



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ



10 КЛАСС. Вариант 9

- [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
- [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2 - 6ab + b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

- [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.
- [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

- [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-12; 24)$, $Q(3; 24)$ и $R(15; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$.
- [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

- [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 4,5 и 2.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

N1

$$ab : 2^{14} \cdot 7^{10}$$

$$bc : 2^{12} \cdot 7^{12}$$

$$ac : 2^{20} \cdot 7^{37}$$

Для того, чтобы abc было наименьшим, надо чтобы a, b, c состояли только из 2 и 7.

Тогда:

$$ab = 2^{14+x_1} \cdot 7^{10+x_2}$$

$$bc = 2^{12+y_1} \cdot 7^{12+y_2}$$

$$ac = 2^{20+z_1} \cdot 7^{37+z_2}, \text{ где } x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2 \in \mathbb{N}$$

тогда:

$$b^2 = \frac{ab \cdot bc}{ac} = 2^{11+x_1+y_1-z_1} \cdot 7^{-10+x_2+y_2-z_2}$$

Чтобы b было целое, тогда должны быть одно из x_1, y_1, z_1 должно быть 1, а чтобы сумма x_2+y_2 была четной 10. В таком случае:

$$a^2 b^2 c^2 = 2^{51+x_1+y_1+z_1} \cdot 7^{69+x_2+y_2+z_2}$$

У z предыдущих условий, $x_1+y_1+z_1$ должна быть 1, и x_2+y_2 , а следовательно и $x_2+y_2+z_2$ должна быть 10.

$$a^2 b^2 c^2 = 2^{51+1} \cdot 7^{69+10} = 2^{52} \cdot 7^{10}$$

↓

$$abc = 2^{26} \cdot 7^{37}$$

$$\text{Ответ: } abc = 2^{26} \cdot 7^{37}.$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

5

6

7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

✓2

Чтобы

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}$$

можно было сократить

на m , надо чтобы $(a+b) : m$ и $(a^2-6ab+b^2) : m$.

Тогда: $a^2-6ab+b^2 : m$

✓

$$(a^2+2ab+b^2-8ab) : m$$

$$((a+b)^2 - 8ab) : m \quad \text{м.к. } (a+b) : m, \text{ но } (a+b)^2 : m$$

✓ //

$$8ab : m$$

~~но м.к. а и б разные~~

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

5

6

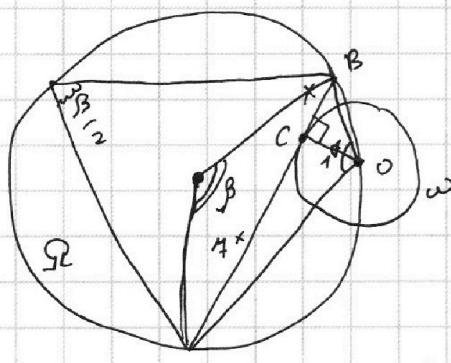
7

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№3



С одной стороны,

$$8x = 2R_{\Omega} \cdot \sin \frac{\beta}{2}$$

$$\frac{\beta}{2} = 180^\circ - \alpha$$

$$\sin \frac{\beta}{2} = \sin \alpha$$

$$\text{А } \sin \alpha = \sin(\angle AOC + \angle COB)$$

$$\sin \angle AOC = \frac{7x}{\sqrt{49x^2+1}}$$

$$\cos \angle AOC = \frac{1}{\sqrt{49x^2+1}}$$

$$\sin \angle COB = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$\cos \angle COB = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \sin \angle AOC \cos \angle COB + \cos \angle AOC \sin \angle COB = \\ &= \frac{7x}{\sqrt{49x^2+1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{49x^2+1}} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \end{aligned}$$

$$= \frac{8x}{\sqrt{49x^2+1} \cdot \sqrt{x^2+1}}$$

$$8x = 2R_{\Omega} \cdot \sin \alpha \Rightarrow \sin \alpha = \frac{8x}{2R_{\Omega}}$$

$$\frac{8x}{\sqrt{49x^2+1} \cdot \sqrt{x^2+1}} = \frac{8x}{2R_{\Omega}} \Rightarrow$$

$$\sqrt{49x^2+1} \cdot \sqrt{x^2+1} = 2R_{\Omega} = 2 \cdot 5$$

$$(49x^2+1) \cdot (x^2+1) = 100$$

Лучше $x^2 = t$

$$49t^2 + 49 + t + 1 = 100$$

$$49t^2 + 50t - 99 = 0$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

5

6

7

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

✓ 3 (продолжение)

$$0 = 50^2 + 99 \cdot 5 \cdot 5g = 50^2 + (148 - 50)(148 + 50) =$$

$$= 50^2 + (148^2 - 50^2) = \cancel{148} 148^2$$

$$t_{1,2} = \frac{-50 \pm 148}{98}$$

{ - не подходит, т.к.
 $t = x^2$

$$t = \frac{-50+148}{98} = 1$$

✓

$$x = \sqrt{t} = 1$$

А т.к. $AB = 8\sqrt{t}$, то $AB = 8$.

Ответ: $AB = 8$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input checked="" type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N⁴

$$1. \sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x \quad | \cdot (\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1})$$

$$(2x^2 - 5x + 3) - (2x^2 + 2x + 1) = (2 - 7x)(\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1})$$

$$2 - 7x = (2 - 7x)(\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1})$$

$$2. \sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 1$$

1. + 2.

$$2\sqrt{2x^2 - 5x + 3} = 3 - 7x$$

$$4 \cdot (2x^2 - 5x + 3) = 9 - 42x + 49x^2$$

$$8x^2 - 20x + 12 = 9 - 42x + 49x^2$$

$$49x^2 - 22x - 3 = 0$$

$$\Delta = 484 + 492 = 976$$

$$x_{1,2} = \frac{22 \pm \sqrt{976}}{42}$$

$$\text{Ну: } \begin{array}{l} \text{условие: } \\ 2x^2 + 5x + 3 \geq 0 \end{array} \Rightarrow \begin{cases} x \geq \frac{5 + \sqrt{5}}{4} \\ x \leq \frac{5 - \sqrt{5}}{4} \end{cases}$$

$$\cancel{x = \frac{22 + \sqrt{976}}{42}} < \cancel{\frac{5 + \sqrt{5}}{4}}, \text{ но } \cancel{\text{поскольку оно не подходит.}}$$

$$x = \frac{22 - \sqrt{976}}{42} < \cancel{\frac{5 - \sqrt{5}}{4}}, \text{ поэтому оно подходит.}$$

$$\frac{22 + \sqrt{976}}{42} < \frac{5 + \sqrt{5}}{4}, \text{ но } > \frac{5 - \sqrt{5}}{4}, \text{ поэтому}$$

оно не подходит



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

1 корень $\frac{22 - \sqrt{976}}{42} < \frac{5 - \sqrt{5}}{4}$, поэтому

погрешно

Ответ: $x = \frac{22 - \sqrt{976}}{42} \approx -0,23$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

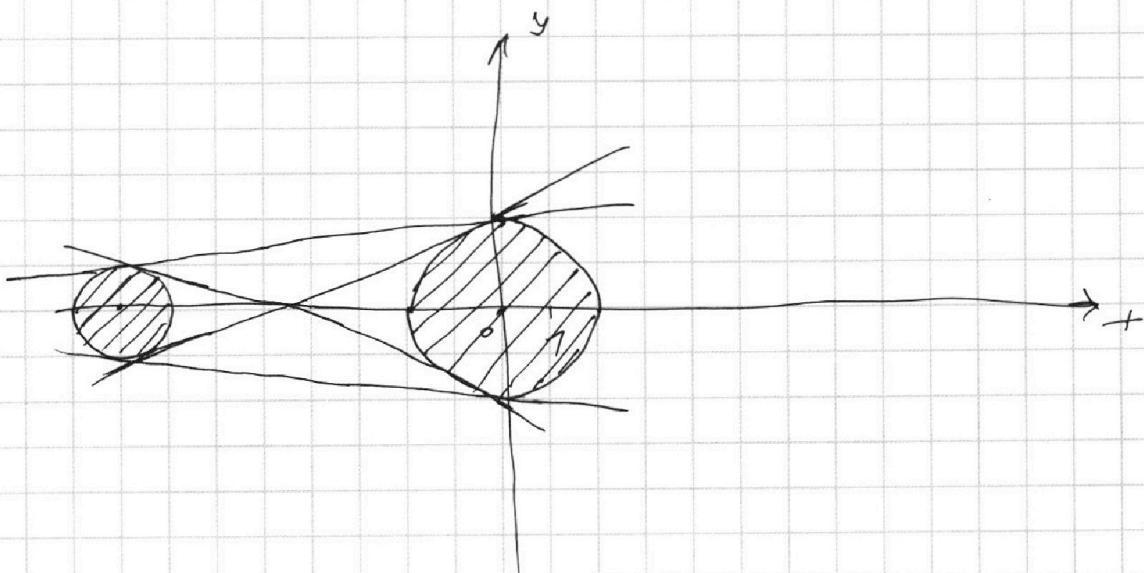
МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N5

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0 \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

это два уравнения ~~окруженности~~ окружности



Если первая скобка ≤ 0 , то (x, y) внутри
левой ~~окружности~~ окружности и тогда вторая скобка должна

быть ≥ 0 , то есть (x, y) спаруже правой ~~окружности~~ окружности и наоборот вторая скобка ≤ 0 , тогда первая ≥ 0 и (x, y) внутри

второй окружности.

Уравнение $ax - y + 10b = 0$

$y = ax + 10b$, это просто прямая.
Тогда одно решение будет, когда прямая будем касательной сразу к двум окружностям.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N5 (продолжение)

Пусть $y = \cancel{ax} + k$, где $k = 106$

Тогда:

$$\begin{cases} (x+8)^2 + (\cancel{ax} + k)^2 - 1 = 0 \\ x^2 + (\cancel{ax} + k)^2 - 4 = 0 \end{cases}$$

и т.к. это квадратное
то $D = 0$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 4

$$\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2} = 2 - 3x$$

$$\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} = 1$$

$$\sqrt{x_1} = \frac{3 - 3x}{2}$$

$$2x^2 - 5x + 3 = \frac{9 - 52x + 89x^2}{4}$$

$$8x^2 - 20x + 12 = 9 - 52x + 89x^2$$

$$\boxed{41x^2 - 22x - 3 = 0}$$

$$\cancel{1 - 2x - 3x} = \cancel{2x^2 + 2x + 1}$$

$$\cancel{4x} \cancel{1} = \cancel{4x^2}$$

$$49x^2 - 74x + 7 = 8x^2 + 8x + 9$$

$$\begin{aligned} & 2 \cdot 2 \cdot 9'' \\ & 0 \cdot 2 \cdot x^9 \cdot 4^6 \\ & \sim 0 \cdot 2 \cdot x^9 \cdot 4^6 \\ & \sim 14 \cdot 4^6 \\ & \sim 23 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 2x^2 + 2x + 1 \geq 0 \\ & D = 4 - 8 = 0 \\ & x_{1,2} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2} \\ & \boxed{\text{беслуга}} \end{aligned}$$

$$41x^2 - 22x - 3 = 0$$

$$D = \cancel{2} \cdot 484 + 492 = 976$$

$$\boxed{\begin{array}{r} 22 \pm \sqrt{976} \\ \hline 42 \end{array}}$$

ОДЗ:

$$\begin{aligned} & 2 \cdot \left(\frac{22 \pm \sqrt{976}}{42} \right)^2 - 5 \cancel{\frac{2}{42}} + 3 \geq 0 \\ & \left(\frac{22 - \sqrt{976}}{42} \right) \cancel{2} \leq 3 \quad \left(\frac{22 + \sqrt{976}}{42} \right) \cancel{2} \leq 3 \\ & \text{подходит } \cancel{\frac{2}{42}} \quad \text{ненужно } \cancel{\frac{2}{42}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 2x^2 - 5x + 3 \geq 0 \\ & D = 25 - 20 = 5 \\ & x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{4} \\ & x \geq \frac{5 + \sqrt{5}}{4} \\ & x \leq \frac{5 - \sqrt{5}}{4} \end{aligned}$$

—

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



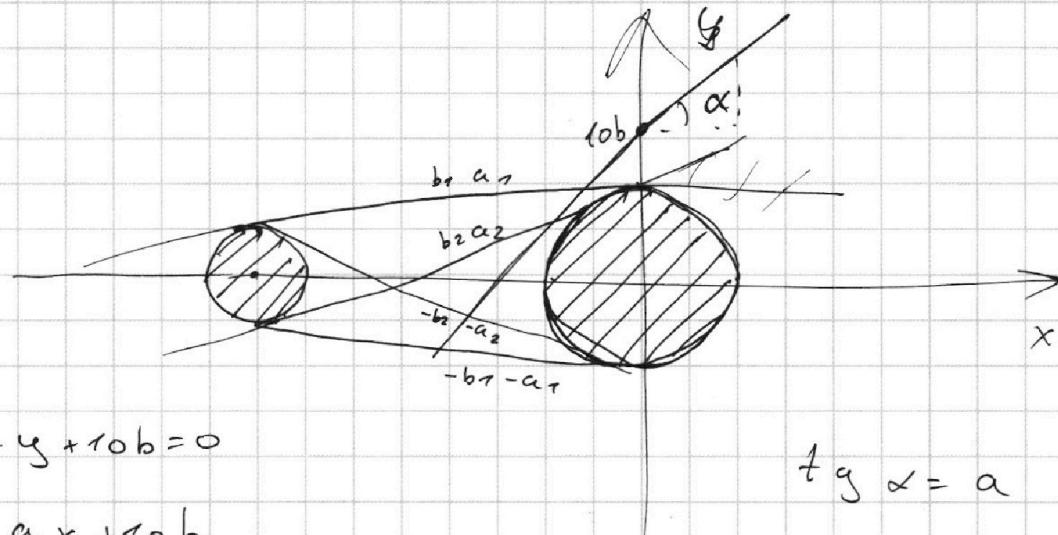
- | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N 5

$$ax - y + 10b = 0$$
$$((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0$$



$$ax - y + 10b = 0$$

$$\tan \alpha = a$$

$$y = ax + 10b$$

$$\begin{cases} (x+8)^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$
$$y = ax + 10b$$

$$y = ax + 10b$$

$$(x+8)^2 + y^2 = 1$$

$$(x+8)^2 + (ax + 10b)^2 = 1$$

$$x^2 + 16x + 64 + a^2x^2 + \cancel{20abx} + 100b^2 = 1$$

$$x^2(1+a^2) + x(16+20ab) + 64 + 100b^2 - 1 = 0$$

$$D = (16+20ab)^2 - 4(1+a^2)(64 + 100b^2 - 1) = 0$$

$$4 \cdot 16^2 + 640ab + 400a^2b^2 = (4+4a^2)(64 + 100b^2 - 1)$$

$$\cancel{-16^2} + 640ab$$

$$8^2 + \cancel{160ab} + 100a^2b^2 = 64 + 100b^2 - 1 + 64a^2 + 100a^2b^2$$

$$64 + 160ab = 64 + 100b^2 - 1 + 64a^2 - a^2 - a^2$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 1$$
$$2x^2 - 5x + 3 + 2\sqrt{(2x^2 - 5x + 3)(2x^2 + 2x + 1)} + 2x^2 + 2x + 1 = 1$$

$$x - y = x^2 - y^2$$

$$x - y = (x - y)(x + y)$$

$$x + y = 1$$

$$\boxed{4x^2 - 3x + 5} + 2\sqrt{\quad} = 1$$

$$\boxed{4x^2 - 3x + 5} - 2\sqrt{\quad} = (2 - 2x)^2$$

$$4x^2 - 3x + 5 = \frac{(2 - 2x)^2 + 1}{2}$$

$$4x^2 - 3x + 5 = 2 - 4x + 2x^2 + \frac{1}{2}$$

$$2x^2 - 4x - 2,5 = 0$$

$$2x^2 - 4x - 2,5 = 0$$

$$D = 22^2 + 4 \cdot 3 \cdot 4,1 =$$

$$x(x+4,1) = 4,1 \cdot 4,1$$

$$\cancel{4,1} \cancel{4,1}$$

$$8 \cdot \cancel{4,1} \cdot \frac{1}{2}$$

$$10 \cdot 4,1 \cdot \frac{6}{5}$$

$$2 \cdot \cancel{4,1} = \frac{2(2x+1-2x+1)}{2}$$

$$484 + 164 \cdot 3 = 984 + 492 =$$

$$= 976$$

$$8x^2 - 6x + 8 = 4 - 28x + 25x^2 + 1$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned}
 & \sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x \\
 & (2x^2 - 5x + 3) - 2 \cdot \sqrt{(2x^2 - 5x + 3)(2x^2 + 2x + 1)} + (2x^2 + 2x + 1) = 4 - 28x + 49x^2 \\
 & 2x^2 - 5x + 3 - 2 \cdot \sqrt{4x^4 + 4x^3 + 2x^2 - 10x^3 - 10x^2 - 5x + 6x^2 + 6x + 3} + 2x^2 + 2x + 1 = 4 - 28x + 49x^2 \\
 & = 4 - 28x + 49x^2 \\
 & 4x^2 - 3x + 4 - 2\sqrt{4x^4 - 6x^3 - 6x^2 - 2x^2 + x + 3} = 4 - 28x + 49x^2 \\
 & 4x^2 - 49x^2 - 3x + 28x + 4 - 2\sqrt{\dots} = 0 \\
 & 4x^2 - 6x^3 - 2x^2 + x + 3 \\
 & 4x^4 - 2x^3 - 4x^2 - 3x - 4x^3 + 2x^2 + 4x + 3 \\
 & (4x^4 - 2x^3 - 4x^2 - 3x) - (4x^3 - 2x^2 - 4x - 3) \\
 & x(4x^3 - 2x^2 - 4x - 3) - (4x^3 - 2x^2 - 4x - 3) \\
 & [(4x^3 - 2x^2 - 4x - 3)(x - 1)] \\
 & x^4 \quad x^3 \quad x^2 \\
 & x^3 \quad x^2 \quad x \\
 & x^2 \quad x \quad x \\
 & 4x^3 - 2x^2 - 4x - 3 \\
 & \cancel{4x^4} \cancel{- 2x^3} \cancel{+ x^2} \cancel{- x} \\
 & \cancel{+ 4x^3} \cancel{- 2x^2} \cancel{+ x} \\
 & \cancel{+ 4x^2} \cancel{- 2x} \\
 & \cancel{+ 4x} \cancel{- 4} \\
 & 4x^4 - 2x^3 \\
 & - 2x^2 \\
 & \sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x \\
 & 2x^2 - 5x + 3 - 2x^2 - 2x - 1 = (2 - 7x)(\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1}) \\
 & - 7x - 2x + 2 = (2 - 7x)\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1}
 \end{aligned}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{a}{b} - \text{несокр.}$$

N₂

$$[a, b] = 1$$

$$\frac{a+b}{a^2 - 6ab + b^2} = \frac{a+b}{a^2 + 2ab + b^2 - 8ab} = \frac{a+b}{(a+b)^2 - 8ab}$$

$$\frac{a^2 - 3ab + b^2 - 3ab}{a(a-3b) + b(b-3a)} \\ a^2 -$$

$$a+b : m$$

$$(a+b)^2 - 8ab : m$$

$$(a+b)^2 : m, 8ab : m$$

$$a+b : m$$

$$8ab : m$$

$$a+b = km$$

$$8ab > nm$$

$$a = km - b$$

$$8(km - b) = nm$$

$$8km - 8b = nm$$

$$8km - 8b^2 = nm$$

$$\begin{cases} a+b : m \\ ab : m \end{cases}$$

$$a = k_1 m + n_a$$

$$b = k_2 m + n_b$$

$$k_1 m + n_a + k_2 m + n_b = m$$

$$m(k_1 + k_2) + (n_a + n_b) : m$$

$$n_a + n_b : m$$

$$(k_1 m + n_a)(k_2 m + n_b) : m$$

$$k_1 k_2 m^2 + k_1 n_b m + k_2 n_a m + n_a n_b : m$$

$$n_a n_b : m$$

$$\frac{a+b}{ab} = \frac{k_1}{k_2}$$

$$k_1 = \frac{k_2(a+b)}{ab}$$

$$a \cdot \frac{1}{b} + \frac{1}{a} = \frac{k_1}{k_2}$$

$$a+b = \frac{k_2(a+b)}{ab} m$$

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{k_1}{k_2}$$

$$1 = \frac{k_2 m}{ab}$$

$$ab = k_2 m$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N1

$$ab : 2^{14} \cdot 7^{10}$$

$$ab = k_1 2^{14} \cdot 7^{10}$$

$$bc : 2^{17} \cdot 7^{12}$$

$$bc = k_2 2^{17} \cdot 7^{12}$$

$$ac : 2^{20} \cdot 7^{37}$$

$$ac = k_3 2^{20} \cdot 7^{37}$$

$$\begin{aligned} ab^2 &= 2^{14+m_1} \cdot 7^{10+k_2} \\ bc &= 2^{17+n_1} \cdot 7^{12+k_2} \\ ac &= 2^{20+m_2} \cdot 7^{37} \end{aligned}$$

$$ab = 2^{14} \cdot 7^{10}$$

$$bc = 2^{17} \cdot 7^{12}$$

$$ac = 2^{20} \cdot 7^{37}$$

$$ab \cdot bc = 2^{31} \cdot 7^{27}$$

$$\frac{abc^2}{ac} = \frac{k_1 k_2 2^{31} \cdot 7^{27}}{k_3 2^{20} \cdot 7^{37}} = \frac{k_1 k_2}{k_3} 2^{11} \cdot 7^{-10}$$

$$abc^2 : 2^{51} \cdot 7^{64}$$

abc

$$b = \sqrt{\frac{k_1 k_2}{k_3} 2^{11} \cdot 7^{-10}}$$

$$a = \sqrt{\frac{k_1 k_3}{k_2} 2^{12} \cdot 7^{30}}$$

$$\begin{array}{c} +1 \\ -1 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{array} \quad \begin{array}{c} +1 \\ -1 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{array}$$

$$abc = \sqrt{\frac{k_1 k_2 k_1 k_3 k_2 k_3}{k_1 k_2 k_3}}$$

$$abc = \sqrt{k_1 k_2 k_3}$$

$$bc = \sqrt{\frac{k_2 k_3}{k_1} 2^{13} \cdot 7^{44}}$$

$$ab^2 c = 2^{31+k_1+n_1} \cdot 7^{27+k_2+n_2}$$

$$b^2 = 2^{11+k_1+n_1-m_1} \cdot 7^{-10+k_2+n_2-m_2}$$

$$k_1 + n_1 = 10$$

$$k_2 + n_2 = 10$$

$$k_1/n_1/m_1 = 1/1$$

$$ab^2 c^2 = 2^{51+(k_1+n_1+m_1)} \cdot 7^{64+k_2+n_2+m_2}$$

$$(abc = 2^{26} \cdot 7^{37})$$

abc

$$b^2 = 2^{12/10} \cdot 7^{11}$$

$$b = 2^6/2^5$$

$$\begin{cases} k_1 = 1 \\ k_2 = 10 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} b &= 2^6 \\ a &= 2^{20} \cdot 7^{20} \\ c &= 2^{17} \cdot 7^{17} \end{aligned}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

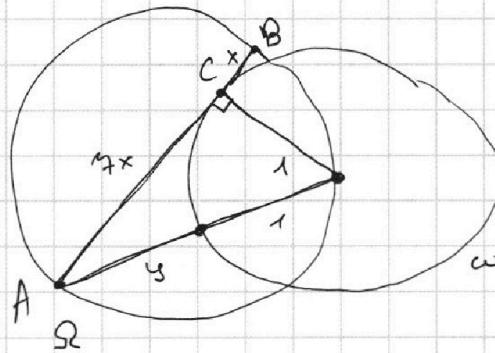


- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N 3



$$(\gamma_x)^2 + 1^2 = (y+1)^2$$

$$y \cdot (y+2) = (\gamma_x)^2$$

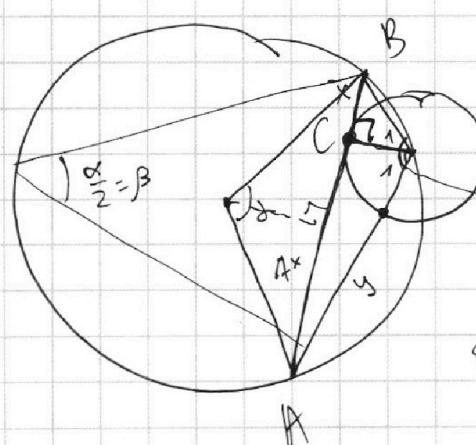
$$\gamma_x^2 + g_x^2 + 1 = y^2 + 2y + 1$$

$$y^2 + y = g_x^2$$

$$(\gamma_x)^2 + 1 = (y+1)^2$$

$$(\gamma_x)^2 = y \cdot (y+2)$$

$$y^2 + 2y = g_x^2$$



$$2R \cdot \sin \frac{\alpha}{2}$$

$$2R \cdot \sin \beta$$

$$2g_x \cdot \sin \beta$$

$$\sin \phi_1 = \frac{x}{\sqrt{x^2 + r^2}}$$

$$\sin \phi_2 = \frac{\gamma_x}{\sqrt{g_x^2 + r^2}}$$

$$\sin(180^\circ - \beta) = \sin \beta = \sin(\phi_1 + \phi_2) =$$

$$R \cdot \omega = 1$$

$$R \cdot 2 = 5$$

$$1(1+y) = (\gamma_x)^2$$

$$(1+y)^2 = 1^2 + (\gamma_x)^2$$

$$1+y = (\gamma_x)^2 = g_x^2$$

$$(1+y)^2 = 1 + g_x^2$$

$$(g_x^2)^2 = 1 + g_x^2$$

$$g_x^2 - x^2 = 1 + g_x^2$$

$$g_x^2 = t$$

$$t^2 = t + 1$$

$$t^2 - t - 1 = 0$$

$$D = 1 + 4 = 5$$

$$t_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$g_x^2 = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$g_x^2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$\sin \rho_1 \cos \phi_2 + \cos \rho_1 \sin \phi_2$$

//

$$\sin(180^\circ - \beta) = \sin \beta = \sin(\phi_1 + \phi_2) =$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned}\sin \beta &= \sin(\gamma_1 + \gamma_2) = \sin \gamma_1 \cos \gamma_2 + \cos \gamma_1 \sin \gamma_2 = \\&= \frac{x}{\sqrt{x^2+7}} \cdot \frac{1}{\sqrt{49x^2+7}} + \frac{1}{\sqrt{x^2+7}} \cdot \frac{7x}{\sqrt{49x^2+7}} = \\&= \frac{x + 7x}{\sqrt{x^2+7} \cdot \sqrt{49x^2+7}} = \boxed{\frac{8x}{\sqrt{(x^2+7)(49x^2+7)}}} = \\8x &= 2 \cdot 5 \cdot \sqrt{x^2+7}(49x^2+7)\end{aligned}$$

$$1 = 2 \cdot 5 \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+7}(49x^2+7)}$$

$$\sqrt{x^2+7}(49x^2+7) = 10$$

$$(x^2+7)(49x^2+1) = 100$$

$$x^2 = t$$

$$(t+1)(49t+1) = 100$$

$$49t^2 + t + 49t + 1 = 100$$

$$\underline{49t^2 + 50t - 99 = 0}$$

$$D = 2500 + 99 \cdot 9 \cdot 49 =$$

$$= (50^2) + (198-50)(198+50) =$$

$$= 50^2 + (198^2 - 50^2) = 198^2$$

$$t_{1,2} = \frac{-50 \pm 198}{98} = \frac{-50 + 198}{98} =$$

$$= \frac{98}{98} = 1$$

$$x^2 = 1 \Rightarrow x = 1$$

$$\frac{99 \cdot 9 \cdot 49}{(198-50) \cdot (198+50)} =$$

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

$$(59-50)(59+50)$$

$$(99-50)(99+50)$$

$$\frac{(98-50)}{(98+50)} = \frac{48}{148} = \frac{6}{19}$$

$$19x^2 + 100x = 99 \cdot 9 \cdot 49$$

$$x \cdot (100+x) = 99 \cdot 9 \cdot 49$$

$$\frac{99 \cdot 9 \cdot 49}{198 \cdot 98}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N5

$$160ab = 100b^2 - 1 + 63a^2$$

$$100b^2 = 160ab - 63a^2 + 1$$

$$\cancel{100b^2}$$

$$y = ax + 10b$$
$$x^2 + y^2 = s$$

$$x^2 + (ax + 10b)^2 = s$$

$$x^2 + a^2 x^2 + 20axb + 100b^2 = s$$

$$x^2(1+a^2) + x(20ab) + 100b^2 - s = 0$$

$$D = \cancel{20} 900a^2b^2 - 4(1+a^2)(100b^2 - s) = 0$$

$$100a^2b^2 = 100a^2b^2 - 4a^2 + 100b^2 - s$$

$$0 = 100b^2 - 4a^2 - s$$

$$0 = 160ab - 63a^2 + 1 - 4a^2 - s$$

$$0 = \cancel{160} ab - 67a^2 - 3$$

$$67a^2 = 16ab - 3$$

$$\cancel{a} y = ax + 10b$$

$$(x+8)^2 + y^2 - 1 \mid (x^2 + y^2 - s) = 0$$

$$(x+8)^2 + (ax + 10b)^2 - 1 \mid (x^2 + (ax + 10b)^2 - s) = 0$$

$$0 = 160ab - 67a^2 - 3$$

$$160ab = 67a^2 + 3$$

$$b = \frac{67a^2 + 3}{160a}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№5

$$b = \frac{67a^2 + 3}{160a} = \frac{67a}{160} + \frac{3}{160a}$$

$$160ab = 100b^2 - 1 + 63a^2$$

~~100~~

$$67a^2 + 3 = 100 \left(\frac{67a^2 + 3}{160a} \right)^2 - 1 + 63a^2$$

$$67a^2 + 3 = \cancel{100} \left(\frac{67a^2 + 3}{16a} \right)^2 - 1 + 63a^2$$

$$4a^2 + 9 = 8$$

№7

