



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.
4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-13; 26)$, $Q(3; 26)$ и $R(16; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$.
6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 5 и 2,5.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} ab : 2^{15} \cdot 7^{11} \\ bc : 2^{17} \cdot 7^{18} \\ ac : 2^{23} \cdot 7^{39} \end{cases} \quad (abc)^2 = (2^{23+32} \cdot 7^{29+39}) = (2^{55} \cdot 7^{68})$$

Поскольку, это степени возведения
каждого простого числа p в произведе-
ние $(abc)^2$ — четные. Тогда степень
возведения двоек $v_2(abc)$ не менее 56. Тогда
 $(abc) \geq (2^{28} \cdot 7^{34})^2 \Rightarrow (abc) \geq 2^{28} \cdot 7^{34}$. Пример

где $abc = 2^{28} \cdot 7^{34}$. При этом сумма
 $a \geq 2^9 \cdot 7^{11}$ исчерпаны v_7 в числе a
 $b = 2^8 \cdot 7$ и c не менее 39. Значит,
 $c = 2^8 \cdot 7^{28}$ $abc \geq 2^{28} \cdot 7^{39}$

$$\begin{cases} a = 2^{11} \cdot 7^{11} \\ b = 2^5 \cdot 7^0 \\ c = 2^{12} \cdot 7^{28} \end{cases}$$

Ответ: $2^{28} \cdot 7^{39}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Если $\frac{a}{b}$ несократима, то $(a, b) = 1$.

$$(a+b, a^2 - 7ab + b^2) = (a+b, (a+b)^2 - 9ab) = \\ = (a+b, 9ab) = 1.$$

ab состоит только из делителей a и b , но $(a+b, a) = (a+b, b) = (a, b)$. Тогда $(a+b, ab) = (a, b) = 1$.

Тогда $(a+b, 9ab) \leq 9$. Тогда если $(a+b, 9ab) = 9$, то $(a+b) \mid 9$. Рассмотрим $a+b=9$, тогда $a=1, b=8$. Тогда $\frac{a+b}{a^2 - 7ab + b^2} = \frac{1+8}{1-56+64} = \frac{1+8}{1+8} = \frac{9}{9} = 1$.

Ответ: 9

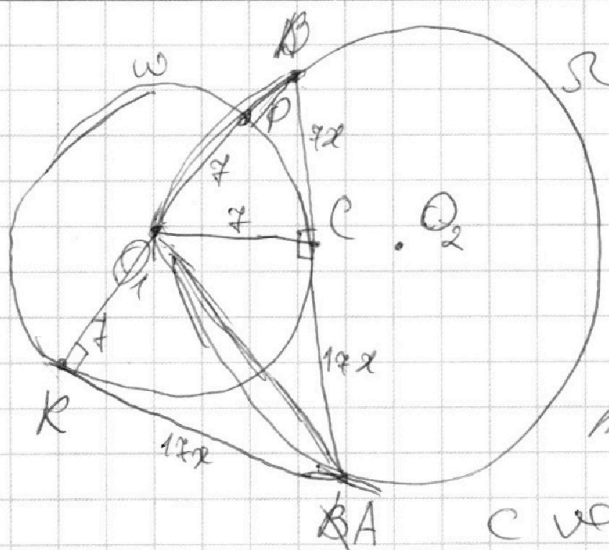
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Пусть O_1 - центр
маленького
 O_2 - центр Ω .

Тогда пусть $D =$
 $= BO_1 \cap \omega$, K - вторая
точка пересечения BD

с ω . Тогда по св-ву ка-
сательной AB : ~~$(BC)^2 = (BA) \cdot (BD)$~~ $OC \perp AB$.

Также $(BD + 14) \cdot BD = BC^2 = 49x^2$ где $x > 0$

(из условия, тогда $A C = 7x \Rightarrow BD + 14 \cdot BD =$
 $= BC^2 = 49x^2, 49x^2 + 49 = (7 + BD)^2$

~~KA~~ KA - касательная к ω , дей-
ствительно, кас-я $K\omega$ в K и AB
пересекаются в той же точке, что

$AC = KA \cdot x$. Отсюда $x = A \Rightarrow \frac{BO_1}{BA} = \frac{7+BD}{24} =$
 $= \frac{7}{17x}$ ~~$7 + 17x \cdot BD$~~ (по подобию

$\triangle O_1BC$ и ABK по 2 углам)

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\text{Пусть } 1-9x = y, 3x^2 + 3x + 1 = a,$$

$$\text{Тогда } \sqrt{a+y} - \sqrt{a} = y.$$

Дополним на $(\sqrt{a+y} + \sqrt{a})$.

$$a+y-a = y(\sqrt{a+y} + \sqrt{a})$$

$$y = y(\sqrt{a+y} + \sqrt{a}) \neq$$

$$\left[\begin{array}{l} y=0 \Rightarrow x = \frac{1}{9} - \text{не подходит}; \\ \sqrt{a+y} + \sqrt{a} = 1 \end{array} \right. \quad \sqrt{\frac{3x^2}{24}} - \sqrt{\frac{3x^2}{24}} = 0$$

$$2a+y+\sqrt{a^2+ay} = 1$$

$$2\sqrt{a^2+ay} = (1-2a-y)^2 \Rightarrow 2a^2+4ay = 1+4a^2+y^2-4a-2y+y^2+4ay$$

$$1-4a-2y+y^2 = (y-1)^2 - 4a = 0$$

$$(y-1)^2 = 4a$$

$$9x^2 = 4(3x^2 + 3x + 1)$$

$$81x^2 = 12x^2 + 12x + 4$$

$$69x^2 - 12x - 4 = 0$$

$$D = 12^2 - 4 \cdot (-4) \cdot 69 = 144 + 1104 = 1248$$

$$x = \frac{12 \pm \sqrt{1248}}{2 \cdot 69} = \frac{4}{23} \pm \sqrt{288}$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \frac{4}{9}; -\frac{4}{23} + \sqrt{288}; -\frac{4}{23} - \sqrt{288} \right\}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Сперва заметим, что во второй ^{кравействе} ~~уравнении~~ ^{дан} 2 уравнения окружностей с центрами в $(0; 0)$ и радиуса 1 и с центром в $(0; 12)$ и радиуса 13 .

Тогда, чтобы при ~~проведении~~ ^{проведении} скабок было отрицательно, ~~тогда~~ ^{тогда} из них дана на быть пол-ки, а другая окруж-ка, также возможно, что какая-то равна 0.

Тогда решим систему (x, y) -точка с координатами (x, y) , лежащая внутри одной или на границе одной окруж-ки.

Тогда они не имеют общих точек.

Тогда, если прямая $ax + y - 8b$ пересекает хотя бы одну такую окруж-ность, то найдется какой-то отрезок, все точки которого удовлетворяют решению. Тогда ~~точка~~ $ax + y - 8b = 0$ имеет не более 1 точки с касанием к окруж-ности.

Тогда $ax + y - 8b = 0$ - касательная к кривой.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Значит,
$$\begin{cases} ax+y=8b \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$$
 имеет 1 решение.

$$y=8b-ax$$

$$64b^2 - 16abx + a^2x^2 + x^2 = 1$$

$$x^2(a^2+1) - 16abx + 64b^2 - 1 = 0$$

$$D = (16ab)^2 - 4(a^2+1)(64b^2-1) = 256a^2b^2 - 256b^2 - 4a^2b^2 + 4$$

$$-a^2b^2 - 256b^2 + 4a^2 + 4 = -256b^2 + 4a^2 + 4 = 0$$

$$256b^2 = 4a^2 + 4 \Rightarrow a^2 + 1 = 64b^2$$

По аналогии

$$\begin{cases} ax+y=8b \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$$

$$x^2+y^2-24y+144=16$$

$$x^2(a^2+1) - 16abx + 64b^2 - 1 = 0$$

$$(a^2+1)x^2 - 192b + 24ax - 8abx = 0$$

$$64a^2(3-b)^2 = 192 \cdot b - 4(a^2+1)$$

Получаем $(64b^2-1)(3-b)^2 = 64 \cdot 48b^3$

Решая уравнение, легко найти требуемое a .

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

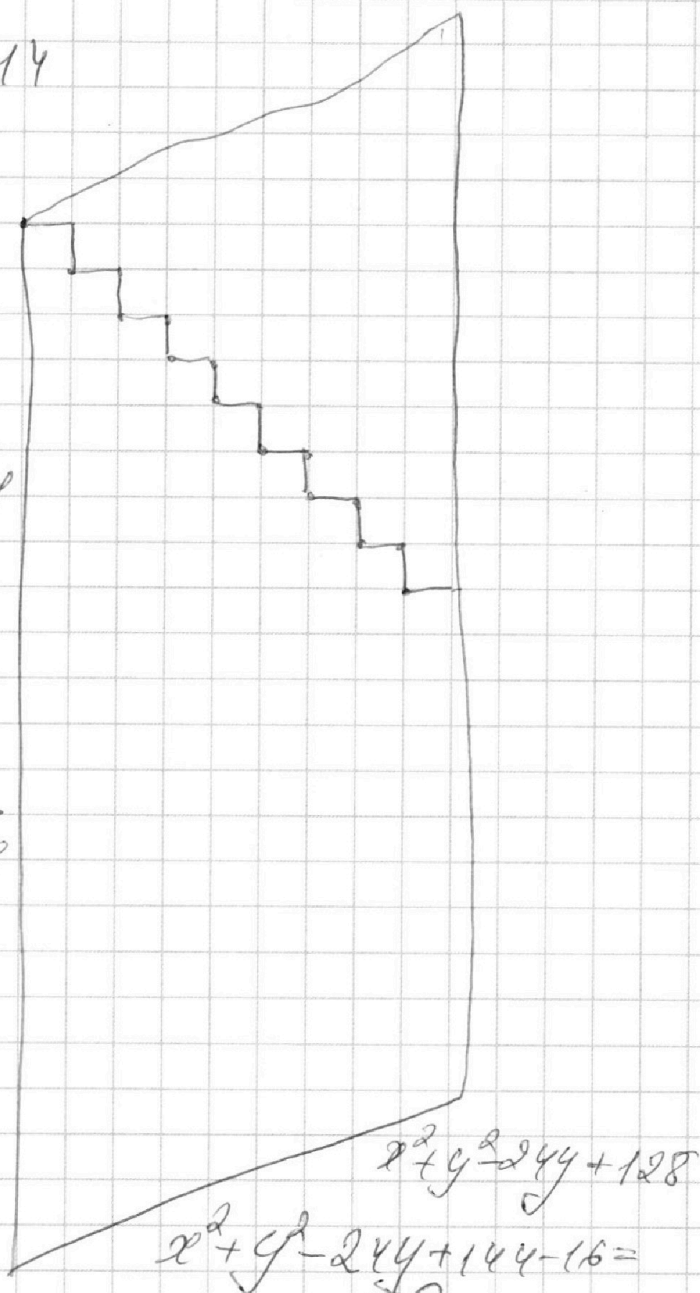
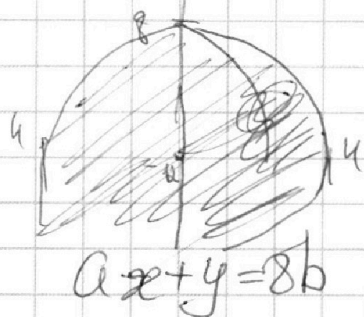
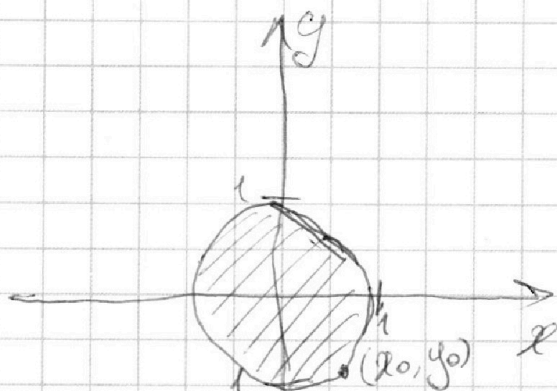


$$2(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 14$$

$$y_0 = 8b - ax_0$$

$$y = 8b - ax$$

$$64b^2 - 16abx + a^2x^2 + x^2 - 1$$



$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

$ax + y = 8b$ — касательная

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0 \\ (x^2 + (y - 12)^2 - 16) = 0 \end{cases}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$(9x)^2 = 2(3x^2 + 3x + 1)$$

$$81x^2 = 6x^2 + 6x + 2$$

$$75x^2 - 6x - 2 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac = 36 - 4 \cdot 75 \cdot (-2) = 36 + 600 = 636$$

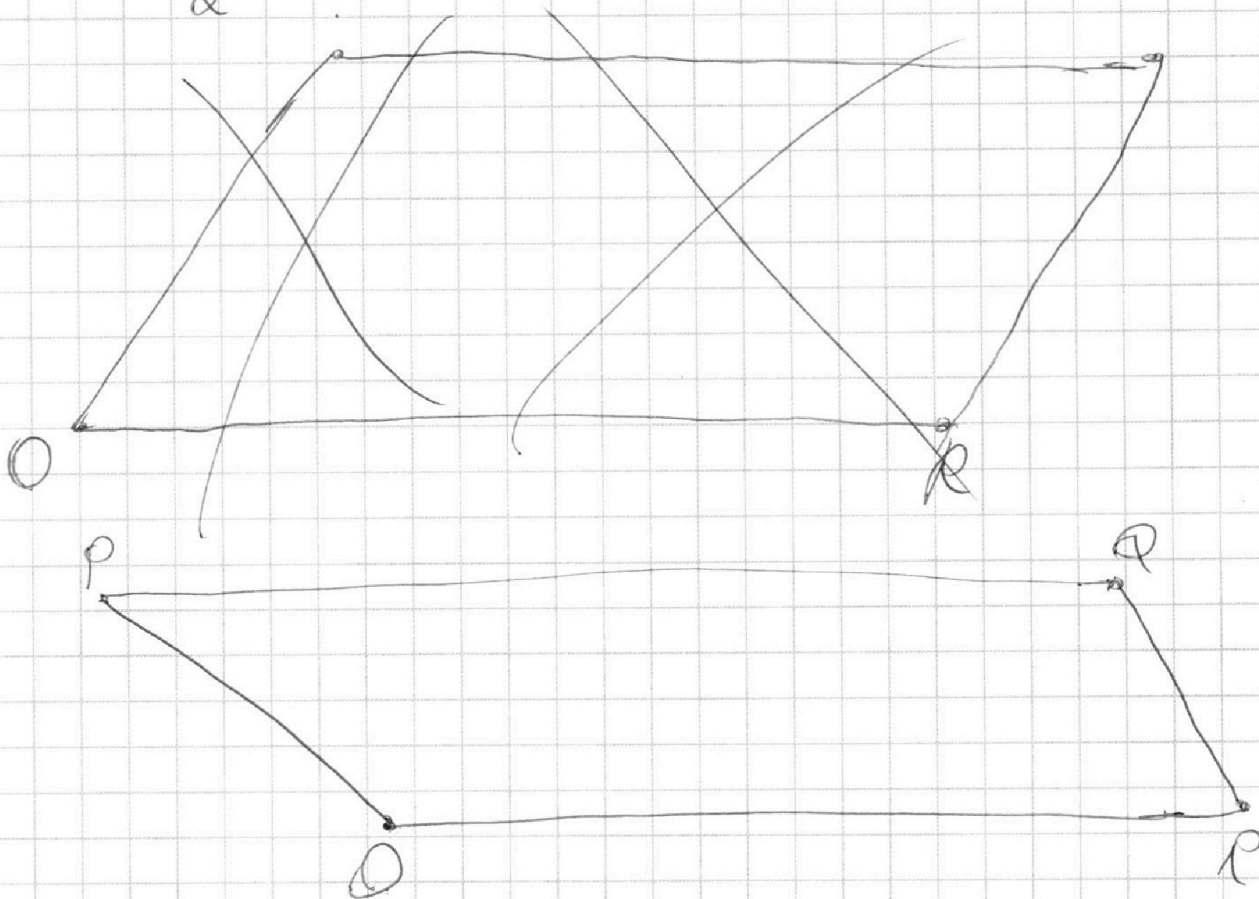
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-6 \pm \sqrt{636}}{150}$$

$$\frac{-3 \pm \sqrt{164}}{25} = -3 \pm \sqrt{84} = -3 \pm 2\sqrt{21}$$

$$(1 - (x - 9x)) = 9x$$

$$\begin{array}{r} 83 \\ \times 16 \\ \hline 414 \end{array} \quad \begin{array}{r} 69 \\ \times 4 \\ \hline 276 \end{array} \quad \begin{array}{r} 276 \\ + 9 \\ \hline 285 \end{array}$$

$$\frac{12}{69} = \frac{4}{23}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи.

решение которой представлено на странице:



- 1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned}
 3x^2 - 6x + 2 &\geq 0 \\
 (3x^2 + 3x + 1) &\geq 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (1-2a-y)^2 &= (1-2a-y)(1-2a-y) = \\
 &= (1-2a^2-y-2a+4a^2+2ay - \\
 &\quad -y+2ay+y^2) = 0
 \end{aligned}$$

$$D_1 = 36 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 36 - 24 = 12$$

$$D_2 = 9 - 4 \cdot 1 \cdot 3 < 0$$

$$y = 1 - 9x$$

$$(1-y)^2 = 2a \quad y \geq 0; \quad y \geq -a$$

$$\sqrt{a+y} - \sqrt{a} = y$$

$$(a+y+a-2\sqrt{a^2+ay}) = y^2$$

$$(2a+y) - 2\sqrt{a^2+ay} = y^2$$

$$y^2 - 2a - y = -2\sqrt{a^2+ay}$$

$$a+y-a = y(\sqrt{a+y} + \sqrt{a})$$

$$\begin{aligned}
 &\sqrt{a+y} + \sqrt{a} \\
 &6x^2 + 6x + 2 + 2(3x^2 + 3x + 1) \cdot \\
 &\quad \cdot (1-9x) + (1-9x)
 \end{aligned}$$

$$ax + y - 8b = 0$$

$$(x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y-12)^2 - 16) \leq 0$$

$$\begin{aligned}
 \sqrt{3 \cdot \frac{1}{81} - \frac{6}{9} + 2} &= \sqrt{\frac{241}{27} - \frac{2}{3} + 2} = \\
 &= \sqrt{\frac{-17}{27} + 2} = \sqrt{\frac{37}{27}}
 \end{aligned}$$

$$\sqrt{a+y} + \sqrt{a} = 1$$

$$\sqrt{3 \cdot \frac{1}{81} + \frac{3}{9} + 1} = \sqrt{\frac{37}{27}}$$

$$2a+y+2\sqrt{a^2+ay} = 1$$

$$2 \cdot 2ay = 4ay$$

$$(1-2a-y)^2 = 4(a^2+ay)$$

$$1 + 2a^2 + y^2 - 4a - 4y + 4ay = 4a^2 + 4ay$$

$$1 + y^2 - 4a - 4y - 2ay = 0$$

$$(y^2 - 2y + 1) + 2(a + 2ay + y) = 0$$

$$(y-1)^2 + 2(a+y) = 0$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

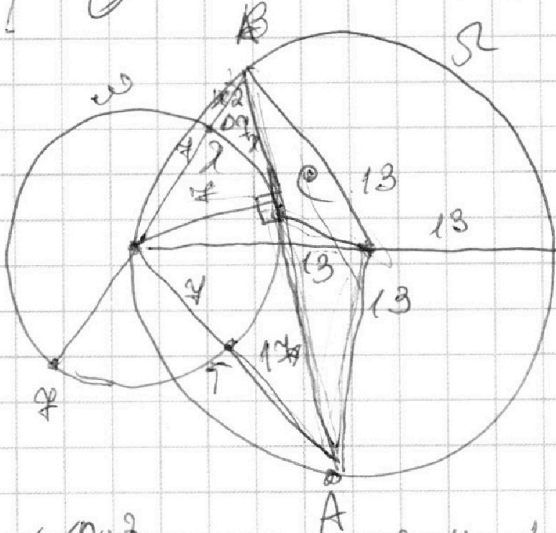
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

$$3x^2 - 6x + 2 + 3x^2 + 3x + 1 - 2\sqrt{(3x^2 - 6x + 2)(3x^2 + 3x + 1)} = 1 - 18x + 81x^2$$

$$49x^2 + 49 = 81 \Rightarrow 49x^2 = 32$$



$$49x^2 = 49 \cdot 13x = 49 \cdot 13$$

$$x = \sqrt{\frac{32}{49}} = \frac{\sqrt{32}}{7} = \frac{4\sqrt{2}}{7}$$

$$(7+x)^2 = 7^2 + (7x)^2 =$$

$$= 49 + 14x + x^2 = 49 + 49x^2$$

$$14x + x^2 = 49x^2$$

$$14x = 48x^2$$

$$7x = 24x^2$$

$$7 = 24x \Rightarrow x = \frac{7}{24}$$

$$14BD + BD^2 = 49x^2$$

$$49x^2 + 49 = (7+BD)^2$$

$$49 + 14BD + BD^2 = 49 + BD^2 + 28BD$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

$$(3x^2 - 6x + 2 + 3x^2 + 3x + 1) - 2\sqrt{\dots} = 1 - 18x + 81x^2$$

$$6x^2 - 3x + 3 - 2\sqrt{\dots} = 1 - 18x + 81x^2$$

$$75x^2 - 15x - 2 = -2\sqrt{\dots}$$

$$(7x)^2 + 49 = (7+x)^2$$

$$49x^2 + 49 = 49 + 7x^2 + 2x^4$$

$$42x^2 = 2x^4 \Rightarrow x^2 = \sqrt{42} \Rightarrow AB = 24\sqrt{42}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

 МФТИ



1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$64a^2(3-b)^2 = 192b \cdot 4 \cdot (a^2+1)$$

$$16a^2(3-b)^2 = 48b(a^2+1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a^2+1 = 64b^2 \end{array} \right.$$

$$a^2 = 64b^2 - 1$$

$$(64b^2 - 1)(3-b)^2 = 48b \cdot 48b^3$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + y^2 - 24y + 144 = 16 \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 - 24y + 144 = 16$$

$$-24y + 144 = 16 - 1$$

$$24(6 - y) = 15$$

$$6 - y = \frac{15}{24} \Rightarrow y = 6 - \frac{15}{24} = 5\frac{9}{24} = 5\frac{3}{8}$$

$$x(14 + 10D) = x^2 + 49x^2$$

$$296 + 28BD + BD^2 =$$

$$= 49 + 49x^2$$

$$24x + 28BD + BD^2 = 49x^2$$

$$\begin{cases} ax + y = 8b \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

$$y = 8b - ax$$

$$x^2 + (8b - ax)^2 = 1$$

$$x^2 + 64b^2 - 16abx + a^2x^2 = 1$$

$$(a^2 + 1)x^2 - 16abx + 64b^2 - 1 = 0$$

$$D = (16ab)^2 - 4(a^2 + 1)(64b^2 - 1) = 256a^2b^2 - 256a^2b^2 + 4a^2b^2 + 4 = 4a^2b^2 + 4$$

$$4a^2b^2 + 4 = 256b^2$$

$$a^2 + 1 = 64b^2$$

$$\begin{cases} ax + y = 8b \\ x^2 + y^2 - 24y + 128 = 0 \end{cases}$$

$$(a^2 + 1)x^2 - 16abx + 24y + 128 - 8^2ax = 0$$

$$24y + 3ax - ab = 0$$

$$ab = 24y + 3ax =$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 24y + 128 = 0 \\ ax - 8b + y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} 5 \cdot 26 \\ -492 \\ \hline 64 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3 \\ \sqrt{128} \\ \hline 492 \end{array}$$

$$y = 8b - ax$$

$$64b^2 - a^2x^2 + x^2 - 24(8b - ax) + 128 = 0$$

$$D = 24^2 - 4 \cdot (128 - 576 - 492) = 64 - 42^2 = 0$$

$$y = \frac{24 \pm \sqrt{64 - 42^2}}{2} = 8b - ax = \sqrt{1 - x^2}$$

$$64b^2 + a^2x^2 = 1 - x^2 + 16abx$$

$$(a^2 + 1)x^2 - 16abx + 64b^2 - 1 = 0$$

$$D = 256a^2b^2 - 4(a^2 + 1)(64b^2 - 1) = 256a^2b^2 - 4(64a^2b^2 + 64ab^2 - a^2 - 1) = 256a^2b^2 - 256a^2b^2 - 256ab^2 + 4a^2 + 4 = -256ab^2 + 4a^2 + 4 \geq 0$$

$$-256ab^2 + 4a^2 + 4 \geq 0$$

$$-256b^2 + 4a^2 + 4 \geq 0$$

$$4a^2 + 4 \geq 256b^2$$

$$4a^2 + 1 \geq 256b^2$$

