



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 16



- ✓ 1. [3 балла] Свободный член квадратного трёхчлена увеличили на 4, в результате чего квадрат разности его корней уменьшился на 8. Затем к свободному члену полученного трёхчлена прибавили число d , и квадрат разности его корней уменьшился ещё на 2. Найдите d .

2. [4 балла] Сколько пар целых чисел $(x; y)$ удовлетворяет уравнению

$$\sqrt{7x} + \sqrt{2y} = \sqrt{2024^2 \cdot \sqrt{2025}} ?$$

- ✓ 3. [4 балла] Найдите все натуральные a и b такие, что

$$\begin{cases} 12 \cdot \min(a; b) + \max(a; b) = 2a + 6b, \\ 2(\min(a; b))^2 + 3 = 7 \cdot \text{НОД}(a; b). \end{cases}$$

- ✓ 4. [5 баллов] На медиане AM треугольника ABC выбрана точка P такая, что $\angle BAC + \angle BPC = 180^\circ$. Найдите AC , если известно, что $AB = 15$, $BP = 9$, $CP = 6$.

- ✓ 5. [5 баллов] 6 сундуков закрыты на 3 замка каждый, все ключи ко всем замкам различны. Найдите количество способов выбрать из всех 18 ключей 6 так, чтобы с помощью них можно было открыть хотя бы один сундук.

- ✓ 6. [5 баллов] На дуге полукруга с центром O и диаметром MN взята точка K . Построен равнобедренный прямоугольный треугольник ABC с катетами AC и BC , равными по длине радиусу полукруга, так, что его вершина A лежит на отрезке OK , вершина B — на отрезке ON , вершина C — на дуге KN . Найдите $\angle MOK$.

- ✓ 7. [5 баллов] Найдите наименьшее значение выражения $M = |a| + |3b - a| + |4b - a + 1|$, где a и b — действительные числа. При каких a и b оно достигается?



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☒

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$ax^2 + bx + c$ - начальный квадратный трехчлен

1) Пусть есть квадратный трехчлен $rx^2 + px + q$
по теореме Виета $x_1 + x_2 = -\frac{p}{r}$
 $x_1 \cdot x_2 = \frac{q}{r}$

$$(x_1 - x_2)^2 = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2$$

$$= (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = \left(-\frac{p}{r}\right)^2 - \frac{4q}{r}$$

$$= \frac{p^2}{r^2} - \frac{4q}{r} \Rightarrow \text{квадрат разности корней уравнения находится по этой формуле}$$

2) $\Rightarrow$ для нашего трехчлена (разность корней)² (n) равна:

$$n = \frac{b^2}{a^2} - \frac{4c}{a} \quad (1)$$

3) новый трехчлен: $ax^2 + bx + c + 4$

и его (разность корней)² на 8 меньше $\Rightarrow$ равна $n - 8$

$$n - 8 = \frac{b^2}{a^2} - \frac{4(c+4)}{a} \quad (2)$$

4) из (1) и (2):

$$\frac{b^2}{a^2} - \frac{4c}{a} = 8 + \frac{b^2}{a^2} - \frac{4(c+4)}{a} \quad \left| - \frac{b^2}{a^2} \right|$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{4(c+4)}{a} = 6 + \frac{4c}{a} \quad / - \frac{4c}{a}$$

$$\frac{16}{a} = 6 \Rightarrow a = 2$$

5) новый трехчлен $ax^2 + bx + c + 4 + d$
и его (разность корней)²
еще на 2 меньше $\Rightarrow$
равна $n - 8 - 2 = n - 10$

$$n - 10 = \frac{b^2}{a^2} - \frac{4(c+4+d)}{a} \quad (3)$$

6) из (3) и (2)

$$\frac{b^2}{a^2} - \frac{4(c+4+d)}{a} + 2 = \frac{b^2}{a^2} - \frac{4(c+4)}{a} \quad / - \frac{b^2}{a^2}$$
$$+ \frac{4(c+4)}{a}$$

$$\Rightarrow -\frac{4d}{a} + 2 = 0$$

$$2a = 4d$$

$$d = \frac{2a}{4} = \frac{2 \cdot 2}{4} = 1$$

Answer: $d = 1$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{7x} + \sqrt{2y} = \sqrt{2024^2 + 2025}$$
$$\sqrt{7x} + \sqrt{2y} = \sqrt{2024^2 \cdot 45}$$
$$2025 = 45^2$$
$$\sqrt{2025} = 45$$

возведем обе части в квадрат

$$(\sqrt{7x})^2 + (\sqrt{2y})^2 + 2\sqrt{7x} \cdot \sqrt{2y} = (\sqrt{2024^2 \cdot 45})^2$$

$$7x + 2y + 2\sqrt{14xy} = 2024^2 \cdot 45$$

$$\in \mathbb{Z} \text{ (т.к. } x, y \in \mathbb{Z}) \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{14xy} \in \mathbb{Z} \Rightarrow \sqrt{14xy} \in \mathbb{Z}$$

$$\sqrt{14xy} = k \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$xy = \frac{k^2}{14} \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow k^2 : 14 \Rightarrow k = 14a \quad a \in \mathbb{Z}$$

$$\text{имее } \frac{k^2}{14} \in \mathbb{Z} \Rightarrow xy = \frac{k^2}{14} = 14a^2$$

$$\Rightarrow y = \frac{14a^2}{x}$$

$$7x + 2y + 2\sqrt{14xy} = 2024^2 \cdot 45$$

$$7x + \frac{28a^2}{x} + 28a = 2024^2 \cdot 45$$

$$\begin{aligned} 12 \cdot 3 + 6 &= 2 \cdot 3 + 6 \cdot 6 \\ 42 &= 12 \\ 2 \cdot 9 + 3 &= 7 \cdot 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 12 \cdot 3 + 18 &= 2 \cdot 12 + 6 \cdot 3 \\ 54 &= 54 \\ 2 \cdot 8 + 5 &= 9 \cdot 3 \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{7x} + \sqrt{2y} = 2024\sqrt{45}$$

$$7x + 2y + \sqrt{14xy} = 2024^2 \cdot 45$$

$$7x + \frac{28k^2}{x} + 28k$$

$$\sqrt{7x} + \sqrt{2y} = 2024\sqrt{45}$$

$$2024 = 4 \cdot 2 \cdot 253$$

$$253 = 11 \cdot 23$$

$$2024 \mid 4$$

$$20 \mid 508$$

$$xy = 14k^2$$

$$y = \frac{14k^2}{x}$$

$$2024 \mid 7$$

$$14 \mid 289$$

$$62 \mid 56$$

$$64$$

$$x^2 \cdot 45 = 32$$

$$\sqrt{14xy} = k$$

$$14xy = k^2$$

$\Rightarrow y = k^2$ в разложении на простые множители степень 7 больше чем у x

$$\text{если } x = 7^t \cdot b \Rightarrow k^2 = 14xy = 7^{t+1} \cdot 2by$$

$$\Rightarrow u k : 14 \text{ вот из этого } \Rightarrow 14k^2$$

$$7x + 2y + 2\sqrt{14xy} = 2024^2 \cdot 45$$

$$xy = 14k^2$$

$$y = \frac{14k^2}{x}$$

$$= 7x + \frac{28k^2}{x} + 28k$$

$$\begin{matrix} :7 & & :7 \end{matrix}$$

т.к. $y = k^2$ показатель больше чем у x

$$\Rightarrow 7x + \frac{28k^2}{x} + 28k : 7 \text{ но } 2024^2 \cdot 45 \neq 7$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
3 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

=> Противоречие

=> нет решений в целых
числах

Ответ: 0 решений



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☒

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Рассмотрим 3 случая: 1) $a > b$
2) $a = b$
3) $a < b$

1 случай $a > b \Rightarrow \min(a, b) = b$
 $\max(a, b) = a$

$$\Rightarrow 12 \cdot \min(a; b) + \max(a; b) = 2a + 6b$$

$$12b + a = 2a + 6b$$

$$\Rightarrow a = 6b \Rightarrow \text{НОД}(a, b) = \text{НОД}(b, 6b) = b$$

$$\Rightarrow 2(\min(a; b))^2 + 3 = 7 \cdot \text{НОД}(a; b)$$

$$2b^2 + 3 = 7 \cdot b$$

$$2b^2 - 7b + 3 = 0$$

$$b^2 - 3,5b + 1,5 = 0$$

$$(b - 3)(b - 0,5) = 0$$

$$\begin{cases} b = 3 \\ b = 0,5 \end{cases} \quad \times \text{ т.к. } b \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow b = 3 \Rightarrow a = 6b = 18 \Rightarrow (a; b) = (18; 3)$$

2 случай $a = b = x \Rightarrow \min(a, b) = x$
 $\max(a, b) = x$

$$12 \cdot \min(a; b) + \max(a, b) = 2a + 6b \Rightarrow$$

$$12 \cdot x + x = 2x + 6x$$

$$13x = 8x \Rightarrow 5x = 0$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1



2



3



4



5



6



7



СТРАНИЦА

2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$5x = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ Противоречие, т.к.}$$

$$a = b = x = 0 \text{ т.к. } a, b \in \mathbb{N}$$

$$\text{3 случая } a < b \Rightarrow \min(a, b) = a$$
$$\max(a, b) = b$$

а

$$12 \cdot \min(a; b) + \max(a; b) = 2a + 6b$$

$$12 \cdot a + b = 2a + 6b$$

$$10a = 5b$$

$$2a = b$$

$$\Rightarrow \text{НОД}(a; b) = \text{НОД}(a; 2a) = a$$

$$2(\min(a; b))^2 + 3 = 7 \cdot \text{НОД}(a; b)$$

$$2a^2 + 3 = 7 \cdot a$$

$$2a^2 - 7a + 3 = 0$$

$$a^2 - 3,5a + 1,5 = 0$$

$$(a - 3)(a - 0,5) = 0$$

$$\begin{cases} a = 3 \\ a = 0,5 \end{cases}$$

$$a = 0,5 \text{ т.к. } a \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow a = 3 \Rightarrow b = 3 \cdot 2 = 6 \quad (b = 2a) \text{ т.к.}$$

$$\Rightarrow (a; b) = (3; 6)$$

$$\text{Утого: } (3; 6) \quad (18; 3)$$

$$\text{Ответ: } (3; 6) \quad (18; 3) - (a; b)$$

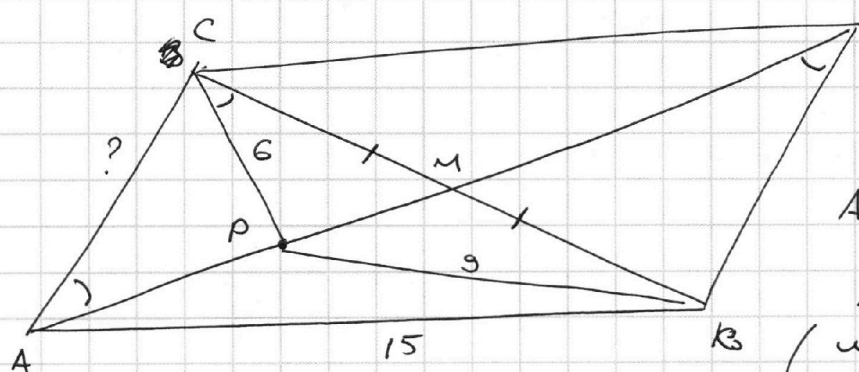


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



1) $\triangle$ доказали
между
AM до точки X
 $\Rightarrow$
 $AM = MX$
(и $CM = MB$
т.к. AM - медиана)

2) $AX \cap CB = M : CM = MB$
 $AM = MX \Rightarrow ACXB -$
параллелограмм

$\Rightarrow \angle A = \angle X$

3) $CPBX : \angle CPB + \angle X = \angle CPB + \angle CAB = 180^\circ$
 $\Rightarrow CPBX -$ вписанный
 $\Rightarrow \angle PCM = \angle PCB = \angle PXB = \angle AXB$
($M \in CB$) ($P \in AX$)
т.к. вписанные на CPB

4) $ACXB -$ параллелограмм $\Rightarrow AC \parallel XB$
+ $AX -$ секущая $\Rightarrow$

$\angle CAM = \angle CAX = \angle AXB$ (как накрест-
($M \in AX$) лежащие)

$\Rightarrow \angle CAM = \angle AXB \Rightarrow \angle CAM = \angle PCM$
 $\angle AXB = \angle PCM$

5) $\triangle MCP \sim \triangle MAC : \Rightarrow \triangle MCP \sim \triangle MAC$
(по 2 углам)
 $\angle CAM = \angle PCM$
и
 $\angle CMP = \angle AMC$
(т.к. $P \in AM$)
Аналогично:
 $\triangle MPB \sim \triangle MBA$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☒

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$\triangle MCP \sim \triangle MAC \Rightarrow \frac{MC}{AM} = \frac{CP}{AC}$$

$$\triangle MPB \sim \triangle MBA \Rightarrow \frac{MB}{AM} = \frac{BP}{AB}$$

$$\text{т.к. } MC = MB \Rightarrow \frac{CP}{AC} = \frac{MC}{AM} = \frac{MB}{AM} = \frac{BP}{AB}$$

$$\Rightarrow AC = \frac{CP \cdot AB}{BP} = \frac{6 \cdot 15}{9} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5}{9} = 10$$

Ответ: $AC = 10$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

☐☐☐☐☒☐☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Всего 18 ключей, в каждой группе (относящейся к суммуду) по 3

Чтобы с помощью них можно было открыть хотя бы 1 суммуд

Среди этих 6 ключей должна быть одна полная группа

$\Rightarrow$ Это 6 вариантов (всего 6 групп)

и оставшиеся 3 ключа выбираем как угодно из 15 других (не в нашей группе)

$$\Rightarrow N = 6 \cdot C_{15}^3 = 6 \cdot \frac{15!}{12! \cdot 3!} = 15 \cdot 14 \cdot 13$$

Однако 3 доп. ключа могли образовать свою группу $\Rightarrow$ (мы дважды учтем случай, где выбрано по 2 группы целиком)

$$N' = C_6^2 = \frac{6!}{4! \cdot 2!} = 15$$

$$\Rightarrow \text{Всего вариантов } N - N' = 15 \cdot 14 \cdot 13 - 15 = 15 \cdot 181 = 2715$$

(случай когда сначала взяли группу а и как доп сформировалась b и наоборот идентичны)

Ответ: 2715



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

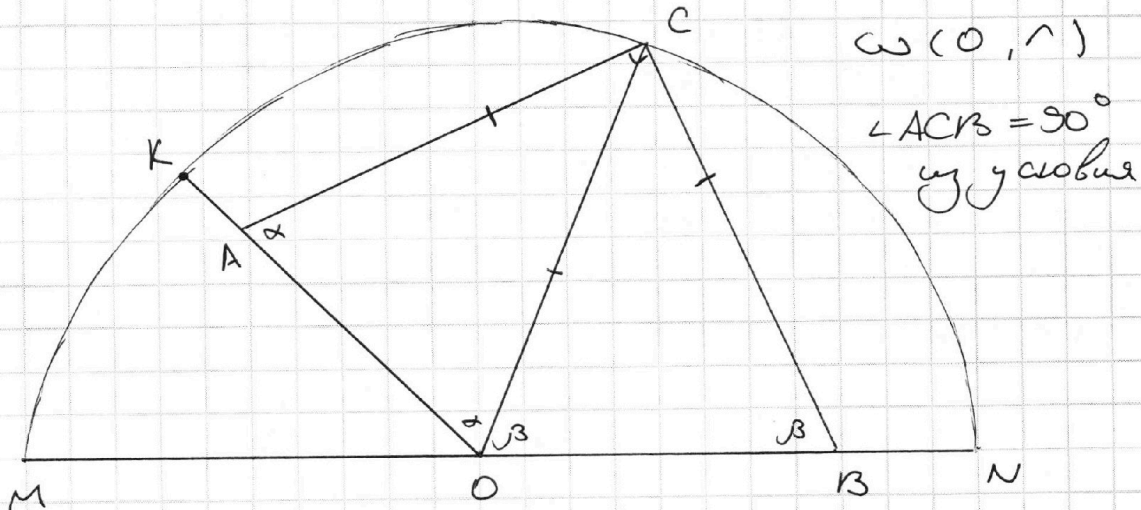
5
☐

6
☒

7
☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



1) MN - диаметр полуокружности
 $\angle MCN$ - вписанный, опирается на диаметр $MN \Rightarrow \angle MCN = 90^\circ$

2) $\triangle MCN : \angle MCN = 90^\circ \Rightarrow \triangle MCN$ - п.т.

O - середина MN (т.к. центр ω)

$\Rightarrow CO$ - медиана к гипотенузе п.т.
треугольника $\Rightarrow CO = MO = ON = r$

3) по условию $AC = CB = r \Rightarrow AC = CB = CO = r$

4) $\triangle ACO : AC = CO \Rightarrow \triangle ACO$ - р.т. $\Rightarrow \angle CAO = \angle COA = \alpha$
 $\triangle CBO : CO = CB \Rightarrow \triangle CBO$ - р.т. $\Rightarrow \angle CBO = \angle COB = \beta$

5) сумма углов ч.т. угольника $360^\circ \Rightarrow$

$$\begin{array}{ccccccc} \angle CAO & + & \angle AOB & + & \angle CBO & + & \angle ACB = 360^\circ \\ \alpha & & \alpha + \beta & & \beta & & 90^\circ \end{array} \quad \sim \quad \begin{array}{l} \angle AOB \\ = \angle COA + \angle COB = \alpha + \beta \end{array}$$

$$2\alpha + 2\beta + 90^\circ = 360^\circ \Rightarrow \alpha + \beta = 135^\circ$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☒

7
☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\angle KON = \angle AOB = \alpha + \beta = 135^\circ$$

(т.к. $A \in OK$, $M \in OB \in ON$)

$$\angle MOK = 180^\circ - \angle KON = 180^\circ - 135^\circ = 45^\circ$$

смежные

Ответ: $\angle MOK = 45^\circ$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

☐☐☐☐☒☐☒

СТРАНИЦА

1 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Рассмотрим 6 вариантов, для каждого случая из выражений под (когда меняет знак) модулем

1 случай $a \geq 0$ $3b - a \geq 0$ $4b - a + 1 \geq 0$ $\Rightarrow b \geq \frac{a}{3}$

$$a + 3b - a + 4b - a + 1 = 7b - a + 1 \geq \frac{7a}{3} - a + 1 = \frac{4a}{3} + 1 \geq 1 \quad (\text{т.к. } a \geq 0)$$

2 случай $a \geq 0$ $3b - a \geq 0$ $4b - a + 1 < 0$ $\Rightarrow \frac{a}{3} \leq b \Rightarrow 0 \leq b$ (т.к. $a \geq 0$)
 $a > 4b + 1$

$\Rightarrow 3b \geq a > 4b + 1$
 $0 \geq b + 1$
 $-1 \geq b$
 $\Rightarrow b \leq -1$
 $b \geq 0$
— Противоречие

3 случай $a \geq 0$ $3b - a < 0$ $4b - a + 1 \geq 0$ $\Rightarrow a > 3b$ $a \leq 4b + 1$ $\Rightarrow 3b < 4b + 1$ $-1 < b$
 $\Rightarrow b \geq \frac{a-1}{4}$

$$\Rightarrow M = |a| + |3b - a| + |4b - a + 1| = a - 3b + a + 4b - a + 1 = b + a + 1$$

$$\geq \frac{a-1}{4} + a + 1 = \frac{5a}{4} + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4} \quad (\text{т.к. } a \geq 0)$$

4 случай $a \geq 0$ $3b - a < 0$ $4b - a + 1 < 0$ $\Rightarrow a > 3b$ $a > 4b + 1$ $\Rightarrow b < \frac{a-1}{4}$
 $\Rightarrow -7b > \frac{-7a+7}{4}$

$$M = |a| + |3b - a| + |4b - a + 1| \textcircled{=}$$

$$\textcircled{=} a + a - 3b + a - 4b - 1 = 3a - 7b - 1$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☐3
☐4
☐5
☐6
☐7
☒СТРАНИЦА
2 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$M = 3a - 7b - 1 > 3a - \frac{7a}{4} + \frac{7}{4} - 1 = \frac{5a}{4} + \frac{3}{4}$$

$$\textcircled{>} \frac{3}{4} \quad \text{т.к. } a \geq 0$$

$$\begin{array}{l|l} \text{5 случай} & a < 0 \\ 3b - a \geq 0 & \Rightarrow a \leq 3b \Rightarrow b \geq \frac{a}{3} \\ 4b - a + 1 \geq 0 & a \leq 4b + 1 \end{array}$$

$$\begin{aligned} M &= |a| + |3b - a| + |4b - a + 1| = -a + 3b - a + 4b - a + 1 \\ &= 7b - 3a + 1 \geq \frac{7a}{3} - 3a + 1 \\ &= -\frac{2a}{3} + 1 > 1 \quad (\text{т.к. } a < 0) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{l|l} \text{6 случай} & a < 0 \\ 3b - a \geq 0 & \Rightarrow a \leq 3b \Rightarrow -a \geq -3b \\ 4b - a + 1 < 0 & a > 4b + 1 \\ & \Rightarrow 4b + 1 < 3b \\ & b < -1 \end{array}$$

$$M = |a| + |3b - a| + |4b - a + 1| \textcircled{=}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{=} -a + 3b - a - 4b + a - 1 &= -a - b - 1 \geq -4b - 1 \\ &> -4(-1) - 1 = 3 \quad (\text{т.к. } b < -1) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{l|l} \text{7 случай} & a < 0 \\ 3b - a < 0 & a > 3b \Rightarrow 3b < 4b + 1 \\ 4b - a + 1 \geq 0 & a \leq 4b + 1 \Rightarrow -1 < b \\ & a > 3b > -3 \end{array}$$

$$\begin{aligned} M &= |a| + |3b - a| + |4b - a + 1| = -a - 3b + a + 4b - a + 1 \\ &= b - a + 1 \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

☐☐☐☐☐☐☒

СТРАНИЦА

3 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{т.к. } a \leq 4b+1 \Rightarrow b \geq \frac{a-1}{4}$$

$$\Rightarrow M = b - a + 1 \geq \frac{a-1}{4} - a + 1 = -\frac{3a}{4} + \frac{3}{4} > \frac{3}{4} \quad (\text{т.к. } a < 0)$$

8 случай	$a < 0$	$a > 3b$
	$3b - a < 0$	$a > 4b + 1$
	$4b - a + 1 < 0$	$b < \frac{a-1}{4} \Rightarrow -7b > \frac{7a-7}{4}$

$$\Rightarrow M = |a| + |3b - a| + |4b - a + 1| =$$

$$= -a - 3b + a - 4b + a - 1 = a - 7b - 1$$

$$> a - \frac{7a}{4} + \frac{7}{4} - 1 = -\frac{3a}{4} + \frac{3}{4} > \frac{3}{4} \quad (\text{т.к. } a < 0)$$

$$\Rightarrow \text{Во всех случаях } M > \frac{3}{4}, \text{ кроме случая (3)}$$

$$a \geq 0$$

$$3b - a < 0$$

$$4b - a + 1 \geq 0$$

$$\text{там } M \geq \frac{5a}{4} + \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow M \geq \frac{3}{4}, \text{ а равенство}$$

$$\text{при } M = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{4} = \frac{5a}{4} + \frac{3}{4} \Rightarrow a = 0$$

$$M = |0| + |3b - 0| + |4b - 0 + 1| = \frac{3}{4}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☒

СТРАНИЦА
4 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{если } b < -\frac{1}{4} \Rightarrow M = -3b - 4b - 1 = \frac{3}{4}$$

$$(\text{Противоречие т.к. } b < -\frac{1}{4}) \quad b = -\frac{1}{4}$$

$$\text{если } 0 > b \geq -\frac{1}{4} \Rightarrow M = -3b + 4b + 1 = \frac{3}{4}$$

$$b = -\frac{1}{4}$$

$$\text{если } b \geq 0 \Rightarrow M = 3b + 4b + 1 = \frac{3}{4}$$

$$b = -\frac{1}{28}$$

-Противоречие т.к. $b \geq 0$

$$\Rightarrow \text{минимум когда } a = 0$$

$$M_{\min} = \frac{3}{4}$$

$$b = -\frac{1}{4}$$

$$\text{Ответ: } M_{\min} = \frac{3}{4} \quad a = 0 \quad b = -\frac{1}{4}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

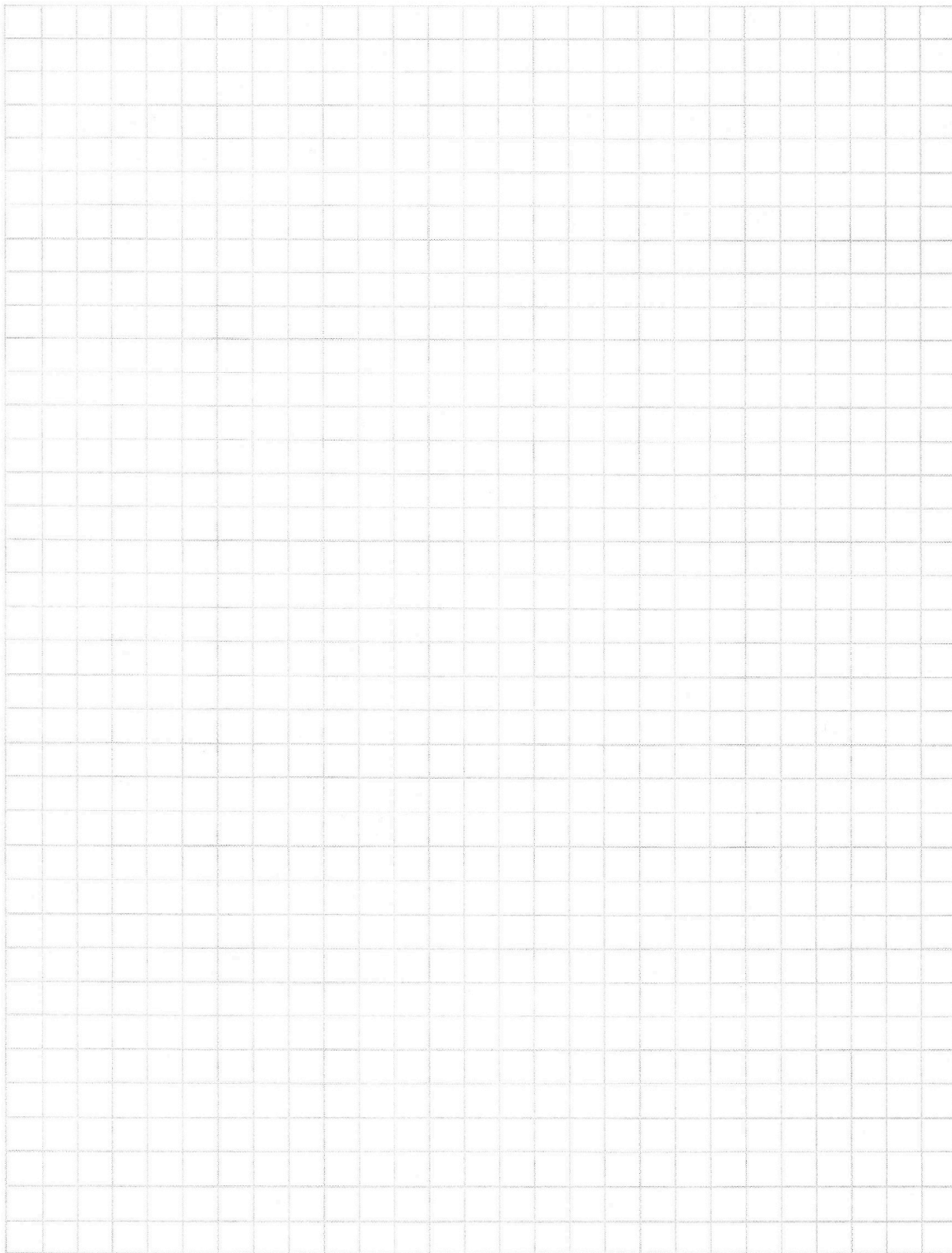
5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА

из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{7x} + \sqrt{2y} = 2024\sqrt{45}$$

$$7x + 2y + 2\sqrt{14xy} = 2024^2 \cdot 45$$

$$x : 2$$

$$56xy = (2024^2 \cdot 45 + 2y - 7x)^2$$

$$56xy = 2024^2 \cdot 45$$

$$x : 7$$

$$: 2$$

$$|a| + 13b - a + 14b - a + 11$$

$$a > 0$$

$$3b - a < 0$$

$$4b - a + 1 > 0 > 3b - a$$

$$\frac{a-1}{4} < b < \frac{a}{3}$$

$$3a - 3 < 4a$$

$$-3 < a$$

$$a - 3b + a + 4b - a + 1 = a + b + 1$$

$$> \frac{5}{4}a + \frac{3}{4}$$

$$a > 0$$

$$3b - a < 0$$

$$4b - a + 1 < 0$$

$$a > 3b$$

$$a > 4b + 1$$

$$b < \frac{a}{3}$$

$$-7b > -\frac{7a}{3}$$

$$a - 3b + a - 4b + a - 1$$

$$= 3a - 7b - 1$$

$$> \frac{2a}{3} + 1$$

$$M = a - 3b + a + 4b - a + 1 = b + \frac{a}{3} + 1$$

$$\geq 0$$

$$3a - 7b + 1$$

$$b < \frac{a-1}{4}$$

$$-7b > -\frac{7a+7}{4}$$

$$3a - 7b - 1 > \frac{13a - 7a}{4} + \frac{3}{4}$$

$$a > 0$$

$$3b < a$$

$$4b + 1 < a$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$ax^2 + bx + c$$

$$\frac{b}{a} = -(x_1 + x_2)$$

$$\frac{c}{a} = x_1 x_2$$

$$\frac{b^2}{a^2} - \frac{4c}{a} = (x_1 - x_2)^2$$

$$\frac{b^2}{a^2} - \frac{4(c+4)}{a} = (x_1 - x_2)^2 - 8$$

$$\left(\frac{b^2}{a^2}\right) - \frac{4(c+4)}{a} + 8 = \left(\frac{b^2}{a^2}\right) - \frac{4c}{a}$$

$$- \frac{(c+4)}{a} + 2 = - \frac{c}{a}$$

$$\begin{array}{r} \times 14 \\ 13 \\ \hline 42 \\ 14 \\ \hline 182 \end{array}$$

$$\frac{c}{a} + 2 = \frac{c+4}{a} \quad / \cdot a$$

$$c + 2a = c + 4$$

$$6 \cdot 15$$

$$a = 2$$

$$\frac{6 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13}{6}$$

$$\frac{b^2}{a^2} - \frac{4(c+4+d)}{a} = (x_1 - x_2)^2 - 10$$

$$- \frac{6 \cdot 5}{2} = 15$$

$$\left(\frac{b^2}{a^2}\right) - \frac{4(c+4+d)}{a} = \left(\frac{b^2}{a^2}\right) - \frac{4(c+4)}{a} - 2$$

$$2 + \frac{4(c+4)}{a} = \frac{4(c+4+d)}{a}$$

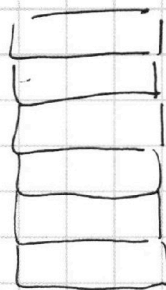
$$2 = \frac{d}{a}$$

$$d = 4$$

$$\frac{15 \cdot 14 \cdot 13}{2} - 15$$

$$15 \cdot 181$$

1 набор полных
это 6 вариантов
и 3 любых



$$\sqrt{x} = a$$

$$\sqrt{y} = b$$

$$\sqrt{7} \cdot a + \sqrt{2} \cdot b = 2024\sqrt{45}$$

$$+ 2b^2 + \sqrt{14}ab = 2024\sqrt{45}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐2
☐3
☐4
☐5
☐6
☐7
☐СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$ax^2 + bx + c$$

$$-b = x_1 + x_2$$

$$c = x_1 x_2$$

$$ax^2 + bx + c + 4$$

$$a = (x_1 - x_2)^2 = x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 = b^2 - 4c$$

$$a - 8 = b^2 - 4(c + 4)$$

$$b^2 - 4(c + 4) + 8 = b^2 - 4c$$

$$ax^2 + bx + c$$

$$x_1, x_2$$

$$(x_1 - x_2)^2 =$$

$$x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2$$

$$= (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2$$

$$b^2 - 4 \cdot c$$

$$b^2 - 4c$$

$$b^2 - 4(c + 4)$$

~~$$x^2 + 2x + 4 + 2(x - 3)(x - 5) = x^2 - 8x + 15$$~~

~~$$x_1 = 3$$~~
~~$$x_2 = 5$$~~

$$x_1 = 3 \quad x_2 = 5$$

$$(x_2 - x_1)^2 = 8^2 - 4 \cdot 15$$

$$x \geq 0 \quad y \geq 0$$

$$2025 = 45^2$$

$$\begin{array}{r} 45 \\ \times 45 \\ \hline 225 \\ 180 \\ \hline 2025 \end{array}$$

$$\sqrt{7x} + \sqrt{2y} = \sqrt{2024^2 + 2025}$$

$$\sqrt{7x} + \sqrt{2y} = 2024 \sqrt{45}$$

$$7x + 2y + 2$$

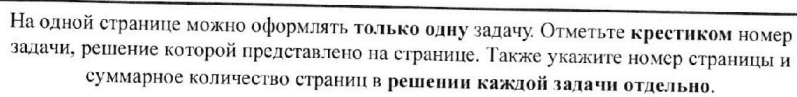
$$-a - b >$$

$$b < \frac{a-1}{4}$$

$$-b > \frac{1-a}{4}$$

$$a \leq 3b$$

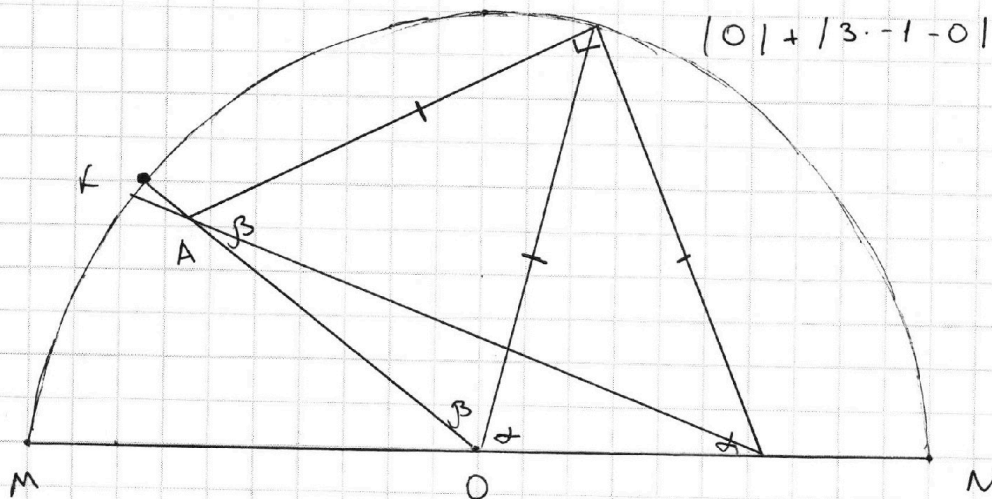
$$-a \geq -3b$$



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{aligned} 2\beta + 2\alpha + 90 &= 360 \\ \alpha + \beta &= 135 \end{aligned}$$

25

1	2	3
4	5	6
7	8	9

1 2 3

$$|a| + |3b - a| + |4b - a + 1|$$

$$|a| + |3b - a| + |4b - a| + |1|$$

$$a = 0$$
$$3b = a = 0$$

$$4b - a + 1 = 0$$

25/3/19

$$a > 0$$

$$3b - a > 0$$

$$4b - a + 1 > 0$$

$$a > 0 \quad b > \frac{a}{3}$$

$$\begin{aligned} a + 3b - a + 4b - a + 1 \\ = 7b - a + 1 \end{aligned}$$

$$> \frac{4}{3}a + 1 > 1$$

$$4b + 1 = 3b$$

$$b = -1$$

$$\begin{aligned} a &> 0 \\ 3b - a &> 0 \end{aligned}$$

$$4b - a + 1 < 0$$

$$4b + 1 < a < 3b$$

$$b = -1$$

$$\begin{aligned} a &> 0 \\ 3b - a &< 0 \end{aligned}$$

$$4b - a + 1 > 0$$

$$3b < a < 4b + 1$$

$$0 \leq a < b+1$$

$$\frac{1}{3}a > b > -1$$

$$a - 3b + a + 4b - a + 1$$

$$a + b + 1 > 0$$

$$0 \quad -1 \quad +1$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{7x} + \sqrt{2y} = 2024\sqrt{45}$$

$$7x + 2y + 2\sqrt{14xy} = 2024^2 \cdot 45$$

$$7x + 2y + 2\sqrt{14xy} = 2024^2 \cdot 45$$

$$2\sqrt{14xy} = 2024^2 \cdot 45 - 2y - 7x$$

$$56xy = 20$$

$$a \geq b$$

$$12b + a = 2a + 6b$$
$$6b = a$$

$$2 \cdot b^2 + 3 = 7b$$

$$2b^2 - 7b + 3 = 0$$

$$b^2 - 3,5b + 1,5 = 0$$

$$(b-3)(b-0,5) = 0$$

$$b = 3$$
$$a = 18$$

$$0,5 \times$$

$$\begin{array}{r} \times 161 \\ 15 \\ \hline 905 \end{array}$$

$$b \geq a$$

$$\begin{array}{r} 161 \\ 2715 \end{array}$$

$$12a + b = 2a + 6b$$

$$10a = 5b$$

$$5a = b$$

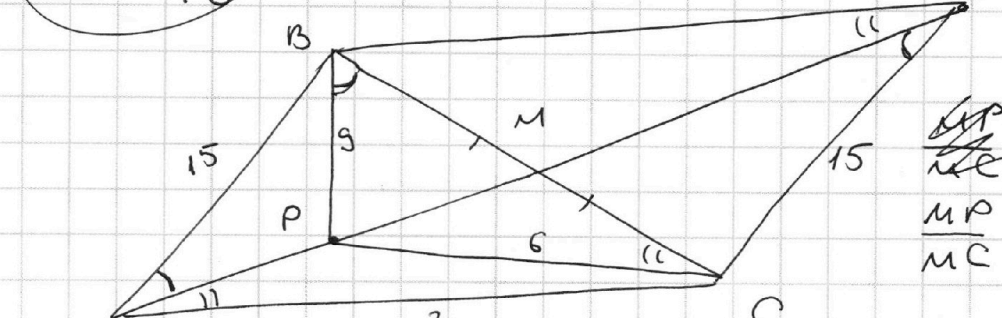
$$2 \cdot a^2 + 3 = 7 \cdot a$$

$$a = 3$$

$$b = 15$$

$$\frac{b^2}{a^2} - \frac{4(c+5)}{a^2} + 10$$

$$= \frac{b^2}{a^2} - \frac{4c}{2}$$



$$\frac{MP}{MC} = \frac{PC}{AC}$$

$$\frac{MB}{AM} = \frac{BP}{AB}$$

$$\frac{MP \cdot MB}{MC \cdot AM} = \frac{PC \cdot BP}{AC \cdot AB}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

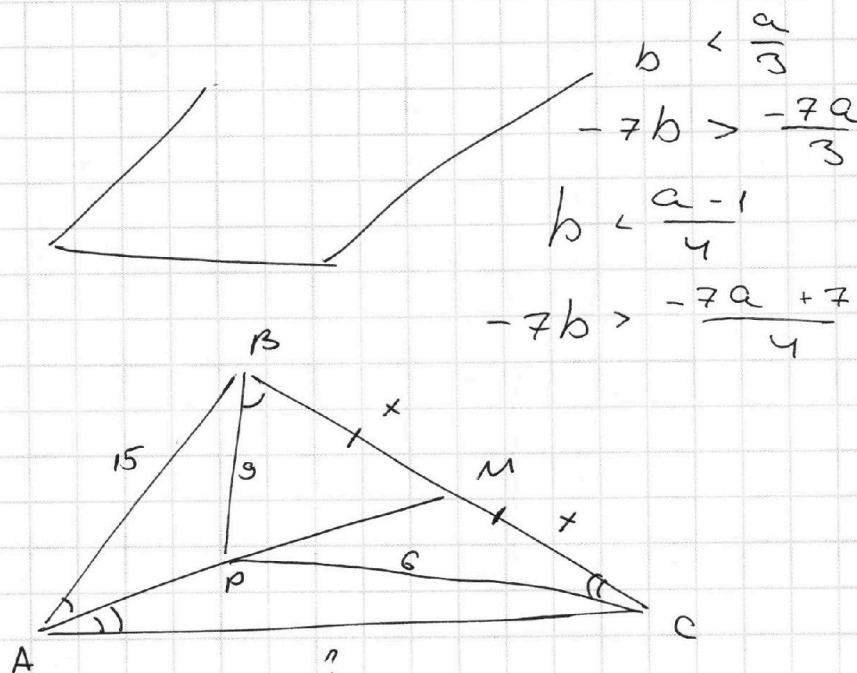
1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{array}{r} 81 \\ * 36 \\ \hline 117 \\ 225 \\ - 117 \\ \hline 108 \end{array}$$

$$\begin{aligned} AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos \alpha &= BC^2 \\ BP^2 + PC^2 - 2 \cdot BP \cdot PC \cdot \cos(180 - \alpha) &= BC^2 \\ 15^2 + AC^2 - 30AC \cos \alpha &= 81 + 36 + 108 \cos \alpha \\ 108 + AC^2 - 138AC \cos \alpha &= 0 \end{aligned}$$



$$\frac{BP}{AB} = \frac{BM}{AM} = \frac{PC}{AC}$$

$$AC = \frac{AB \cdot PC}{BP} = \frac{6 \cdot 15}{9} = 10$$

