



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 10



1. [3 балла] При каком наименьшем натуральном n число $(n-1)! + n! + (n+1)!$ делится на 289?
2. [3 балла] Из суммы квадратов семи последовательных натуральных чисел вычли число 28 и получили пятую степень натурального числа N , большего 8. Найдите наименьшее возможное значение N .
3. [4 балла] Решите неравенство

$$\left| \sqrt{x^2 - x - 2} + 5 \right| \geq \left| \sqrt{x^2 - x - 2} + x - 1 \right| + |6 - x|.$$

4. [5 баллов] На координатной плоскости рассматриваются ромбы с длиной стороны 5 такие, что абсциссы и ординаты всех четырёх вершин каждого ромба — целые числа из промежутка $[1; 45]$. Сколько существует таких ромбов? Напомним, что квадрат также является ромбом.
5. [5 баллов] Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющих уравнению

$$23 \cdot 2^x + 2025 = y^2.$$

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при каждом из которых для множества точек плоскости Oxy , задаваемых уравнением $x^2 + y^2 = a^2$, наибольшее значение выражения $y^2 - 4y - a$ равно 6.
7. [6 баллов] На сторонах AB и BC треугольника ABC выбраны точки M и N соответственно так, что $\angle MNB = \angle ANC = 70^\circ$. Найдите $\angle CAN$, если известно, что $BN \cdot MA = 2BM \cdot NC$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$n > 1 \quad \vee 1$$

$$(n-1)! + n! + (n+1)! : 289$$

$$289 = 17^2$$

$$\begin{array}{r} 289 \overline{) 17} \\ 17 \overline{) 17} \\ 119 \overline{) 17} \\ 118 \end{array}$$

$$(n-1)! + n! + (n+1)! : 17^2$$

$$(n-1)! (2n+1)$$

$$(n-1)! \cdot (1+n+n \cdot (n+1)) : 17^2$$

$$(n-1)! \cdot (n^2 + 2n + 1) : 17^2$$

$$\begin{array}{l} (n-1)! : 17^2 \\ n-1 \geq 17-2 \\ n \geq 35 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} n^2 + 2n + 1 : 17^2 \\ (n+1)^2 : 17^2 \\ n+1 : 17 \end{array}$$

$$n \geq 16$$

$\Downarrow$

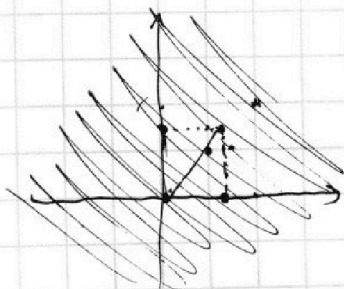
Если $n=16$, то

$$(n-1)! + n! + (n+1)! : 289$$

$\Downarrow$

Ответ : илч. $n=16$

$$\begin{array}{l} (n-1)! : 17 \\ n^2 + 2n + 1 : 17 \\ n-1 \geq 17 \\ n \geq 18 \text{ илч } 16 \end{array}$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☒

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$n-3, n-2, n-1, n, n+1, n+2, n+3$ - семь чисел

тогда сумма их квадратов равна

$$18+8+2$$

$$7n^2 + 2 \cdot 9 + 2 \cdot 4 + 2 = 7n^2 + 28$$

из неё вычитаем 28

$$\text{остаток } 7n^2 = N^5$$

$$N > 8$$

$$N:7 \Rightarrow n:7$$

тогда степень вхождения 7 в n

равна $t \geq 0$

$$\text{тогда } 1+2t:5$$

$$\Downarrow \\ t \geq 2$$

$$\Downarrow \\ n \geq 49$$

если $n=49$, тогда условие выполняется и $n=49$ - минимально

$\Downarrow$
Ответ: $n=49$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$|\sqrt{x^2-x-2} + 5| \stackrel{N.3}{\geq} |\sqrt{x^2-x-2} + x - 1| + |6 - x|$$

$$\underline{x^2 - x - 2 \geq 0} \quad \underline{(x-2)(x+1) \geq 0}$$

$$\sqrt{x^2-x-2} \stackrel{+x-1}{=} u$$

~~$\sqrt{x^2-x-2} = v$~~ $6-x = v$

$$\downarrow$$
$$x \leq -1$$
$$\text{или}$$
$$x \geq 2$$

$|u+v| \stackrel{?}{\geq} |u| + |v|$ возведем всё в квадрат
получим:

$$u^2 + v^2 + 2uv \geq u^2 + v^2 + 2|uv|$$

$uv \geq |uv|$
заметьте, что это верно только
когда $uv \geq 0$

$$\stackrel{uv}{\parallel} (\sqrt{x^2-x-2} + x - 1)(6-x) \stackrel{?}{\geq} 0$$

$$\parallel (\sqrt{(x-2)(x+1)} + x - 1)(6-x) \stackrel{?}{\geq} 0$$

↙

$$\text{" } 6-x \geq 0$$
$$\sqrt{(x-2)(x+1)} + x - 1 \geq 0$$

$$\downarrow$$
$$x \leq 6$$
$$\sqrt{(x-2)(x+1)} \geq 1-x$$

↘

$$\text{" } 6-x < 0$$
$$\sqrt{(x-2)(x+1)} + x - 1 < 0$$

$$\downarrow$$
$$x > 6$$
$$1-x > \sqrt{(x-2)(x+1)}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$x \leq 6$

$\sqrt{(x-2)(x+1)} \geq 1-x$

1) возведём в квадрат, если $1-x \geq 0$

$(x-2)(x+1) \geq (1-x)^2$

$x^2 - x - 2 \geq x^2 + 1 - 2x$

$x \leq 1$

$x \geq 3 \Rightarrow \emptyset$

$x \leq 6$

2) иначе если $1-x \leq 0$
тогда нер-во
всегда верно
(при условии что
 $x \leq 6$)

$x \geq 0$ но знаем
 $x \leq 6$ что x не
может быть в $(-1; 2)$ из-за корней

Ответ: $x \in \mathbb{R}$

$2 \leq x \leq 6$
подходит

знаем что
 $\sqrt{(x-2)(x+1)} \geq 0$

$1-x < 0$
 $\Downarrow$
это
неравенство
не может
выполняться
 $\Downarrow$ т.к. $\sqrt{(x-2)(x+1)} \geq 0$
?!

$x > 6$

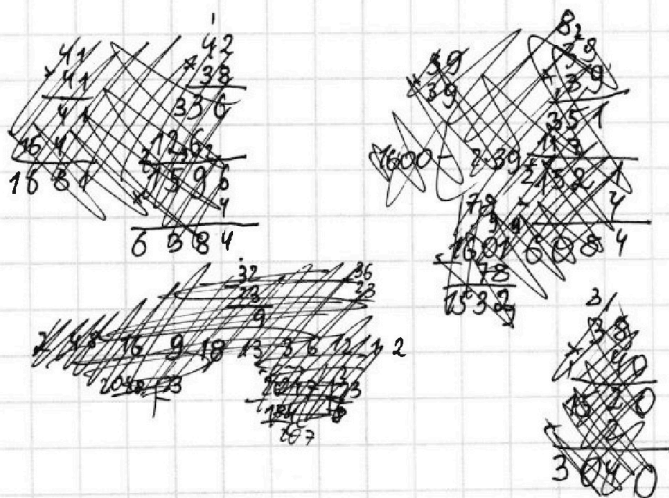
$1-x > \sqrt{(x-2)(x+1)}$

$1-x \geq 0$
возведём
второе нер-во
в квадрат

$(1-x)^2 > x^2 - x - 2$

$x^2 - 2x + 1 > x^2 - x - 2$

$x \leq 0$
 $x < 3$
 $x > 6$
?!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 4

длину 5 можно получить (если концы целочисленные значения) двумя способами:

рассмотрим все возможные формы ромба с такими сторонами

нарисуем
вокруг
ромба прямоугольник
так, чтобы его
сторона были
|| осей координат и его
площадь была бы минимально.
~~и все вершины ромба~~
~~лежали на его сторонах (или вершинах)~~
(так можно сделать единственным
образом)

также заметим, что если
все абсциссы и орд. всех четырех
вершин ~~лежат~~ ^{лежат} в промежутке
от [1; 45] все вершины ромба
тоже. и наоборот если ~~все~~ абсц. и
орд. вершин ромба лежат
в [1; 45] то абсц. и орд. прямоугольника тоже

1)

2)

3)

4)

5)

6)

7)

N1

N2

N3

N4

N5

N6



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

заметим, что если мы выберем
2 ~~разных~~ отрезка под разными номерами
то ~~то~~ при каждом построении ромба из
них мы получим один и тот же ромб

$\begin{array}{l} \text{N1 и N2} \\ \text{прямоуг.} \\ \text{будет } 5 \times 5 \\ \text{таких всего} \\ \text{будет } 4 \cdot 401 \end{array}$	$\begin{array}{l} \text{N1 и N3} \\ \text{пр. д.} \\ \underline{4 \times 8} \\ 42 \cdot 38 \end{array}$	$\begin{array}{l} \text{N1 и N4} \\ \text{пр. д.} \\ \underline{3 \times 9} \\ 43 \cdot 37 \end{array}$	$\begin{array}{l} \text{N1 и N5} \\ \text{пр. д.} \\ \underline{4 \times 8} \\ 42 \cdot 38 \end{array}$
$\begin{array}{l} \text{N1 и N6} \\ \text{пр. д. } 3 \times 9 \\ \text{ромб } 43 \times 37 \end{array}$	$\begin{array}{l} \text{N2 и N3} \\ \text{пр. д.} \\ \underline{9 \times 3} \\ 37 \cdot 43 \end{array}$	$\begin{array}{l} \text{N2 и N4} \\ \text{пр. д.} \\ \underline{8 \times 4} \\ 42 \cdot 38 \end{array}$	$\begin{array}{l} \text{N2 и N5} \\ \text{пр. д. } 8 \times 9 \times 3 \\ 37 \cdot 43 \end{array}$
$\begin{array}{l} \text{N2 и N6} \\ \text{пр. д. } 8 \times 4 \\ \underline{42 \cdot 38} \end{array}$	$\begin{array}{l} \text{N3 и N4} \\ \text{пр. д. } 7 \times 7 \\ \underline{39 \cdot 39} \end{array}$	$\begin{array}{l} \text{N3 и N5} \\ \text{пр. д. } 8 \times 6 \\ \underline{40 \cdot 38} \end{array}$	$\begin{array}{l} \text{N3 и N6} \\ \text{пр. д. } 7 \times 7 \\ \underline{39 \cdot 39} \end{array}$
$\begin{array}{l} \text{N4 и N5} \\ \text{пр. д.} \\ \underline{7 \times 7} \\ 39 \cdot 39 \end{array}$	$\begin{array}{l} \text{N4 и N6} \\ \text{пр. д. } 6 \times 8 \\ \underline{40 \cdot 38} \end{array}$	$\begin{array}{l} \text{N5 и N6} \\ \text{пр. д. } 7 \times 7 \\ \underline{39 \cdot 39} \end{array}$	

$$41 \cdot 41 + 4 \cdot 42 \cdot 38 + 4 \cdot 43 \cdot 37 + 4 \cdot 39 \cdot 39 + 2 \cdot 40 \cdot 38$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ + 6084 \\ + 6384 \\ \hline 12468 \\ + 3040 \\ \hline 15508 \\ + 1681 \\ \hline 17189 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \text{||} \\ 1681 + 6384 + 6084 + 3040 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \text{||} \\ 17189 \text{ ромбов} \end{array}$$

Ответ: 17189 ромбов



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{array}{r} 23 \\ \times 23 \\ \hline 184 \\ 2025 \\ \hline 2209 \\ \hline 47 \\ \times 47 \\ \hline 1329 \\ 188 \\ \hline 2209 \end{array}$$

N5

$$23 \cdot 2^x + 2025 = y^2$$

заметишь, что $x \geq 0$
иначе пер-во
не выполняется

$$23 \cdot 2^x = (y-45)(y+45)$$

одно из $y-45$ и $y+45$: 23

а другое - степень двойки

$x_1 + x_2 = x$

$y - 45 = 23 \cdot 2^{x_1}$

$y + 45 = 2^{x_2}$

$y \equiv -1 \pmod{23} \quad y = 23k - 1$

посмотрим на второе равенство

$23k - 1 + 45 = 2^{x_2}$

$23k + 44 = 2^{x_2}$

$\text{III } 23$

-2

$2^{x_2} \equiv 21 \pmod{23}$

посмотрим на циклы остатков степеней двойки при делении на 23

$2^1 \rightarrow 2$	$2^6 \rightarrow 18$	$2^{11} \rightarrow 1$
$2^2 \rightarrow 4$	$2^7 \rightarrow 13$	$2^{12} \rightarrow 2$
$2^3 \rightarrow 8$	$2^8 \rightarrow 3$	$2^{13} \rightarrow 4$
$2^4 \rightarrow 16$	$2^9 \rightarrow 6$	...
$2^5 \rightarrow 9$	$2^{10} \rightarrow 12$	

в этом цикле нет числа 21

$x_1 + x_2 = x$

$y - 45 = 2^{x_1}$

$y + 45 = 23 \cdot 2^{x_2}$

$y \equiv 1 \pmod{23}$

посмотрим на первое равенство

$y + 45 \equiv 1 + 90 \pmod{23} \equiv 2 \pmod{23}$

$2^{x_1} + 90 = 23 \cdot 2^{x_2}$

предположим, что $x_1 \geq 2$ и $x_2 \geq 2$

тогда $2^{x_1-1} + 45 = 23 \cdot 2^{x_2-1}$

:2 :2

тогда $45 \equiv 2 \pmod{23}$

!!

если $x_1 = 1 \Rightarrow x_2 = 2$

или $x_1 = 0 \Rightarrow 1 + 90 \cdot 23 \Rightarrow ?!$

или $x_2 = 0 \Rightarrow 2^{x_1} \equiv 2 \pmod{23} \Rightarrow ?!$

или $x_2 = 1 \Rightarrow 2^{x_1+1} \equiv 2 \pmod{23} \Rightarrow ?!$

Ответ: $x = 3$
 $y = 47$

$y = 47$
 $x = 3$

$23 \cdot 8 + 2025 = y^2$

$x = x_1 + x_2 = 3$



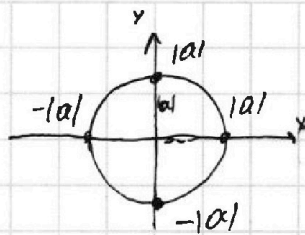
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$x^2 = x^2 + y^2$ ~ 6
 $\max(y^2 - 4y - a) = 6$
заметим, что это уравнение окружности
(центром в $0;0$ и радиусом $|a|$)



$a = \text{const}$
тогда чтобы увеличить выражение
 $y^2 - 4y - a$ надо увеличить выражение
 $y^2 - 4y$, y может быть от $|a|$ до $-|a|$
парабола ветв. вверх. $\Rightarrow$ чем y дальше
от вершины параболы, тем $y^2 - 4y$ больше
вершина параболы, то есть ее мин.

значит это $y = 2$, то есть $|a|$ при
расстоянии от 2 до $|a|$ меньше чем до $-|a|$
при $y = -|a|$ значение будет достигать
максимума.

$$\max(y^2 - 4y - a) = a^2 + 4|a| - a = 6$$

$$a \geq 0$$

$$a < 0$$

~~$$a_1$$~~



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\alpha \geq 0$$

$$\alpha^2 + 4\alpha - \alpha = 6$$

$$\alpha^2 + 3\alpha - 6 = 0$$

$$D = 9 + 4 \cdot 6 = 33$$

$$\alpha = \frac{-3 \pm \sqrt{33}}{2}$$

$$\alpha = \frac{-3 + \sqrt{33}}{2}$$

Ответ: $\alpha = -1$
 $\alpha = \frac{-3 + \sqrt{33}}{2}$

~~$\alpha \geq 0$~~ $\alpha < 0$

~~$$\alpha^2 + 4\alpha + \alpha = 6$$~~

~~$$\alpha^2 + 5\alpha = 6$$~~

~~$$\alpha^2 + 5\alpha - 6 = 0$$~~

$$-\alpha = \alpha_1$$

$$\alpha_1 > 0$$

$$\alpha_1^2 + 4\alpha_1 + \alpha_1 = 6$$

$$\alpha_1^2 + 5\alpha_1 - 6 = 0$$

$$D = 25 + 4 \cdot 6 = 49$$

$$\alpha_1 = \frac{-5 \pm 7}{2}$$

$$\alpha_1 = 1$$

$$\alpha = -1$$

~~$$\alpha = \frac{-3 + \sqrt{33}}{2}$$~~

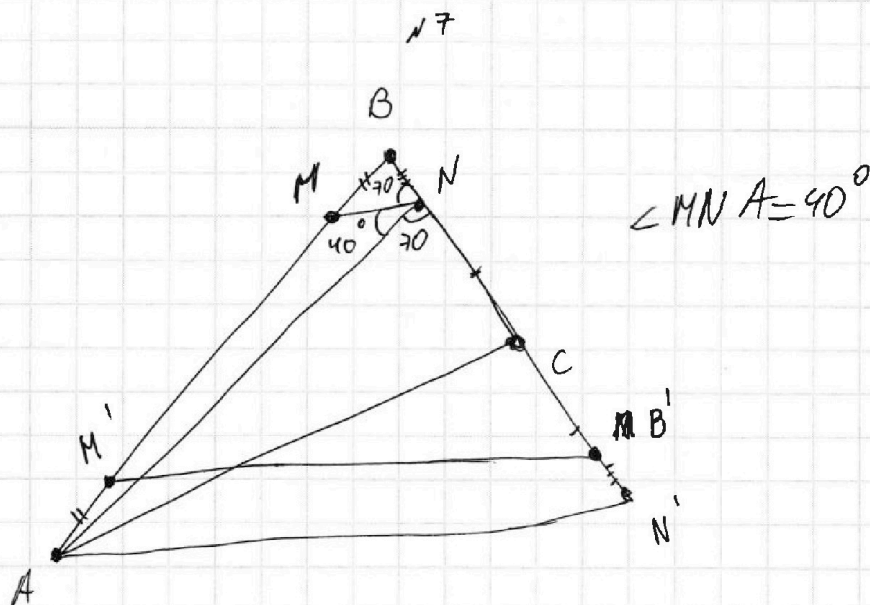


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{aligned} NC &= CN' \\ AM' &= BM \\ B'N' &= BN \end{aligned}$$

по условию: $BN \cdot MA = 2BM \cdot NC$

тогда

$$\frac{BN}{2NC} = \frac{BM}{MA}$$

$$\begin{aligned} \angle M'B'B' \\ \angle M'BN \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2NC &= BB' \\ MA &= BM' \end{aligned} \Rightarrow \triangle MBN \sim \triangle M'B'B'$$



$$\frac{BN}{BB' + B'N'} = \frac{BM}{B'M' + M'A}$$

$$MN \parallel M'B'$$

докажем это



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☒

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{BN}{BB' + B'N'} = \frac{BM}{BM' + M'A}$$

$$\frac{BN}{2NC + BN} = \frac{BM}{MA + BM}$$

$$\frac{2NC + BN}{BN} = \frac{BM + MA}{BM}$$

$$\frac{2NC}{BN} + 1 = 1 + \frac{MA}{BM}$$

$$\frac{2NC}{BM} = \frac{MA}{BM}$$

$$\frac{BM}{2NC} = \frac{BM}{MA}$$

↓ по условию
или

$$AN' \parallel MN$$

$$\angle N'AN' = 40^\circ \Rightarrow \angle NN'A = 70^\circ$$

↓
 $NA = AN'$
AC - медиана в $\triangle NAN'$
из вершины A

она и есть
высота т.к
 $NA = N'A$

$$\angle NCA = 90^\circ$$

$$\angle NCA = 180^\circ - \angle ANC - \angle CAN$$

$$\angle ANC = 70^\circ$$

по усл

$$\angle CAN = 180^\circ - 70^\circ - 90^\circ = 20^\circ$$

$$\angle CAN = 20^\circ$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

