



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 10



1. [3 балла] При каком наименьшем натуральном n число $(n-1)! + n! + (n+1)!$ делится на 289?
2. [3 балла] Из суммы квадратов семи последовательных натуральных чисел вычли число 28 и получили пятую степень натурального числа N , большего 8. Найдите наименьшее возможное значение N .
3. [4 балла] Решите неравенство

$$\left| \sqrt{x^2 - x - 2} + 5 \right| \geq \left| \sqrt{x^2 - x - 2} + x - 1 \right| + |6 - x|.$$

4. [5 баллов] На координатной плоскости рассматриваются ромбы с длиной стороны 5 такие, что абсциссы и ординаты всех четырёх вершин каждого ромба — целые числа из промежутка $[1; 45]$. Сколько существует таких ромбов? Напомним, что квадрат также является ромбом.
5. [5 баллов] Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющих уравнению

$$23 \cdot 2^x + 2025 = y^2.$$

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при каждом из которых для множества точек плоскости Oxy , задаваемых уравнением $x^2 + y^2 = a^2$, наибольшее значение выражения $y^2 - 4y - a$ равно 6.
7. [6 баллов] На сторонах AB и BC треугольника ABC выбраны точки M и N соответственно так, что $\angle MNB = \angle ANC = 70^\circ$. Найдите $\angle CAN$, если известно, что $BN \cdot MA = 2BM \cdot NC$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☒ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(n-1)! + n! + (n+1)! : 289 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (n-1)! \cdot (1 + n + n \cdot (n+1)) : 289$$

$$(n-1)! \cdot (1 + 2n + n^2) : 289$$

$$(n-1)! \cdot (n+1)^2 : 289$$

$\cdot 289 = 17^2 \Rightarrow$ В произведение $(n-1)! \cdot (n+1)^2$ делитель 17 должен входить хотя бы в 2-ой степени.

17 - простое число; $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow$

1) Если $n \in [1; 15]$ (при $n \leq 15$) число $(n-1)!$ ~~число~~ не будет иметь делителя 17 и $(n+1)$ в таком случае не более 16 $\Rightarrow (n+1)^2$ не будет кратно 17 $\Rightarrow$

2) $n \geq 16$.

$$\text{Если } n=16: (n-1)! \cdot (n+1)^2 = (15-1)! \cdot (16+1)^2 =$$

$$= 15! \cdot 17^2 : 17^2 (=289) \Rightarrow \text{Наименьшее натуральное}$$

n , при котором $(n-1)! + n! + (n+1)!$ кратно 289 - это 16.

Ответ: 16.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Запишем наши 7 последовательных натуральных чисел, как $(x-3); (x-2); (x-1); x; (x+1); (x+2); (x+3)$ где $x \in \mathbb{N}$ и $x \geq 4$.

$$N > 8 \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow N^5 &= (x-3)^2 + (x-2)^2 + (x-1)^2 + x^2 + (x+1)^2 + (x+2)^2 + \\ &+ (x+3)^2 - 28 = x^2 - 6x + 9 + x^2 - 4x + 4 + x^2 - 2x + 1 + x^2 + \\ &+ x^2 + 2x + 1 + x^2 + 4x + 4 + x^2 + 6x + 9 - 28 = 7x^2 + 28 - 28 = \\ &= 7x^2, \text{ то есть } 7x^2 = N^5 \Rightarrow N \text{ точно должно} \end{aligned}$$

быть кратно 7, так как 7 - простое $\Rightarrow 7$ входит в число N^5 минимум в пятой степени. $N^5 > 8^5 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 7 \cdot x^2 > 8^5 \Rightarrow x > \sqrt{\frac{8^5}{7}} \Rightarrow x > 49; \text{ Если}$$

мы представим N^5 в виде $7^5 \cdot k^5$, где k - натуральное число, большее 1, то:

$$x^2 = \frac{7^5 \cdot k^5}{7} = 7^4 \cdot k^5 \Rightarrow x = \sqrt{7^4 \cdot k^5} =$$

$$= 7^2 \cdot \sqrt{k^5} = 49\sqrt{k^5}, \text{ т.к. } x - \text{натуральное, то}$$

k^5 - квадрат натурального числа (иначе $\sqrt{k^5}$ - иррациональная часть), то есть все простое делим на 49.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

дят в число k^5 в четной степени. Если k кратно имеет простой делитель a и a входит в разложение числа k на простые множители в четной степени, то и в число k^5 a также будет входить в четной степени $\Rightarrow k^5$ в таком случае не будет являться квадратом натурального числа $\Rightarrow$ все простые делители "входят" в число k в четной степени, но если k - квадрат натурального числа.

$N^5 = 7^5 \cdot k^5$; $k > 1 \Rightarrow$ чтобы найти наименьшее значение N надо, чтобы k был минимальным возмозможным квадратом натурального числа, большего единицы $\Rightarrow k = 2^2 = 4 \Rightarrow$

$$\Rightarrow N_{\min} = \sqrt[5]{7^5 \cdot 4^5} = 7 \cdot 4 = 28.$$

Ответ: 28.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$|\sqrt{x^2-x-2}+5| \geq |\sqrt{x^2-x-2}+x-1| + |6-x|$$

$$\cdot \sqrt{x^2-x-2} \geq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2-x-2 \geq 0$$

$$D = 1^2 + 2 \cdot 4 = 9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{1+3}{2} = 2; x_2 = \frac{1-3}{2} = -1. \text{ Ветви парабо-}$$

лы x^2-x-2 направлены вверх (коэффициент при старшей степени положительный) $\Rightarrow x^2-x-2 \geq 0$ при $x \in (-\infty; -1]; [2; +\infty)$.

1) Если $x \in [2; +\infty)$:

$$a) \text{ Если } x \in [2; 6], \text{ то } (\sqrt{x^2-x-2}+5) > 0;$$

$$(\sqrt{x^2-x-2}+x-1) > 0; |6-x| \geq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2-x-2}+5 \geq \sqrt{x^2-x-2}+x-1+6-x$$

$$5 \geq 5 - \text{тождество верно} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ любое число на отрезке $x \in [2; 6]$ будет являться корнем неравенства (неравенство будет верным).

$$b) \text{ Если } x > 6, \text{ то } (\sqrt{x^2-x-2}+5) > 0; (\sqrt{x^2-x-2}+x-1) > 0; |6-x| < 0 \Rightarrow$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☒

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\Rightarrow \sqrt{x^2-x-2} + 5 \geq \sqrt{x^2-x-2} + x - 1 - (6-x)$$
$$5 \geq x - 1 - 6 + x$$

$$2x \leq 12$$

$$x \leq 6 \text{ (но в пункте б) : } x > 6) \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ противоречие, но есть три $x > 6$ неравенства
и будет верно.

2) Если $x \in (-\infty; -1]$:

$$(\sqrt{x^2-x-2} + 5) > 0 ; (6-x) > 0.$$

Проверим может ли $\sqrt{x^2-x-2} + x - 1 \geq 0$:

$$\sqrt{x^2-x-2} + x - 1 \geq 0$$

$$\sqrt{x^2-x-2} \geq 1-x \quad (1-x > 0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2-x-2 \geq 1-2x+x^2$$

$$x \geq 3 \text{ (но } x \in x \leq -1) \Rightarrow \text{противоречие,}$$

тогда $\sqrt{x^2-x-2} + x - 1 < 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2-x-2} + 5 \geq 1-x - \sqrt{x^2-x-2} + 6-x$$

$$2\sqrt{x^2-x-2} \geq -2x+2$$

$$\sqrt{x^2-x-2} \geq 1-x \quad (x \leq -1 \Rightarrow 1-x > 0) \Rightarrow$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\Rightarrow x^2 - x - 2 \geq 1 - 2x + x^2$$

$x \geq 3$ (но $x \leq -1$) $\Rightarrow$ противоречие
на участке $x \in (-\infty; -1]$ неравенство не удовлетворяется $\Rightarrow$

$$\Rightarrow x \in [2; 6].$$

Ответ: $x \in [2; 6]$.

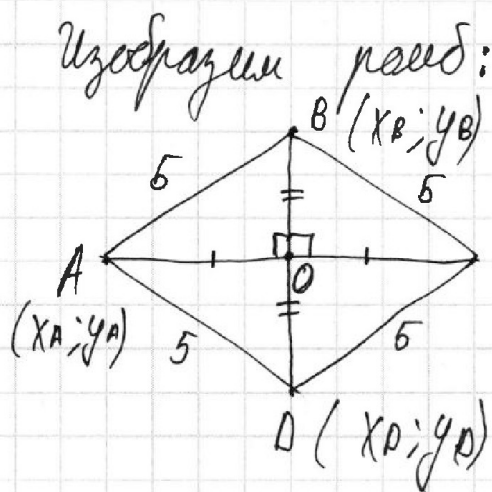


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



На рисунке указаны координаты вершин ромба.

Диагонали пересекаются в точке O, тогда:

$AO = OC$; $DO = OB$; $\angle BOC = 90^\circ$ (по с-ву ромба);
 $\triangle AOD = \triangle DOC = \triangle BOC = \triangle AOB \Rightarrow$ достаточно рассмотреть

1 треугольник:

Пусть $x_B \geq x_A$; $y_B \geq y_A$.

$$(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 = 5^2$$

x_B, x_A, y_B, y_A - целые числа из $[1; 45] \Rightarrow x_B, x_A, y_B, y_A$ - натуральные числа из промежутка $[1; 45]$.

Возможные решения в целых числах:

$$1) \begin{cases} x_B - x_A = 3 \\ y_B - y_A = 4 \end{cases} \Rightarrow OB = OD = 4; BD = 8; \\ AO + OC = 3 + 3 = 6; AO = OC = 3.$$

$$2) \begin{cases} x_B - x_A = 0 \\ y_B - y_A = 5 \end{cases} \Rightarrow AB \parallel OY \text{ (оси ординат), а} \\ AD \parallel OX \text{ (оси абсцисс).}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$3) \begin{cases} x_B - x_A = 5 \\ y_B - y_A = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{значению пункту 2}.$$

$$4) \begin{cases} x_B - x_A = 4 \\ y_B - y_A = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} BO = OD = 3 \\ AO = OC = 4. \end{aligned}$$

Посчитаем возможное количество рамок в трёх вариантах:

1) Если ABCD - квадрат $\Rightarrow$ каждая его сторона параллельна одной из осей.

Его левая нижняя вершина по x может принимать значения: $[1; 40]$; по оси y - $[1; 40]$

$\Rightarrow$ всего таких рамок: $N_1 = 40^2 = 1600$.

2) Если диагональ рамки параллельная оси абсцисс равна 8, а диагональ параллельная оси ординат равна 6, то самая левая вершина рамки по оси абсцисс может иметь координаты $[1; 37]$, а по оси ординат $[4; 42]$, тогда таких рамок: $N_2 = (42 - 4 + 1) \cdot (37 - 1 + 1) = 39 \cdot 37 = 1443$

3) Если диагональ рамки параллельная оси абс-



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
3 из 3

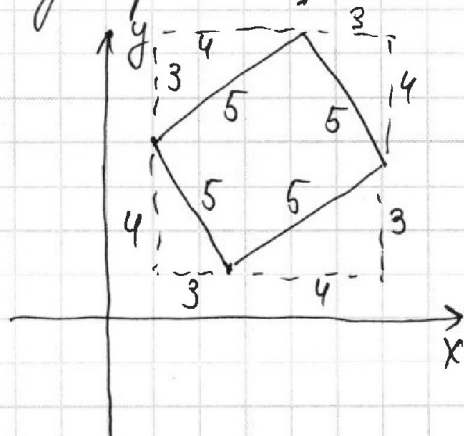
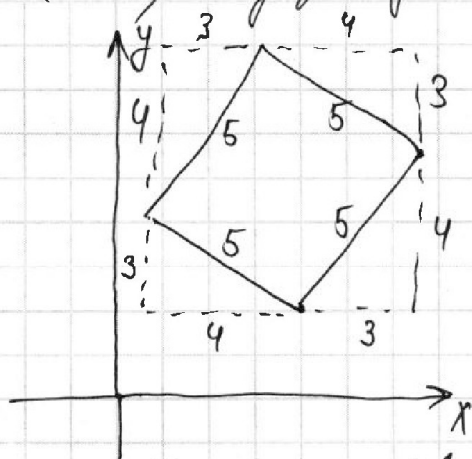
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

еще равна 6, а диагональ параллельная оси
ординат равна 8, то такой ~~треугольник~~ ~~рав~~
количество таких ромбов будет также
равно N_2 . Этот вариант ромба является ромбом
пункта 2), повернутого на 90°

~~$\Rightarrow$ всего существует: $N_1 + N_2 \cdot 2 = 1600 + 1443 \cdot 2 =$
 $= 4486$ всего ромбов.~~

~~Ответ: 4486.~~

4 4 5) Существует еще 2 вида ромбов:



Таких ромбов всего: N_3 (каждого из видов 4 4 5) =
 $= (42-4)^2 = 38^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ всего ромбов: $N_1 + N_2 \cdot 2 + N_3 \cdot 2 = 1600 + 1443 \cdot 2 + 38^2 \cdot 2 =$
 $= 4486 + 1444 \cdot 2 = 7374$

Ответ: 7374.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☒

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$23 \cdot 2^x + 2025 = y^2$$

$$23 \cdot 2^x + 45^2 = y^2$$

$$23 \cdot 2^x = y^2 - 45^2$$

$$(y-45)(y+45) = 23 \cdot 2^x; y - \text{целое} \Rightarrow (y-45)/(y+45) - \text{целое};$$

$23 \nmid 2 \Rightarrow x$ не может принимать значения, меньшие нуля. Пусть число 23 входит в одну из скобок в 1 степень, в другую в нулевой.

Пусть число 2 входит в $y-45$ в степени x , тогда в $y+45$ в степени $x-2$. Если y - нечётное, то $(y-45)(y+45)$ - чётное, тогда $x > 0$.

Если y - чётное, то $(y-45)(y+45)$ - нечётное, тогда $x = 0$. Если $x = 0$, то $(y-45)(y+45) = 23 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} y-45=1 \\ y+45=23 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y-45=-23 \\ y+45=-1 \end{cases}$$

- эти системы не имеют решений $\Rightarrow y$ - нечётное, $x > 0$.

Рассмотрим 2 случая:

$$1) y-45 = 23 \cdot 2^x \Rightarrow y+45 = \boxed{23} \cdot 2^{x-2} \Rightarrow$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$y + 45 - (y - 45) = 90 = 23 \cdot 2^{x-2} - 23 \cdot 2^2$$

$$2^{x-2} - 23 \cdot 2^2 = 90 \quad (x > 0, \text{ м.к. } 90 : 2)$$

$$\Rightarrow 2^{x-2-1} - 23 \cdot 2^{2-1} = 45 \Rightarrow x-2-1=0, \text{ м.к. } 45 \neq 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2^x - 23 = 45$$

$$2^x = 68 - \text{нет корней, где } x - \text{целое.}$$

$$2) \quad y - 45 = 23 \cdot 2^2 \Rightarrow y + 45 = 2^{x-2} \cdot 23 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 23 \cdot 2^{x-2} - 2^2 = 90;$$

$$a) \quad 23 \cdot 2^{x-1} - 1 = 90$$

$$23 \cdot 2^{x-1} = 91$$

$$2^{x-1} = 4 \Rightarrow x-1=2 \Rightarrow x=3$$

$$b) \quad 2$$

$$a) \quad 23 \cdot 2^{x-2} - 1 = 45$$

$$23 \cdot 2^{x-2} = 46$$

$$23 \cdot 2^{x-2} = 46$$

$$2^{x-2} = 2 \Rightarrow x-2=1 \Rightarrow x=3$$

$$d) \quad x-2=1 \Rightarrow x=3$$

$$23 \cdot 2^{x-2} - 2^{x-1} = 90 - \text{нет корней} \Rightarrow$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☒

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~$\Rightarrow$ Единственная подходящая пара $(x; y) = (-$~~
Единственное подходящее значение $x = 3 \Rightarrow$

$$\Rightarrow y^2 = 45^2 + 8 \cdot 23$$

$$y^2 = 45^2 + 184$$

$$y^2 = 2209$$

$$y^2 = 47^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = 47 \text{ или } y = -47.$$

Ответ: $(3; 47); (3; -47).$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

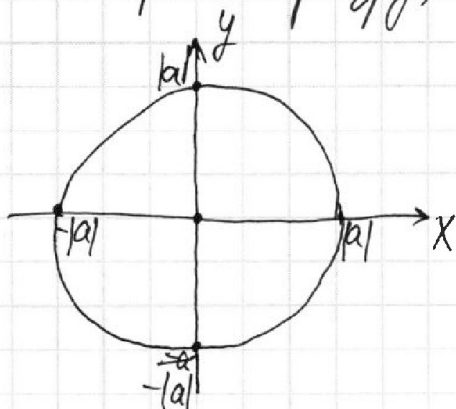
СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 + y^2 = a^2$$

$$y^2 - 4y - a \leq 6$$

Построим фигуру, описываемую уравнением $x^2 + y^2 = a^2$:



То есть $y \in [-|a|; |a|]$.

Это есть наибольшее значение, которое может принимать y равно $|a|$, а наименьшее: $-|a|$.

Наибольшее значение уравнения $y^2 - 4y - a$ выражение $y^2 - 4y - a$

будет достигаться при $y = -|a|$, тогда y^2 и $(-4y)$ - будут максимально возрастать $\Rightarrow$

$$y^2 - 4y - a \leq 6 \quad (y^2 - 4y - a)_{\max} = 6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (-|a|)^2 - a \cdot (-|a|) - a = 6:$$

1) Если $a \geq 0$:

$$a^2 + 4 \cdot a - a = 6$$

$$a^2 + 3a - 6 = 0$$

$$D = 9 - 4 \cdot a \cdot c = 9 + 24 = 33 \Rightarrow$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\Rightarrow \boxed{a_1 = \frac{-3 + \sqrt{33}}{2}}$$

$$a_2 = \frac{-3 - \sqrt{33}}{2} < 0 \text{ (по } a \geq 0) \text{ - не подходит.}$$

2) Если $a < 0$:

$$(-|a|)^2 - 4 \cdot (-|a|) - a = 6$$

$$a^2 + 4 \cdot (-a) - a = 6$$

$$a^2 - 5a - 6 = 0$$

$$D = 25 + 24 = 49$$

$$a_1 = \frac{5+7}{2} = 6 \text{ - не подходит, так как } a < 0.$$

$$\boxed{a_2 = \frac{5-7}{2} = -1} \Rightarrow a = \frac{-3 + \sqrt{33}}{2} \text{ или } a = -1.$$

$$\text{Ответ: } -1; \frac{-3 + \sqrt{33}}{2}.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

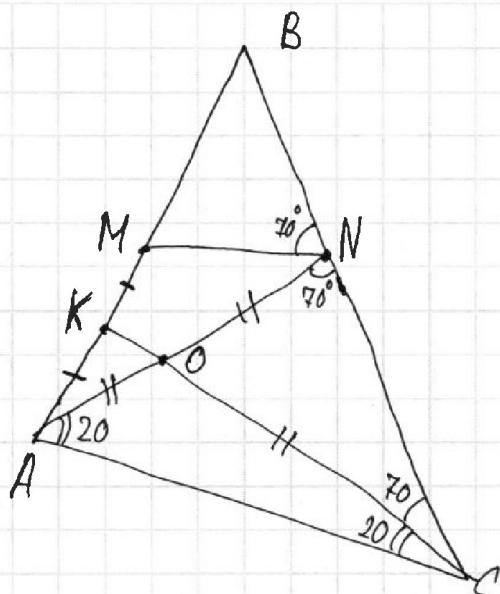
5
☐

6
☐

7
☒

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Дано: $\angle MNB = \angle ANC = 70^\circ$; $BN \cdot MA = 2BM \cdot NC$

Найти: $\angle CAN$.

Решение:

Пусть K — середина AM , а прямые KC и AN пересекаются в точке O .

$$BN \cdot MA = 2BM \cdot NC \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{BN}{NC} = \frac{2BM}{MA} \Rightarrow \frac{BN}{NC} = \frac{BM}{\frac{1}{2}AM} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{BN}{NC} = \frac{BM}{KM} \quad (\text{т.к. } \frac{1}{2}AM = KM) \Rightarrow$$

$\Rightarrow MN \parallel KC$ (по обратной теореме Талеса) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle BNM = \angle BCK = 70^\circ$ (как соответственные углы

при $MN \parallel KC$ и секущей BC). $OK \parallel MN$ и $AK = KM \Rightarrow$

$\Rightarrow OK$ — средняя линия $\triangle AMN$ (по признаку) $\Rightarrow$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

☐☐☐☐☐☐☒

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\Rightarrow AO = ON$ (по с-ву средней линии). $\angle ONC = \angle OCN = 70^\circ$

$\Rightarrow \triangle OCN$ - равнобедренный (по признаку равнобедр.

треуг.) $\Rightarrow OC = ON$ (по определению) $\Rightarrow OC = ON = AO$.

OC - медиана $\triangle ACN$ и $OC = ON = AO = \frac{1}{2}AN \Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle ACN$ - прямоугольный (по признаку прямоуг. треуг.):

$\angle ACN = 90^\circ$, так как медиана, проведенная из этого угла равна половине гипотенузы $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle NAC = 180^\circ - 90^\circ - 70^\circ = 20^\circ$ (по сумме углов треуг.)

Ответ: 20° .



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи** отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(n-1)! + n! + (n+1)! : 289$$

$$\begin{aligned} (n-1)! \cdot (1+n+n \cdot (n+1)) &= \\ &= (n-1)! \cdot (1+n+n^2+n) = \\ &= (n-1)! \cdot (n+1)^2 \end{aligned}$$

$$\text{при } n=16$$

$$\begin{array}{r} 289 \overline{) 17} \\ 17 \\ \hline 1 \\ 17 \\ \hline 119 \\ 17 \\ \hline 289 \end{array}$$

$$X-1+6-X=5$$

$$X \in [2; 6]$$

$$(X-3); X-2; X-1; X; X+1; X+2; X+3$$

$$\begin{aligned} X^2 - 6X + 9 + X^2 - 4X + 4 + X^2 - 2X + 1 + X^2 + X^2 + 2X + 1 + X^2 + \\ + 4X + 4 + X^2 + 6X + 9 = 7X^2 + 28 \end{aligned}$$

$$7X^2 + 28 - 28 = 7X^2$$

$$7X^2 = n^5$$

$$X^2 = (7 \cdot k)^5 \cdot 7^4 \cdot k^5$$

$$X = 49 \cdot 2^5$$

$$X-1+X-6 \leq 5$$

$$n^5 = 7 \cdot 49 \cdot 2^{10} = 7 \cdot 49 \cdot 2^{10} = 7 \cdot 49 \cdot 1024 = 343968$$

$$= 7^5 \cdot 2^{10} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n = 7 \cdot 2^2 = 7 \cdot 4 = 28$$

$$\left| \sqrt{x^2 - x - 2} + 5 \right| \geq \left| \sqrt{x^2 - x - 2} + x - 1 \right| + \left| 6 - x \right|$$

$$x^2 - x - 2 \geq 0$$

$$D = 1 + 8 = 9 \Rightarrow x_1 = \frac{1+3}{2} = 2$$

$$x_2 = \frac{1-3}{2} = -1$$

$$x \in (-\infty; -1] \cup [2; +\infty)$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 _ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a \geq b + c$$

$$a^2 \geq b^2 + 2bc + c^2$$

$$X \leq -1$$

$$\sqrt{x^2 - x - 2} + 5 \geq \sqrt{x^2 - x - 2}$$

$$\begin{array}{r} 2025 \overline{) 5} \\ 405 \overline{) 5} \\ 81 \overline{) 3} \\ 37 \overline{) 3} \\ 9 \overline{) 3} \\ 3 \overline{) 3} \\ 1 \overline{) 3} \end{array}$$

$$2025 = 45^2$$

$$+ x - 1 + 6 - x$$

$$5 \geq 5$$

$$\sqrt{x^2 - x - 2} \geq x - 1 + x - 1 \geq 0$$

$$\sqrt{x^2 - x - 2} \geq 1 - x$$

$$x^2 - x - 2 \geq 1 - 2x + x^2$$

$$x \geq 3$$

$$x \leq -1: \frac{BN}{NC} = \frac{2BM}{MA}$$

$$\sqrt{x^2 - x - 2} + 5 \geq 1 - x - \sqrt{x^2 - x - 2} + 6 - x$$

$$2\sqrt{x^2 - x - 2} \geq 2 - 2x$$

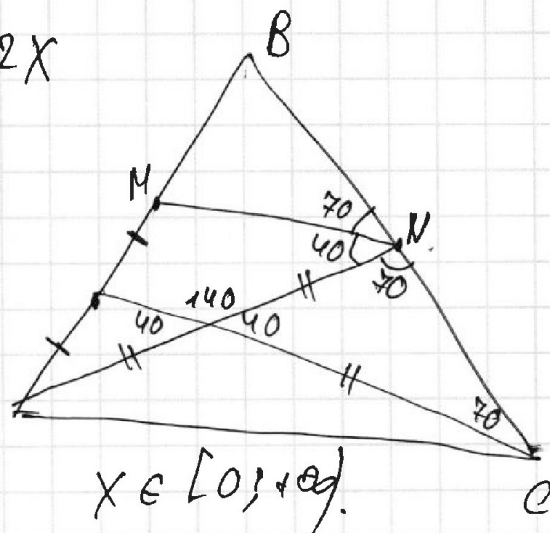
$$\sqrt{x^2 - x - 2} \geq 1 - x$$

$$23 \cdot 2^x + 2025 \cdot 45^2 = y^2$$

$$(y - 45)(y + 45) = 23 \cdot 2^x$$

$$y - 45 = 23 \cdot 2^x$$

$$y + 45 = 2 \cdot 2^{x-2}$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

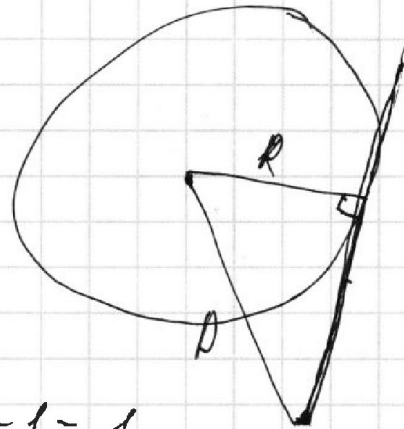
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(y-45)/(y+45) = 23 \cdot 2^x$$
$$y+45 - (y-45) = 90$$

$$\textcircled{1} \quad 23 \cdot 2^z - 2^{x-z} = 90$$
$$23 \cdot 2^{z-1} - 2^{x-z-1} = 45$$
$$23 \cdot 2^1 - 2^0 = 45 \Rightarrow z-1=1$$

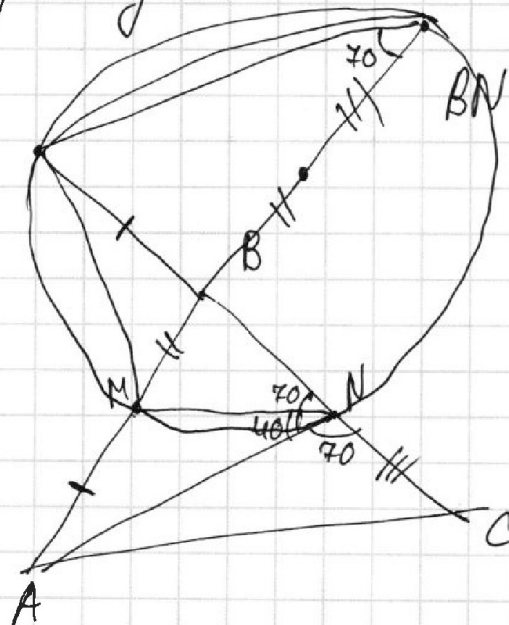
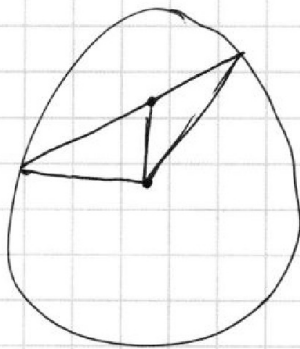
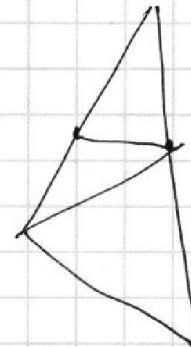


$$\begin{array}{r} 38 \\ \times 38 \\ \hline 304 \\ 114 \\ \hline 1444 \end{array}$$

$$x-z-1=0$$

$$x=1$$

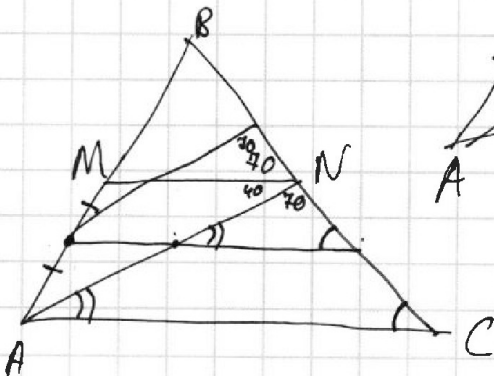
$$y^2 - 4y - a \leq b$$
$$y^2 - 4y - b \leq a$$



$$BN \cdot MA = 2BM \cdot NC$$

$$\frac{BN \cdot MA}{2BM \cdot NC} = 1$$

$$BN \cdot MA = 2BM \cdot NC$$





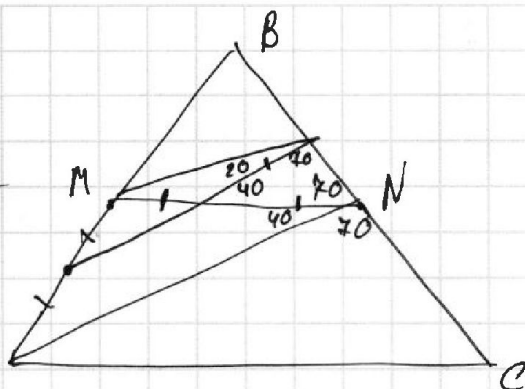
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

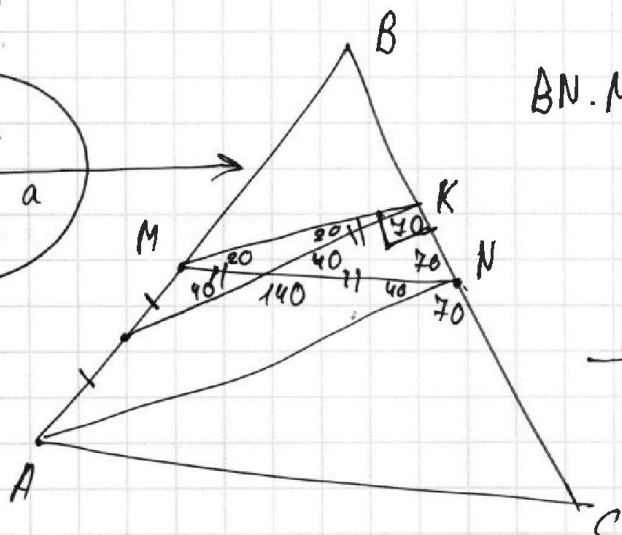
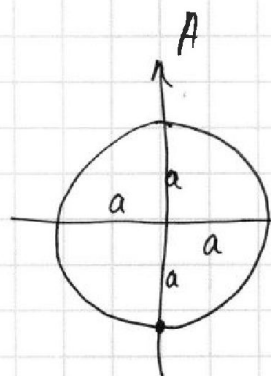
$$\begin{array}{r} 4486 \\ + 2888 \\ \hline 7374 \end{array}$$



$$\begin{array}{r} 39 \\ \times 37 \\ \hline 273 \\ 117 \\ \hline 1443 \\ + 1493 \\ \hline 2886 \end{array}$$

$$(-a)^2 - 4(-a) - a = 6$$

$$a^2 + 4a - a - 6 = 0$$



$$BN \cdot MA = 2BM \cdot NC \quad a^2 + 3a - 6 = 0$$

$$\frac{BN \cdot MA}{2BM \cdot NC} = 1 \quad D = 9 + 24 =$$

$$\frac{BK}{KN} \dots$$

$$\begin{array}{r} + 2886 \\ + 1600 \\ \hline 4486 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 47 \\ \times 47 \\ \hline 329 \\ 188 \\ \hline 2209 \end{array}$$

8;

$$y^2 - 4y - a \leq 6$$

a; 42

1; 37

$$\begin{array}{r} 23 \\ \times 8 \\ \hline 184 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2025 + \\ + 184 \\ \hline 2209 \end{array}$$

$$y^2 - 4y - a \leq 6 \text{ см}$$

$$y^2 - 4y - a - 6 \leq 0 \text{ см}$$

$$y^2 - 4y \leq 6 + a$$

$$y^2 - 4y + 4 - 10 - a \leq 0$$

$$(y - 2)^2 \leq 10 + a$$