



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ



## 9 КЛАСС. Вариант 10

1. [3 балла] При каком наименьшем натуральным  $n$  число  $(n - 1)! + n! + (n + 1)!$  делится на 289?
2. [3 балла] Из суммы квадратов семи последовательных натуральных чисел вычли число 28 и получили пятую степень натурального числа  $N$ , большего 8. Найдите наименьшее возможное значение  $N$ .
3. [4 балла] Решите неравенство

$$\left| \sqrt{x^2 - x - 2} + 5 \right| \geq \left| \sqrt{x^2 - x - 2} + x - 1 \right| + |6 - x|.$$

4. [5 баллов] На координатной плоскости рассматриваются ромбы с длиной стороны 5 такие, что абсциссы и ординаты всех четырёх вершин каждого ромба — целые числа из промежутка  $[1; 45]$ . Сколько существует таких ромбов? Напомним, что квадрат также является ромбом.
5. [5 баллов] Найдите все пары целых чисел  $(x; y)$ , удовлетворяющих уравнению
$$23 \cdot 2^x + 2025 = y^2.$$
6. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых для множества точек плоскости  $Oxy$ , задаваемых уравнением  $x^2 + y^2 = a^2$ , наибольшее значение выражения  $y^2 - 4y - a$  равно 6.
7. [6 баллов] На сторонах  $AB$  и  $BC$  треугольника  $ABC$  выбраны точки  $M$  и  $N$  соответственно так, что  $\angle MNB = \angle ANC = 70^\circ$ . Найдите  $\angle CAN$ , если известно, что  $BN \cdot MA = 2BM \cdot NC$ .



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$(n-1)! + n! + (n+1)! : 289 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (n-1)! \cdot (1 + n + n \cdot (n+1)) : 289$$

$$(n-1)! \cdot (1 + 2n + n^2) : 289$$

$$(n-1)! \cdot (n+1)^2 : 289$$

$\cdot 289 = 17^2 \Rightarrow$  В произведение  $(n-1)! \cdot (n+1)^2$  должны  
17 единиц входить хотя бы в 2-ой множит.

17 - простое число;  $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow$

1) При  $n \in [1; 15]$  (при  $n \leq 15$ ) ~~число 6~~  
число  $(n-1)!$  не будет иметь единицы 17 и  
 $(n+1)$  в таком случае не более 16  $\Rightarrow (n+1)^2$  не  
будет кратно 17  $\Rightarrow$

2)  $n \geq 16$ .

При  $n=16$ :  $(n-1)! \cdot (n+1)^2 = (15-1)! \cdot (16+1)^2 =$   
 $= 15! \cdot 17^2 : 17^2 (= 289) \Rightarrow$  Наименьшие натуральные  
n, при которых  $(n-1)! + n! + (n+1)!$  кратно 289 -  
это 16.

Ответ: 16.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                            |                                       |                            |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input checked="" type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Запишем наши 7 последовательных натуральных чисел, как  $(x-3); (x-2); (x-1); x; (x+1); (x+2); (x+3)$  где  $x \in \mathbb{N}$  и  $x \geq 4$ .

$$N > 8 \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow N^5 &= (x-3)^2 + (x-2)^2 + (x-1)^2 + x^2 + (x+1)^2 + (x+2)^2 + \\ &+ (x+3)^2 - 28 = x^2 - 6x + 9 + x^2 - 4x + 4 + x^2 - 2x + 1 + x^2 + \\ &+ x^2 + 2x + 1 + x^2 + 4x + 4 + x^2 + 6x + 9 - 28 = 7x^2 + 28 - 28 = \\ &= 7x^2, \text{ то есть } 7x^2 = N^5 \Rightarrow N \text{ должно} \end{aligned}$$

быть кратно 7, так как 7-простое  $\Rightarrow 7$  входит в разложение  $N^5$  минимум в пятой степени.  $N^5 > 8^5 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 7 \cdot x^2 > 8^5 \Rightarrow x > \sqrt{\frac{8^5}{7}} \Rightarrow x > 49.$$

Если представим  $N^5$  в виде  $7^5 \cdot k^5$ , где  $k$ -натуральное число, большее 1, то:

$$\begin{aligned} x^2 &= \frac{7^5 \cdot k^5}{7} = 7^4 \cdot k^5 \Rightarrow x = \sqrt{7^4 \cdot k^5} = \\ &= 7^2 \cdot \sqrt{k^5} = 49 \sqrt{k^5}, \text{ т.к. } x \text{- натуральное, то} \end{aligned}$$

$k^5$ -квадрат натурального числа (икакое  $n$ -не является квадратом натурального числа), то есть все ненулевые делимы  $49$ .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                                   | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

дат в чистое  $k^5$  в чёткой стелки. Если к чисто  
имеет простой делитель „ $a$ “ и „ $a$ “ будет входит в разложение  
числа  $k$  на простые множители в чёткой стелки,  
то и в чистое  $k^5$ , „ $a$ “ также будет входить  
в чёткой стелки  $\Rightarrow k^5$  в чисто делится на  
будет являться квадратом натурального числа  $\Rightarrow$   
 $\Rightarrow$  Все простые делители „входит“ в число  $k$   
в чёткой стелки, то есть  $k$  - квадрат натурального  
числа.

$N^5 = 7^5 \cdot k^5$ ;  $k > 1 \Rightarrow$  Чтобы найти наименьшее  
значение  $N$  надо, чтобы  $k$  был минимальным воз-  
можным квадратом натурального числа, дающим  
единицу  $\Rightarrow k = 1^2 = 4 \Rightarrow$

$$\Rightarrow N_{\min} = \sqrt[5]{7^5 \cdot 4^5} = 7 \cdot 4 = 28.$$

Ответ: 28.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                            |                            |                                       |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} & \left| \sqrt{x^2 - x - 2} + 5 \right| \geq \left| \sqrt{x^2 - x - 2} + x - 1 \right| + |6 - x| \\ & \cdot \sqrt{x^2 - x - 2} \geq 0 \Rightarrow \\ & \Rightarrow x^2 - x - 2 \geq 0 \\ & D = 1^2 + 2 \cdot 4 = 9 \Rightarrow \\ & \Rightarrow x_1 = \frac{1+3}{2} = 2 ; x_2 = \frac{1-3}{2} = -1. \text{ Всё же корень } \\ & \text{из } x^2 - x - 2 \text{ крашено вверх (коррекция при} \\ & \text{решении выше подсчитывалась) } \Rightarrow x^2 - x - 2 \geq 0 \text{ при} \\ & x \in (-\infty; -1] \cup [2; +\infty). \end{aligned}$$

1) Если  $x \in [2; +\infty)$ :

$$\begin{aligned} & a) \text{ Если } x \in [2; 6], \text{ то } (\sqrt{x^2 - x - 2} + 5) > 0; \\ & (\sqrt{x^2 - x - 2} + x - 1) > 0; |6 - x| \geq 0 \Rightarrow \\ & \Rightarrow \sqrt{x^2 - x - 2} + 5 \geq \sqrt{x^2 - x - 2} + x - 1 + 6 - x \\ & 5 \geq 5 - \text{подсчитано верно} \Rightarrow \\ & \text{коррекция} \\ & \Rightarrow \text{модое число на отрезке } x \in [2; 6] \text{ будем} \\ & \text{закрашивать коричневым (коррекцию будем} \\ & \text{вернуть).} \\ & b) \text{ Если } x > 6, \text{ то } (\sqrt{x^2 - x - 2} + 5) > 0; (\sqrt{x^2 - x - 2} + x \\ & - 1) > 0; |6 - x| < 0 \Rightarrow \end{aligned}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.








СТРАНИЦА  
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\Rightarrow \sqrt{x^2 - x - 2} + 5 \geq \sqrt{x^2 - x - 2} + x - 1 - (6 - x)$$

$$5 \geq x - 1 - 6 + x$$

$$2x \leq 12$$

$$x \leq 6 \quad (\text{ко 8 пункте } \textcircled{d} : x > 6) \Rightarrow$$

$\Rightarrow$  противоречие, то есть при  $x > 6$  неравенство не будет верным.

2) Если  $x \in (-\infty; -1]$ :

$$(\sqrt{x^2 - x - 2} + 5) > 0 ; (6 - x) > 0.$$

Тогда можем и  $\sqrt{x^2 - x - 2} + x - 1 \geq 0$ :

$$\sqrt{x^2 - x - 2} + x - 1 \geq 0$$

$$\sqrt{x^2 - x - 2} \geq 1 - x \quad (1 - x > 0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - x - 2 \geq 1 - 2x + x^2$$

$$x \geq 3 \quad (\text{ко } x \leq -1) \Rightarrow \text{противоречие}$$

тогда  $\sqrt{x^2 - x - 2} + x - 1 < 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2 - x - 2 + 5} \geq 1 - x - \sqrt{x^2 - x - 2} + 6 - x$$

$$2\sqrt{x^2 - x - 2} \geq -2x + 2$$

$$\sqrt{x^2 - x - 2} \geq 1 - x \quad (x \leq -1 \Rightarrow 1 - x > 0) \Rightarrow$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                                   | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\Rightarrow x^2 - x - 2 \geq 1 - 2x + x^2$$

$x \geq 3$  (но  $x \leq -1$ ) \(\Rightarrow\) промежутки

на участке  $x \in (-\infty; -1]$  неравенство не ду-  
гам верно \(\Rightarrow

$$\Rightarrow x \in [2; 6].$$

Ответ:  $x \in [2; 6].$



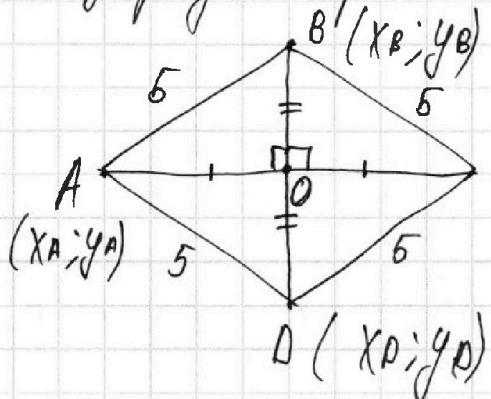
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА  
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Изобразим рёбра:



На рисунке дка-

заны координаты  
вершин ренда.

диагонали пересекаются  
в точке O, тогда:

$$AO = OC ; DO = OB ; \angle BOC = 90^\circ (\text{по с-ву ренда})$$

$\Rightarrow AOD = DOC = BOC = AOB \Rightarrow$  Докончим рассмотрение

1) треугольник:

Пусть  $x_B \geq x_A; y_B \geq y_A$ .

$$(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 = 5^2$$

$x_B, x_A, y_B, y_A$  - целые числа из  $[1; 45] \Rightarrow x_B, x_A, y_B, y_A$ -  
натуральные числа из промежутка  $[1; 45]$ .

Возможные решения в целых числах:

$$1) \begin{cases} x_B - x_A = 3 \\ y_B - y_A = 4 \end{cases} \Rightarrow OB = OD = 4; BD = 8; \\ AO + OC = 3 + 3 = 6; AO = OC = 3.$$

$$2) \begin{cases} x_B - x_A = 0 \\ y_B - y_A = 5 \end{cases} \Rightarrow AB \parallel OY (\text{оси ординат}), \text{ а} \\ AD \parallel OX (\text{оси долготы}).$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                                   | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$3) \begin{cases} x_B - x_A = 5 \\ y_B - y_A = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{диагональ параллель 2}.$$

$$4) \begin{cases} x_B - x_A = 4 \\ y_B - y_A = 3 \end{cases} \Rightarrow BO = OD = 3 \\ AO = OC = 4.$$

Построим возможное количество рандов в тёх вариантах:

1) Если ABCD - квадрат  $\Rightarrow$  каждая его сторона параллельна одной из осей.

Его левая нижняя вершина по x может принимать значения:  $[1; 40]$ ; по оси y -  $[1; 40]$

$\Rightarrow$  Всего таких рандов:  $N_1 = 40^2 = 1600$ .

2) Если диагональ рандса параллельная оси обеих равна 8, а диагональ параллельная оси другим равна 6, то самая левая вершина рандса по оси лежащей может иметь координаты  $[1; 37]$ , а по оси другим  $[4; 42]$ , тогда таких рандов:  $N_2 = (42-4+1) \cdot (37-1+1) = 39 \cdot 37 = 1443$ .

3) Если диагональ рандса параллельная оси одн-



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отмьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                                   | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
3 из 3

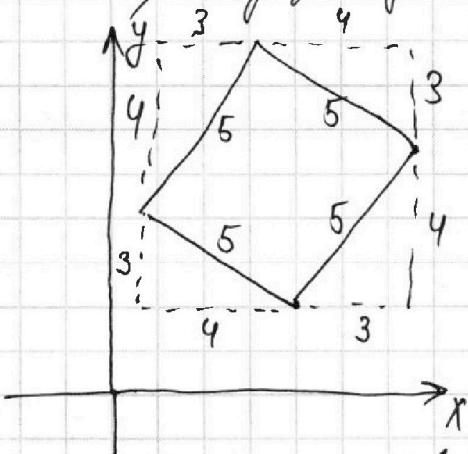
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

число равно 6, а диагональ параллельная оси ординат равно 8, то т.к. треугольник равенство таких радиусов будем также равно №<sub>2</sub>. Этот выражение радиуса является радиусом пункта (2), повернутого на  $90^\circ$

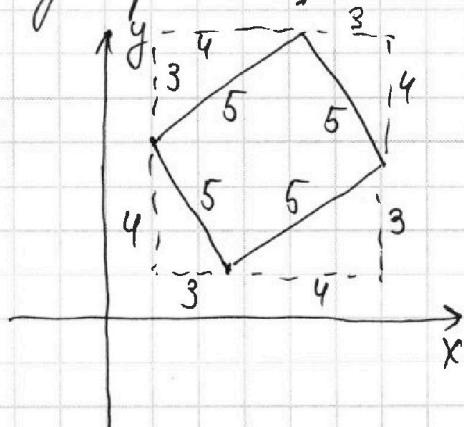
$\Rightarrow$  Всего существует:  $N_1 + N_2 \cdot 2 = 1600 + 1443 \cdot 2 = 4486$  первый радиус.

Ответ: 4486.

4 9 5) Существует еще 2 вида радиусов:



U



Прическое радиуса всего:  $N_3 / \text{количество видов} 443 =$   
 $= (42-4)^2 = 38^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow$  Всего радиусов:  $N_1 + N_2 \cdot 2 + N_3 \cdot 2 = 1600 + 1443 \cdot 2 + 38^2 \cdot 2 =$   
 $= 4486 + 1446 \cdot 2 = 7374$

Ответ: 7374.

I-



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА

1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$23 \cdot 2^x + 2025 = y^2$$

$$23 \cdot 2^x + 45^2 = y^2$$

$$23 \cdot 2^x = y^2 - 45^2$$

$$(y-45)(y+45) = 23 \cdot 2^x ; y\text{-целое} \Rightarrow (y-45)(y+45)\text{-целое}$$

$23 \nmid 2 \Rightarrow x$  не может принимать значений, меньших нуля. Нужно число 23 входит в одну из скобок в 1 степени, в другую в чётной.

Пусть число 2 входит в  $y-45$  в степенях, тогда в  $y+45$  в степенях  $x-2$ . Если  $y$ -нечётное, то  $(y-45)(y+45)$ -чётное, тогда  $x > 0$ .

Если  $y$ -чётное, то  $(y-45)(y+45)$ -нечётное, тогда  $x=0$ : Если  $x=0$ , то  $(y-45)(y+45)=23 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} y-45=1 \\ y+45=23 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y-45=-23 \\ y+45=-1 \end{cases}$$

- эти системы не имеют решений  $\Rightarrow y$ -нечётное,

$$x > 0.$$

Посмотрим 2 случай:

$$1) y-45 = 23 \cdot 2^x \Rightarrow y+45 = \boxed{23} \cdot 2^{x-2} \Rightarrow$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                                   | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$y + 45 - (y - 45) = 90 \Rightarrow 23 \cdot 2^{x-2} - 23 \cdot 2^2$$

$$2^{x-2} - 23 \cdot 2^2 = 90 \quad (x > 0, \text{ m.r. } 90 : 2).$$

$$\Rightarrow 2^{x-2-1} - 23 \cdot 2^{2-1} = 45 \Rightarrow x-1=0, \text{ m.r. } 45 / 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2^x - 23 = 45$$

$2^x = 68$  — кем решен, где  $x$  — ответ.

$$2) \quad y - 45 = \boxed{23} \cdot 2^x \Rightarrow y + 45 = 2^{x-2} \cdot 23 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 23 \cdot 2^{x-2} - 2^x = 90;$$

$$a) \quad 23 \cdot 2^{x-1} - 1 = 90$$

$$23 \cdot 2^{x-1} = 91$$

$$2^{x-1} = 4 \Rightarrow x-1=2 \Rightarrow x=3$$

$$\delta) \quad 2$$

$$a) \quad \boxed{23 \cdot 2} \quad x=1;$$

$$23 \cdot 2^{x-2} - 1 = 95$$

$$23 \cdot 2^{x-2} = 96$$

$$2^{x-2} = 2 \Rightarrow x-2=1 \Rightarrow x=3$$

$$\delta) \quad x-2=1 \Rightarrow x=3 \Rightarrow \boxed{x=3}:$$

$$23 \cdot 2^{x-1} - 2^x = 90 - \text{кем решен} \Rightarrow$$

I-

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                                   | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\Rightarrow$  Единственная подходящая пара  $(x, y) =$   
~~Единственное подходящее значение  $x = 3 \Rightarrow$~~

$$\Rightarrow y^2 = 45^2 + 8 \cdot 23$$

$$y^2 = 45^2 + 184$$

$$y^2 = 2209$$

$$y^2 = 47^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = 47 \text{ или } y = -47.$$

Ответ:  $(3; 47); (3; -47)$ .

I-

I-

I-



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                                   | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

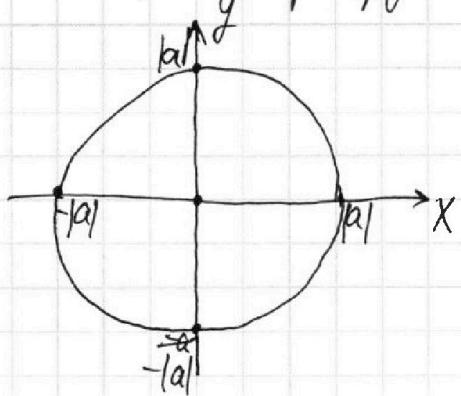
СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач шумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 + y^2 = a^2$$

$$y^2 - ay - a \leq 6$$

Построим фигуру, описанную уравнением  $x^2 + y^2 = a^2$ :



По есть  $y \in [-|a|; |a|]$ .

По есть наибольшее значение, которое может принять  $y$  равно  $|a|$ , а наименьшее:  $-|a|$ .

Наибольшее значение уравнения  $y^2 - ay - a$  выражение

будет достигаться при  $y = -|a|$ , тогда  $y^2$  и  $(-ay)$  будут максимальны возможны  $\Rightarrow$

$$\cancel{y^2 - ay - a \geq 6} \quad (y^2 - ay - a)_{\max} = 6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (-|a|)^2 - a \cdot (-|a|) - a = 6:$$

1) Если  $a \geq 0$ :

$$a^2 + 4 \cdot a - a = 6$$

$$a^2 + 3a - 6 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 9 + 24 = 33 \Rightarrow$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- 1    2    3    4    5    6    7

СТРАНИЦА  
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\Rightarrow \boxed{a_1 = \frac{-3 + \sqrt{33}}{2}}$$

$$a_2 = \frac{-3 - \sqrt{33}}{2} < 0 \text{ (но } a \geq 0\text{) - не подходит.}$$

2) Если  $a < 0$ :

$$(-|a|)^2 - 4 \cdot (-|a|) - a = 6$$

$$a^2 + 4 \cdot (-a) - a = 6$$

$$a^2 - 5a - 6 = 0$$

$$D = 25 + 24 = 49$$

$$a_1 = \frac{5+7}{2} = 6 \text{ - не подходит, так как } a < 0.$$

$$\boxed{a_2 = \frac{5-7}{2} = -1} \Rightarrow a = \frac{-3 + \sqrt{33}}{2} \text{ если } a = -1.$$

Ответ:  $-1; \frac{-3 + \sqrt{33}}{2}$ .

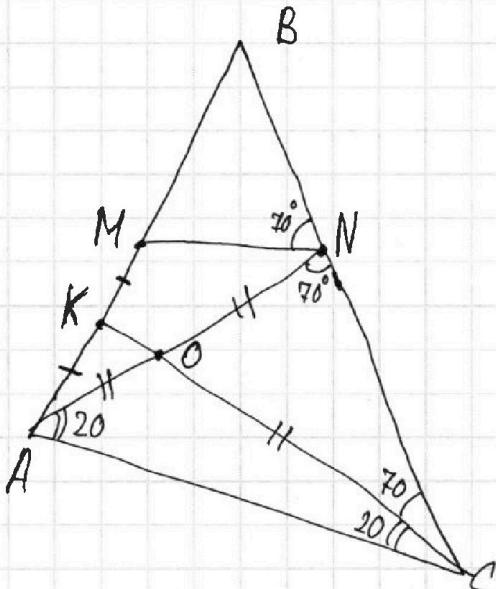
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Дано:  $\angle MNB = \angle ANC = 70^\circ$ ;  $BN \cdot MA = 2BM \cdot NC$ .

Найти:  $\angle CAN$ .

Данение:

Пусть  $K$  - середина  $AM$ , а прямая  $KC$  с  $AN$  не пересекается в точке  $O$ .

$$BN \cdot MA = 2BM \cdot NC \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{BN}{NC} = \frac{2BM}{MA} \Rightarrow \frac{BN}{NC} = \frac{BM}{\frac{1}{2}AM} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{BN}{NC} = \frac{BM}{KM} \quad (\text{н.к. } \frac{1}{2}AM = KM) \Rightarrow$$

$\Rightarrow MN \parallel KC$  (по обратной теореме Фалеса)  $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle BNM = \angle BCK = 70^\circ$  (как соответственные углы при  $MN \parallel KC$  и срезущей  $BC$ ).  $OK \parallel MN$  и  $AK = KM \Rightarrow$

$\Rightarrow OK$  - средняя линия  $\triangle AMN$  (по условию)  $\Rightarrow$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                                   |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\Rightarrow AO = ON$  (по с-у деджей энни).  $\angle ONC = \angle OCN = 70^\circ$

$\Rightarrow \triangle OCN$  - равнобедренный (по признаку равнобедр. треул.)  $\Rightarrow OC = ON$  (по определению)  $\Rightarrow OC = ON = AO$ .

$OC$  - медиана  $\triangle ACN$  и  $OC = ON = AO = \frac{1}{2}AN \Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle ACN$  - тупоугольный (по признаку тупоул. треул.).  
 $\angle ACN = 90^\circ$ , так как медиана, проведённая из этого угла равна половине гипотенузы  $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle NAC = 180^\circ - 90^\circ - 70^\circ = 20^\circ$  (по сумме углов треул.)

Отвeт:  $20^\circ$ .



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                            |                            |                            |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(n-1)! + n! + (n+1)! : 289$$

$$\begin{aligned} (n-1)! &\cdot (1+n+n \cdot (n+1)) = \\ &= (n-1)! \cdot (1+n+n^2+n) = \\ &= (n-1)! \cdot (n+1)^2 \end{aligned}$$

$$\text{при } n=16$$

$$\begin{array}{r} 289 \\ 14 \\ \hline 14 \\ 14 \\ \hline 1 \\ 1 \\ \hline \end{array} \left| \begin{array}{r} 14 \\ 14 \\ \hline 17 \\ 17 \\ \hline 19 \\ 17 \\ \hline 289 \end{array} \right.$$

$$X-1+6-X=5$$

$$X \in [2; 6]$$

$$(x-3) : x-2 ; x-1 ; x ; x+1 ; x+2 ; x+3$$

$$\begin{aligned} x^2 - 6x + 9 + x^2 - 4x + 4 + x^2 - 2x + 1 + x^2 + x^2 + 8x + 1 + x^2 + \\ + 4x + 4 + x^2 + 6x + 9 = 7x^2 + 28 \\ 7x^2 + 28 - 28 = 7x^2 \end{aligned}$$

$$x-1+x-6 \leq 5$$

$$2x \leq 12$$

$$7x^2 = n^5 \quad n^5 = 7 \cdot 49 \cdot 2^{10} = x \leq 6$$

$$x^2 = (x \cdot k)^5 \quad 7^4 \cdot k^5$$

$$= 7^5 \cdot 9^{10} \Rightarrow$$

$$x = 49 \cdot 2^5 \quad \Rightarrow n = 7 \cdot 2^2 = 7 \cdot 4 = 28$$

$$|\sqrt{x^2 - x - 2} + 5| \geq |\sqrt{x^2 - x - 2} + x - 1| + 16 - x$$

$$x^2 - x - 2 \geq 0$$

$$D = 1 + 8 = 9 \Rightarrow x_1 = \frac{1+3}{2} = 2 \quad x \in (-\infty; -1] \cup [2; +\infty)$$

$$x_2 = \frac{1-3}{2} = -1$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                            |                            |                            |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a \geq b + c$$

$$a^2 \geq b^2 + 2bc + c^2$$

$$\begin{array}{r} 2025 \\ 405 \\ 81 \\ 27 \\ 9 \\ 3 \\ 1 \end{array} \left| \begin{array}{l} 5 \\ 5 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{array} \right.$$

$$2025 = 45^2$$

$$X \leq -1: \quad \sqrt{x^2 - x - 2} + 5 \geq \sqrt{x^2 - x - 2} + x - 1 + 6 - x$$

$$5 \geq 5$$

$$\sqrt{x^2 - x - 2} \geq x - 1 \quad x - 1 \geq 0$$

$$x^2 - x - 2 \geq 1 - 2x + x^2$$

$$x \geq 3$$

$$X \leq -1: \quad \frac{BN}{NC} = \frac{2BM}{MA}$$

$$\sqrt{x^2 - x - 2} + 5 \geq 1 - x - \sqrt{x^2 - x - 2} + 6 - x$$

$$2 \sqrt{x^2 - x - 2} \geq 2 - 2x$$

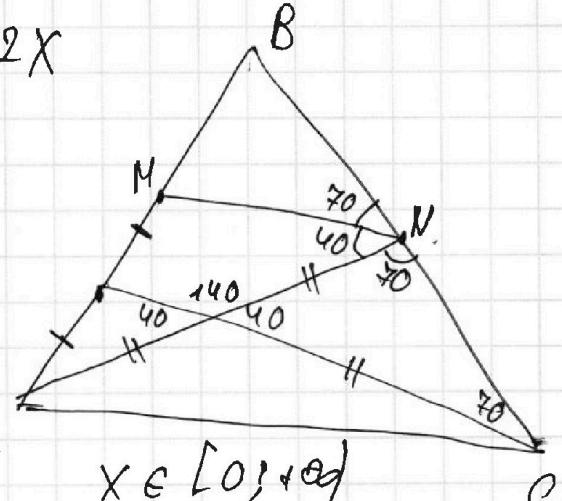
$$\sqrt{x^2 - x - 2} \geq 1 - x$$

$$23 \cdot 2^x + 2025 \cdot 45^2 = y^2$$

$$(y - 45)(y + 45) = 23 \cdot 2^x$$

$$y - 45 = 23 \cdot 2^{\frac{x}{2}}$$

$$y + 45 = 2 \cdot 2^{\frac{x-2}{2}}$$



$$x \in [0; +\infty)$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                            |                            |                            |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

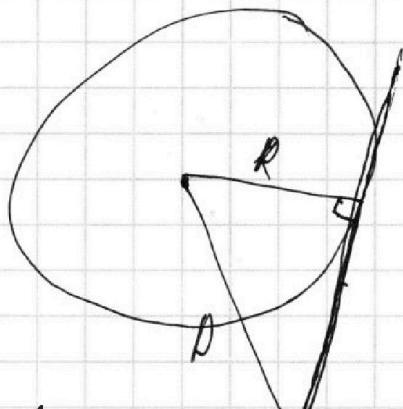
$$(y-45)(y+45) = 23 \cdot 2^x$$

$$y + 45 - (y - 45) = 90$$

$$\textcircled{1} \quad 23 \cdot 2^z - 2^{x-z} = 90$$

$$23 \cdot 2^{z-1} - 2^{x-z-1} = 45$$

$$23 \cdot 2^1 - 2^0 = 45 \Rightarrow z-1=1$$



$$x-z-1=0$$

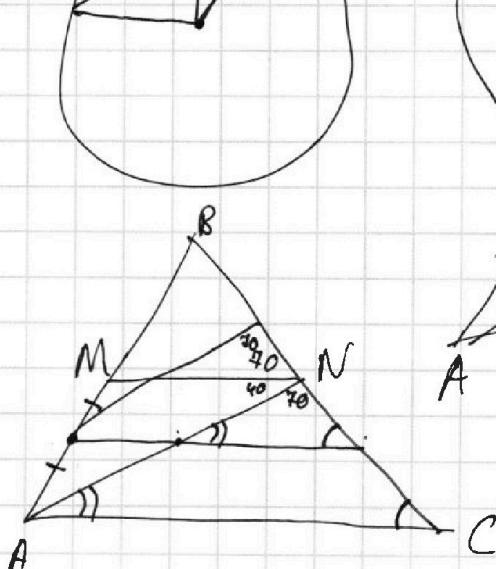
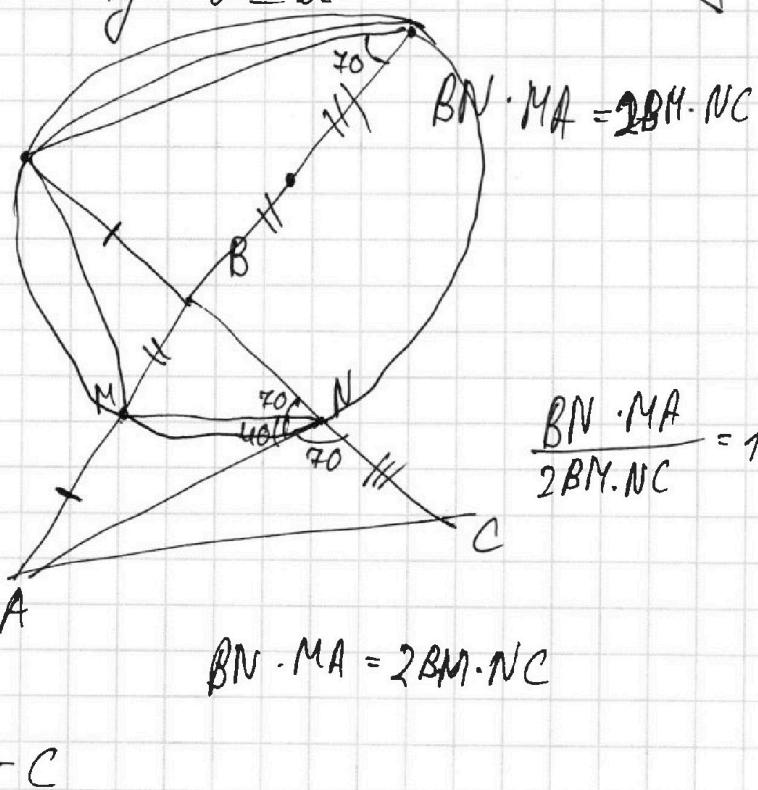
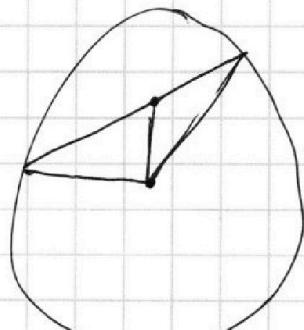
$$x = 1$$



$$\begin{array}{r} 46 \\ \times 38 \\ \hline 304 \\ 144 \\ \hline 1728 \end{array}$$

$$y^2 - 4y - a \leq 6$$

$$y^2 - 4y - 6 \leq a$$



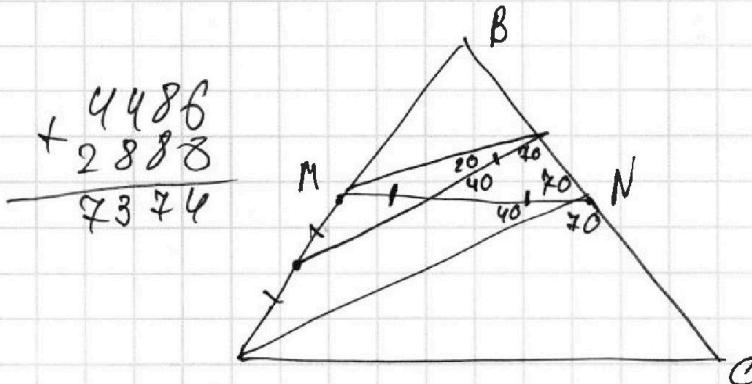


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
ИЗ

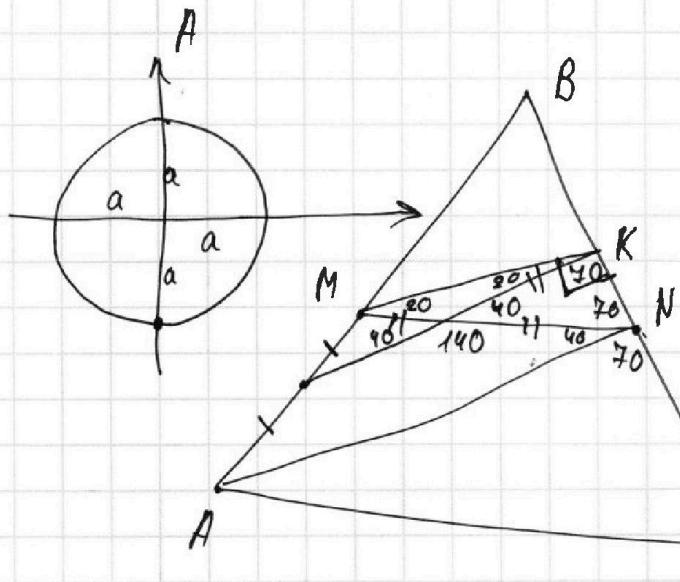
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{array}{r} \cancel{39} \\ \times 7 \\ \hline 273 \\ 14 \\ \hline 1443 \\ -1443 \\ \hline 2886 \end{array}$$

$$(-a)^2 - 4 \cdot (-a) - a = 6$$

$$a^2 + 4a - a - 6 = 0$$



$$BN \cdot MA = 2BM \cdot NC \quad a^2 + 3a - 6 = 0$$

$$\frac{BN \cdot MA}{2BM \cdot NC} = 1 \quad D = 9 + 24 =$$

$$\frac{BK}{KN} \dots$$

$$\begin{array}{r} \cancel{2886} \\ + 1600 \\ \hline 4486 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \cancel{47} \\ \times \cancel{47} \\ \hline 329 \\ 188 \\ \hline 2209 \end{array}$$

$$4:42 \quad \dots$$

$$1,37$$

$$y^2 - 4y - a \leq 6$$

$$\begin{array}{r} \cancel{23} \\ \times 8 \\ \hline 184 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \cancel{2025} \\ + 184 \\ \hline 2209 \end{array}$$

$$y^2 - 4y - a \leq 6 \text{ или}$$

$$y^2 - 4y - a - 6 \leq 0 \text{ или}$$

$$y^2 - 4y \leq 6 + a$$

$$y^2 - 4y + 4 - 10 - a \leq 0$$

$$(y - 2)^2 \leq 10 + a$$