\ = n! \cdot (n+1 + n^2 + 3n + 2 + 1) &= \\ = n! \cdot (n^2 + 4n + 4) &= n! \cdot (n+2)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} 25 \\ \times 25 \\ \hline 45 \\ 25 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 23 \\ \times 23 \\ \hline 69 \\ 46 \\ \hline \end{array}$$

$$n = 17$$

$$\begin{array}{r} 46 \\ \times 46 \\ \hline \end{array}$$

$$\sqrt{x^2 - 2x - 3} = \sqrt{x^2 - 2x + 1 - 4} =$$

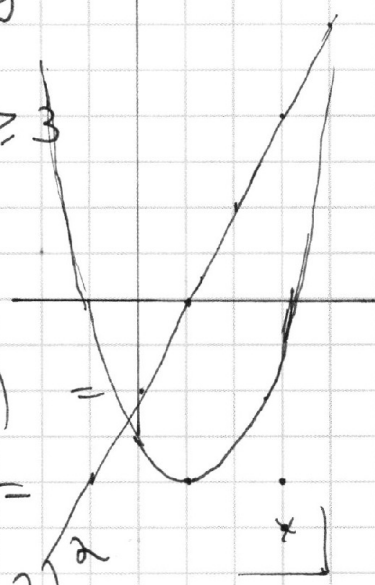
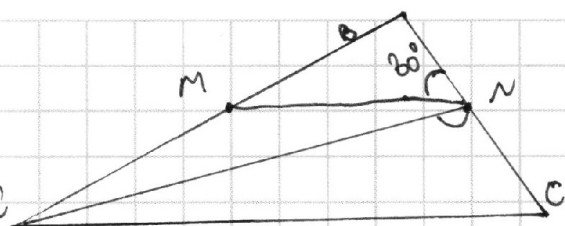
$$\sqrt{(x-1)^2 - 2^2} = \sqrt{(x-3)(x+1)} \times \frac{27}{27}$$

$$\begin{array}{r} 46 \\ \times 46 \\ \hline 276 \\ 276 \\ \hline \end{array}$$

$$\sqrt{x^2 - 2x - 3} + 6 \geq \sqrt{x^2 - 2x - 3} + 2x - 1$$

$$\begin{array}{r} 256 \\ + 2025 \\ \hline 2281 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 256 \\ \times 19 \\ \hline 2304 \\ 256 \\ \hline 4864 \end{array}$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

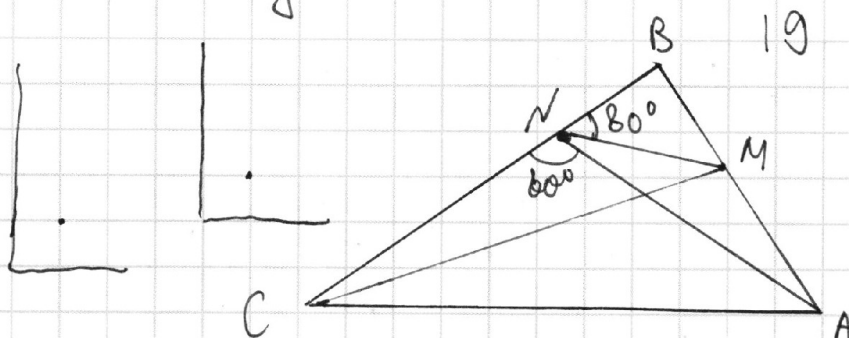
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Рассмотрим две соседние точки ряда. Δy - разность их ординат
 Δx - абсцисс. По условию:

$$\Delta x^2 + \Delta y^2 = 25$$

$$\Delta x^2 + \Delta y^2$$

заменим, что
 $(y+n)^2 = y^2 + 2yn + n^2$



2) B.M. $NC = BN \cdot MA$

mod 9	
x	x ²
1	1
2	4
3	0
4	7
5	7
6	0
7	4
8	1
0	0

$$2^x = x^2 + 90 = 19$$

mod 5	
x	x ²
1	1
2	4
3	4
4	1
0	0

1243

$$2^x = x^2 + 90$$

$$2^x = x^2$$

$$19 \cdot 2^n (19 \cdot 2^n + 90)$$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1	2	4	8	16	32	64	128	256
mod 5	1	2	4	3	1	2	4	3	1
mod 9	1	2	4	8	7	5	1		