



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 10



1. [3 балла] При каком наименьшем натуральном n число $(n-1)! + n! + (n+1)!$ делится на 289?
2. [3 балла] Из суммы квадратов семи последовательных натуральных чисел вычли число 28 и получили пятую степень натурального числа N , большего 8. Найдите наименьшее возможное значение N .
3. [4 балла] Решите неравенство

$$\left| \sqrt{x^2 - x - 2} + 5 \right| \geq \left| \sqrt{x^2 - x - 2} + x - 1 \right| + |6 - x|.$$

4. [5 баллов] На координатной плоскости рассматриваются ромбы с длиной стороны 5 такие, что абсциссы и ординаты всех четырёх вершин каждого ромба — целые числа из промежутка $[1; 45]$. Сколько существует таких ромбов? Напомним, что квадрат также является ромбом.
5. [5 баллов] Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющих уравнению

$$23 \cdot 2^x + 2025 = y^2.$$

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при каждом из которых для множества точек плоскости Oxy , задаваемых уравнением $x^2 + y^2 = a^2$, наибольшее значение выражения $y^2 - 4y - a$ равно 6.
7. [6 баллов] На сторонах AB и BC треугольника ABC выбраны точки M и N соответственно так, что $\angle MNB = \angle ANC = 70^\circ$. Найдите $\angle CAN$, если известно, что $BN \cdot MA = 2BM \cdot NC$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☒

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(n-1)! + n! + (n+1)! : 289 = 17^2$$

$$(n-1)! + n! + (n+1)! = (n-1)!(1 + n + (n+1)n) = (n-1)!(n+1)^2 : 17^2$$

17 - простое число

$$(n-1)! : 17 \quad \text{или} \quad n+1 : 17$$

$$n-1 \geq 17$$

$$n+1 \geq 17$$

$$n \geq 18$$

$$n \geq 16$$

$$n \geq 16$$

$n=16$ подходит:

$$(16-1)! + 16! + (16+1)! = 15!(1 + 16 + 16 \cdot (16+1)) = 15!(16+1)^2 = 15! \cdot 17^2 = 15! \cdot 289 : 289$$

Ответ: 16.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 + (n+3)^2 + (n+4)^2 + (n+5)^2 + (n+6)^2 - 28 = \\ = M^5, M > 8 \text{ — мы обозначим максимальное из семи подряд идущих чисел } n.$$

$$n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 + (n+3)^2 + (n+4)^2 + (n+5)^2 + (n+6)^2 - 28 = \\ = n^2 + n^2 + 2n + 1 + n^2 + 4n + 4 + n^2 + 6n + 9 + n^2 + 8n + 16 + n^2 + 10n + \\ + 25 + n^2 + 12n + 36 - 28 = 7n^2 + 42n + 63 = 7(n^2 + 6n + 9) = \\ = 7(n+3)^2 = M^5$$

7 — простое число

$$M: 7$$

$$M > 8$$

$$M \geq 14$$

Допустим, $M = 14$.

$$7(n+3)^2 = 14^5 = 2^5 \cdot 7^5$$

$$(n+3)^2 = 2^5 \cdot 7^4$$

$2^5 \cdot 7^4$ не является точным квадратом. Противоречие, наше допущение неверно, $M \neq 14$.

$$M \geq 21$$

Допустим, $M = 21$.

$$7(n+3)^2 = 21^5 = 3^5 \cdot 7^5$$

$$(n+3)^2 = 3^5 \cdot 7^4$$

$3^5 \cdot 7^4$ не является точным квадратом. Противоречие — наше допущение неверно, $M \neq 21$.

$$M \geq 28$$

$M = 28$ подходит:

$$7(n+3)^2 = 28^5 = 2^{10} \cdot 7^5$$

$$(n+3)^2 = 2^{10} \cdot 7^4$$

$$n+3 = 2^5 \cdot 7^2 = 32 \cdot 49 = 1568$$

$$n = 1565$$

~~$1565^2 +$~~ Ответ: 28. Нету
Ответ: 28.



1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 - x - 2 \geq 0$$

Старший коэффициент положительный, условие выполняется при $x \in (x_1; x_2)$, где x_1 и x_2 — корни трёхчлена.

$$D = 1 + 4 \cdot 2 = 9$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} = -1; 2$$

$$x \in (-1; 2)$$

$$x \in (-\infty; -1] \cup [2; \infty)$$

$$\sqrt{x^2 - x - 2} + 5 > 0 + 0 = 0$$

$$|\sqrt{x^2 - x - 2} + 5| = \sqrt{x^2 - x - 2} + 5$$

$$|\sqrt{x^2 - x - 2} + 5| \geq |\sqrt{x^2 - x - 2} + x - 1| + |6 - x| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 - x - 2} + 5 \geq |\sqrt{x^2 - x - 2} + x - 1| + |6 - x|$$

Выясним, при каких значениях x $|\sqrt{x^2 - x - 2} + x - 1| = \sqrt{x^2 - x - 2} + x - 1$.

$$\sqrt{x^2 - x - 2} + x - 1 \geq 0$$

$$\sqrt{x^2 - x - 2} \geq 1 - x$$

$$\text{При } 1 - x < 0, x > 1, \sqrt{x^2 - x - 2} \geq 0 > 1 - x.$$

$$\text{При } 1 - x \geq 0, x \leq 1:$$

$$x^2 - x - 2 \geq 1 - 2x + x^2$$

$$x \geq 3$$

$$x \leq 1$$

~~Решения нет.~~

$$\text{При } x > 1, \sqrt{x^2 - x - 2} + x - 1 \geq 0;$$

$$\text{При } x \leq 1, \sqrt{x^2 - x - 2} + x - 1 < 0.$$

$$x \in (-\infty; -1] \cup [2; \infty)$$

$$\text{При } x \geq 2, \sqrt{x^2 - x - 2} + x - 1 \geq 0;$$

$$\text{При } x \leq -1, \sqrt{x^2 - x - 2} + x - 1 < 0.$$

$$|\sqrt{x^2 - x - 2} + x - 1| = \sqrt{x^2 - x - 2} + x - 1 \text{ при } x \geq 2;$$

$$|\sqrt{x^2 - x - 2} + x - 1| = 1 - x - \sqrt{x^2 - x - 2} \text{ при } x \leq -1.$$

Аналогично, выясним, при каких значениях x $|6 - x| = 6 - x$.

$$6 - x \geq 0$$

$$6 \geq x$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

При $x \leq 6$, $|6-x| = 6-x$;

При $x > 6$, $|6-x| = x-6$.

$x \in (-\infty; -1] \cup [2; \infty)$

При $x \in (-\infty; -1] \cup [2; 6]$, $|6-x| = 6-x$;

При $x > 6$, $|6-x| = x-6$.

При $x \leq -1$:

$$\sqrt{x^2-x-2} + 5 \geq |\sqrt{x^2-x-2} + x - 1| + |6-x| = 1-x-\sqrt{x^2-x-2} + 6-x$$

$$= 7-2x-\sqrt{x^2-x-2}$$

$$2\sqrt{x^2-x-2} - 2 + 2x \geq 0$$

$$\sqrt{x^2-x-2} - 1 + x \geq 0$$

$$\sqrt{x^2-x-2} \geq 1-x$$

$$1-x \geq 1-(-1) = 2 > 0$$

$$x^2-x-2 \geq (1-x)^2 = 1-2x+x^2$$

$$x \geq 3$$

$$x \leq -1$$

Нет решений.

При $x \in [2; 6]$:

$$\sqrt{x^2-x-2} + 5 \geq |\sqrt{x^2-x-2} + x - 1| + |6-x| = \sqrt{x^2-x-2} + x - 1 + 6 - x$$

$$= \sqrt{x^2-x-2} + 5$$

$$0 \geq 0$$

Неравенство верно.

При $x > 6$:

$$\sqrt{x^2-x-2} + 5 \geq |\sqrt{x^2-x-2} + x - 1| + |6-x| = \sqrt{x^2-x-2} + x - 1 + x - 6$$

$$= \sqrt{x^2-x-2} + 2x - 7$$

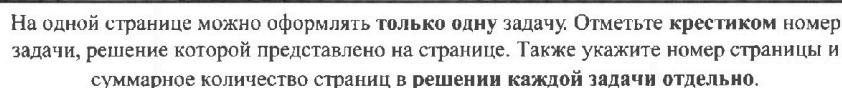
$$12 \geq 2x$$

$$x \leq 6$$

$$x > 6$$

Нет решений.

Ответ: $[2; 6]$.



СТРАНИЦА
1 ИЗ 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Пороча QR-кода недопустима!

Поворотом и перевертыванием "косой" стороны² получается её положение:

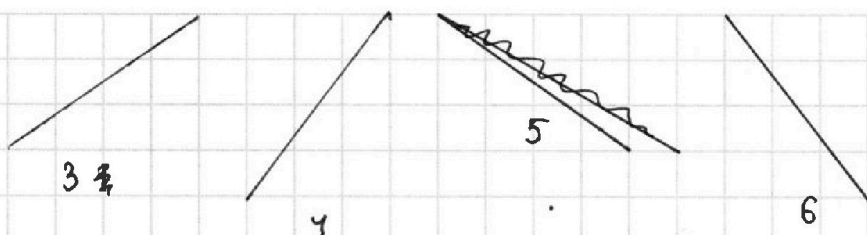


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 из 7

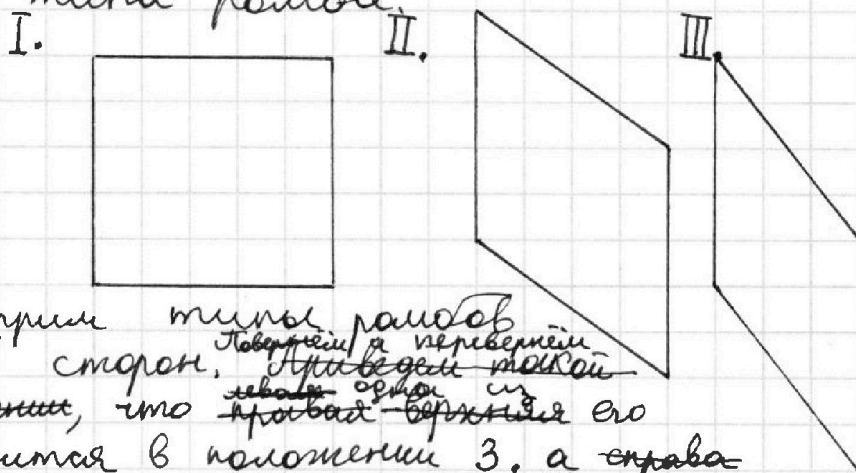
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



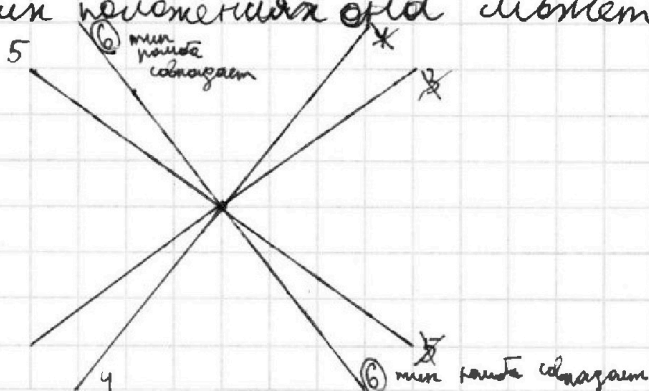
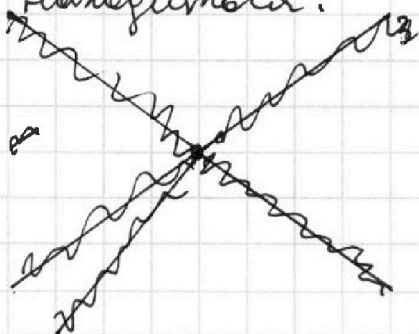
Как в каком положении может находиться сторона, образующая верхний тупой угол с рассматриваемой нами "прямой" стороной?

— В положениях 2, 5, 6, а положения 1, 3, 4 образуют здесь тупой или развёрнутый угол.

Соответственно по положениям 2, 5, 6 мы получаем 3 различных при повороте и перевороте типа ромба.



Теперь рассмотрим типы ромбов без "прямых" сторон. Повернём и перевернём такую ромб в таком положении, что правая верхняя её сторона находится в положении 3, а левая тупой угол находится на правом верхнем её конце. Вторая сторона, образующая этот угол, не "прямая", т.е. не может находиться в положениях 1 и 2. В каких положениях она может находиться?





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

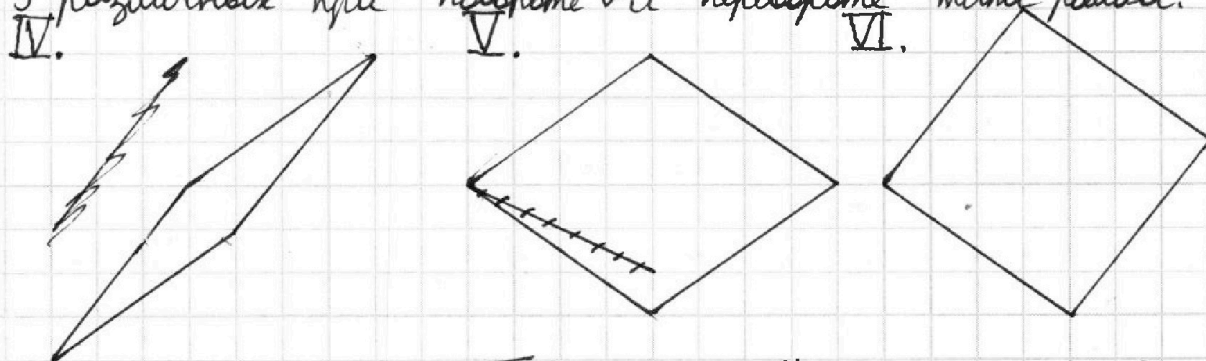
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
3 из 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

— В положениях 4, 5, 6.

Соответственно положениям 4, 5, 6 мы получаем ещё 3 различных при повороте ^{на 90°} и перевороте типа ромба:



Получая типы ромба с „прямой“ стороной, в рассуждении мы заранее указывали полуклассность, где ожидаем острый угол. В общем случае так делать нельзя, поэтому необходимо сделать замечание, что конкретно в этом случае мы не потеряли типы ромба, ввиду симметрии „прямой“ стороны относительно вертикальной оси, т.к. получающиеся во второй полуклассности прямые и кривые углы при перевороте совпадают с получающимися в рассмотренной полуклассности.

Итак, нами получено 6 типов ромбов. Заметим, что для каждого типа кол-во ромбов на доске классности ~~с~~ ^{на 90°} каждого из положений, различающихся поворотом ^{на 90°} и переворотом, одинаково, т.к. ~~эта~~ интересующую нас ~~классность~~ область классности ~~этого~~ можно также поворачивать ^{на 90°} и переворачивать: ~~так как~~ она квадратная и при таких преобразованиях не изменяется.

Таким образом, для нахождения кол-ва ромбов каждого типа достаточно найти кол-во ромбов одного положения этого типа, кол-во положений этого типа и полученные количества перемножить. Кол-во Ромб определённого положения определённого типа однозначно задаётся координатами определённой вершины.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
4 из 7

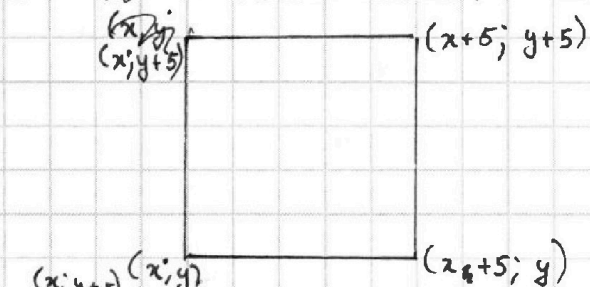
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

I. ~~Этот тип имеет только одно положение.~~

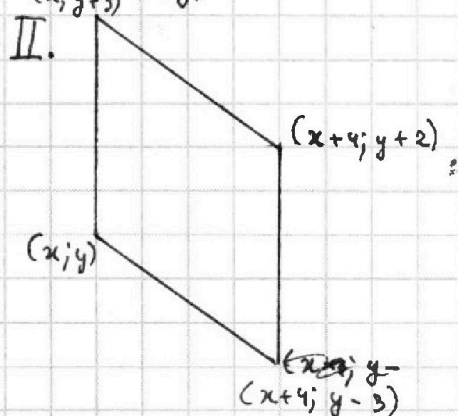
В каждом типе далее рассуждения аналогичны.

1. Находим кол-во положений.
2. Выбираем первое из найденных положений.
3. Выбираем вершину этого положения, задаем ей координаты $(x; y)$.
4. На рисунке показываем координаты остальных вершин из $(x; y)$.
5. Находим пределы x и y из крайних вершин ромба.
6. ~~Находим~~ Находим кол-во значений, которые принимает x и y .
7. Находим кол-во ромбов изобразив положение кол-во значений, которые принимает координаты выбранной вершины $(x; y)$ как произведение значений, которые принимают x и y .
8. Находим кол-во ромбов изобразив положение как произведение кол-ва ромбов изобразив положение на кол-во положений.

I. По 1 положение:



$$\begin{aligned} (x; y) &: x \geq 1, y \geq 1 \\ (x+5; y+5) &: x+5 \leq 45, y+5 \leq 45 \\ x &\leq 40, y \leq 40 \\ x &: 40 - 1 + 1 = 40 \text{ значений} \\ y &: 40 - 1 + 1 = 40 \text{ значений} \\ \text{Положение} &: 40 \cdot 40 = 1600 \text{ ромбов} \\ \text{Тип} &: 1600 \text{ ромбов} \cdot 1 = 1600 \text{ ромбов} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} (x; y) &: x \geq 1 \\ (x; y+5) &: y+5 \leq 45 \\ (x+4; y-3) &: x+4 \leq 45, y-3 \geq 1 \\ y &\leq 40 \\ x &\leq 41 \\ y &\geq 4 \\ x &: 41 - 1 + 1 = 41 \text{ значений} \\ y &: 40 - 4 + 1 = 37 \text{ значений} \\ \text{Положение} &: 37 \cdot 41 = 1517 \text{ ромбов} \end{aligned}$$

4 положения:

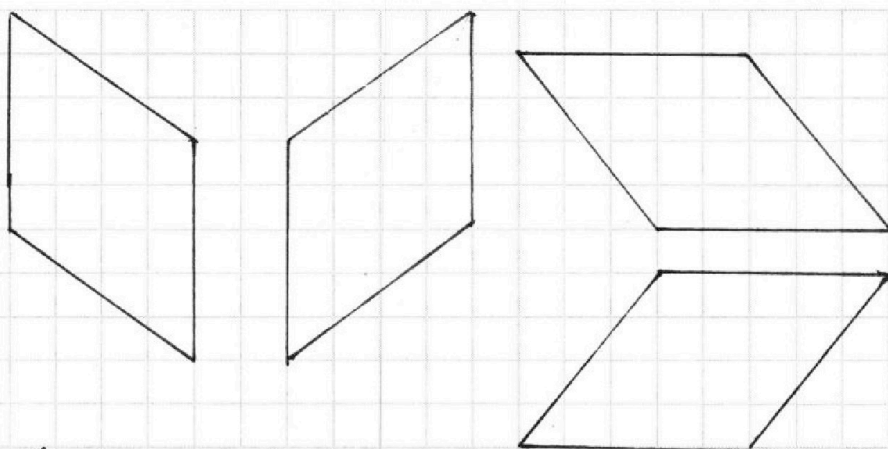


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

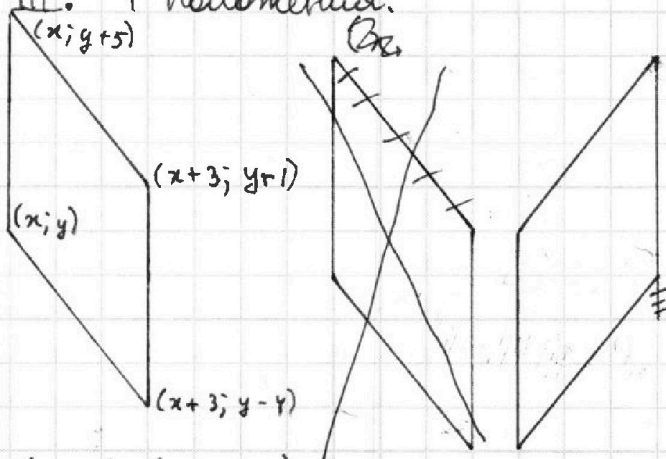
СТРАНИЦА
5 из 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Площ: $157 \cdot 4 = 6068$ кв. см.

III. 4 положения:



$(x; y)$ $(x; y+5)$: $x \geq 1$; $y+5 \leq 45$
 $(x+3; y-4)$: $x+3 \geq 45$; $y-4 \leq 1$
 $y \leq 40$
 $x \geq 42$

$y \leq 5$

$x: 42 - 1 + 1 = 42$ зн.

$y: 40 - 5 + 1 = 36$ зн.

Положение: $42 \cdot 36 = 1512$ р.

Площ: $1512 \cdot 4 = 6048$ р.

IV. 2 положения (см. след. стр.)

$(x; y)$: $x \geq 1$; $y \geq 1$

$(x+7; y+7)$: $x+7 \leq 45$; $y+7 \leq 45$

$x \leq 38$; $y \leq 38$

$x: 38 - 1 + 1 = 38$ зн.

$y: 38 - 1 + 1 = 38$ зн.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☒

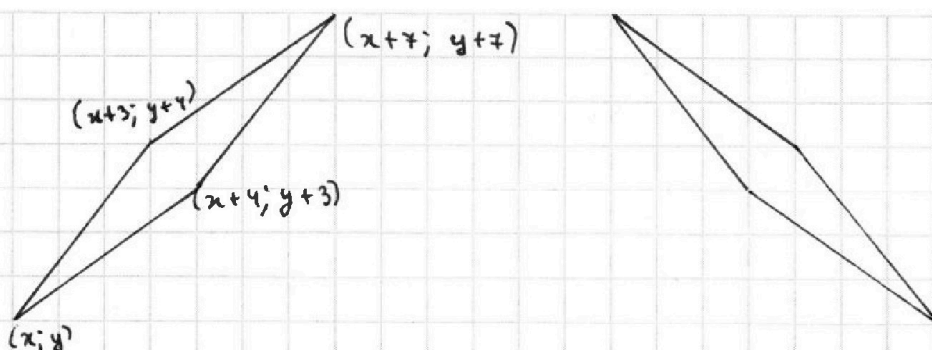
5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
6 из 7

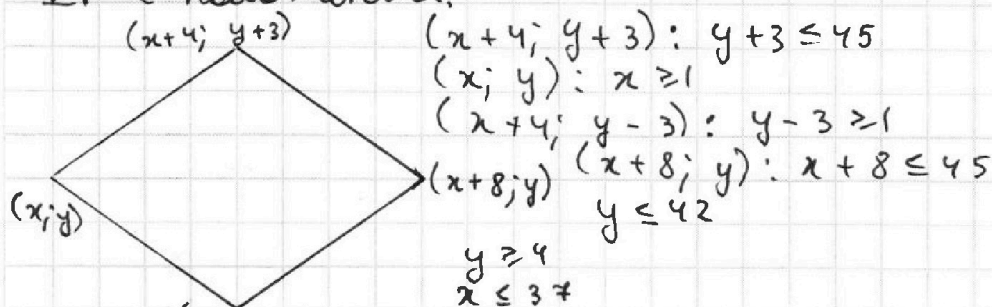
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Площадь: $38 \cdot 38 = 1444$ р.

Пип: $1444 \text{ р.} \cdot 2 = 2888 \text{ р.}$

V. 2 положения:



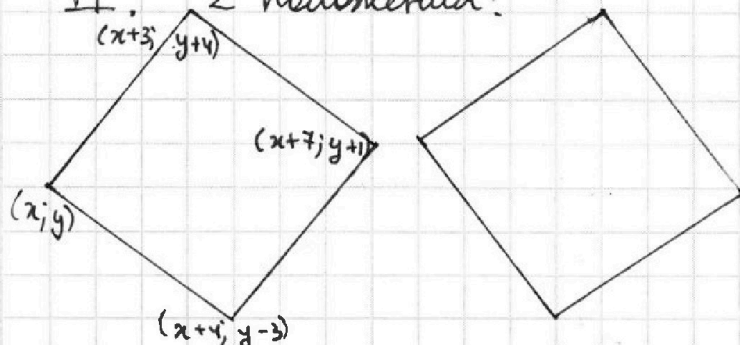
x: $37 - 1 + 1 = 37$ зн.

y: $42 - 4 + 1 = 39$ зн.

Площадь: $37 \cdot 39 = 1443$ р.

Пип: 2886 р.

VI. 2 положения:



(x; y): $x \geq 1$

(x+3; y+4): $y+4 \leq 45$

(x+4; y-3): $y-3 \geq 1$

(x+7; y+1): $x+7 \leq 45$

$y \leq 41$

$y \geq 4$

$x \leq 38$

x: $38 - 1 + 1 = 38$ зн.

y: $41 - 4 + 1 = 38$ зн.



На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
7 ИЗ 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Решение: $38 \cdot 38 = 1444$ р.

Плат: $1444 \cdot 2 = 2888$ р.

Два

Умно: $1600 + 517 + 6048 + 2888 + 2886 + 2888 = 22378$ р.

Объем: 22 378 рублей.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$23 \cdot 2^x + 2025 = y^2$$

$$23 \cdot 2^x = y^2 - 2025 = y^2 - 45^2 = (y-45)(y+45)$$

23, 2 - простые числа

$$y-45 \div 23$$

$$y+45 = 2^k, k \leq x$$

$$y-45 = 23 \cdot 2^k$$

$$y+45 = 2^{x-k}$$

$$y = 23 \cdot 2^k + 45$$

$$23 \cdot 2^k + 45 = 2^{x-k}$$

$$23 \cdot 2^k + 90 = 2^{x-k}$$

$$23 \cdot 2^{k-1} + 45 = 2^{x-k-1}$$

$$\text{Если } k-1, x-k-1$$

$$45 - \text{нечет.} \Rightarrow k-1 \geq 0$$

$$k-1 \leq 0 \text{ или } x-k-1 \leq 0$$

$$k \leq 1 \quad x \leq k+1$$

$$23 \cdot 2^x + 2025 = y^2$$

$$\in \mathbb{Z} \quad \in \mathbb{Z} \Rightarrow$$

$$k \in [0; 1]$$

$$k \leq x$$

$$x \leq k+1$$

$$x = k+1$$

$$y-45 = 2^k, k \leq x$$

$$y+45 \div 23$$

$$y-45 = 23 \cdot 2^k$$

$$y+45 = 23 \cdot 2^{x-k} (k \leq x, k \in \mathbb{Z})$$

$$y = 2^k + 45$$

$$2^k + 45 + 45 = 23 \cdot 2^{x-k}$$

$$2^k + 90 = 23 \cdot 2^{x-k}$$

$$2^{k-1} + 45 = 23 \cdot 2^{x-k-1}$$

$$45 - \text{нечет.} \Rightarrow$$

$$k-1 \leq 0 \text{ или } x-k-1 \leq 0$$

$$k \leq 1 \quad x \leq k+1$$

$$23 \cdot 2^x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \geq 0$$

$$k \in [0; 1]$$

$$k \leq x$$

$$x \leq k+1$$

$$x = k+1$$

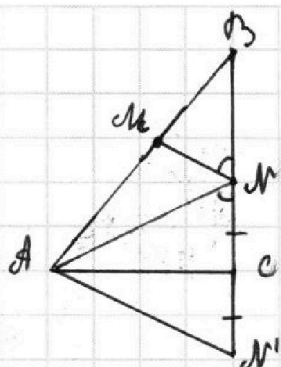


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



N' — точка продолжения BC за точку C такая, что $NC = CN'$.

$$BN \cdot MA = 2BN \cdot NC = 9BN \cdot NN'$$

$$\frac{BN}{BN} = \frac{NN'}{MA} \Rightarrow$$

по обратной теореме
Фалеса $NN' \parallel AN' \Rightarrow$ соответственные
при пар. NN', AN' , сек. $BN' \angle MNB =$
 $= \angle AN'B$

$$\angle AN'B = \angle MNB = 70^\circ = \angle AN'N' \Rightarrow$$

$\Rightarrow \triangle AN'N'$ — равноб.

$$AN = AN'$$

$NC = CN' \Rightarrow AC$ — мед. равноб. $\triangle AN'N' \Rightarrow$

$\Rightarrow AC$ — вых., $\angle ACN' = 90^\circ$

$$\angle NAC = 180^\circ - \angle ANC - \angle ACN' = 180^\circ - 70^\circ - 90^\circ = 20^\circ -$$

по сумме углов тр.

Ответ: 20° .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} 23 \cdot 2^x + 20 \cdot 2^y &= y^2 \\ 23 \cdot 2^x - 2^y &= 2025 \end{aligned}$$
$$(y+2^y)(y-2^y) = 23 \cdot 2^x - 2^y = 2025$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} 2k + 90 &: 23 \\ 2k - 1 + 45 &: 23 \end{aligned}$$

$$23 \cdot 2^2 + 2025 = y^2$$

$$\begin{array}{r} 1517137 \\ -14834 \\ \hline 37 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2025 \\ 673 \end{array}$$

$$2 +$$

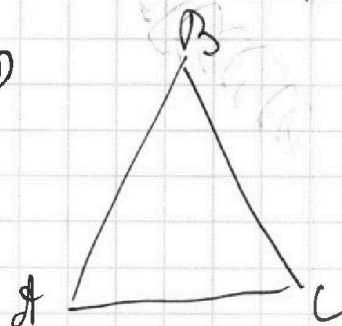
$$\begin{array}{r} 3 \\ 24 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2888 \\ + 2886 \\ \hline 5774 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 5774 \\ + 2888 \\ \hline 8662 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 8662 \\ + 6048 \\ \hline 14710 \\ 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 20778 \\ 1600 \\ \hline 22378 \\ 2 \end{array}$$



$$\begin{aligned} BM \cdot MC &= 2BM \cdot MC \\ \frac{BM}{BM} &= \frac{2MC}{MA} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} +1600 \\ 6068 \\ \hline 7668 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} +7668 \\ 6048 \\ \hline 13716 \end{array}$$

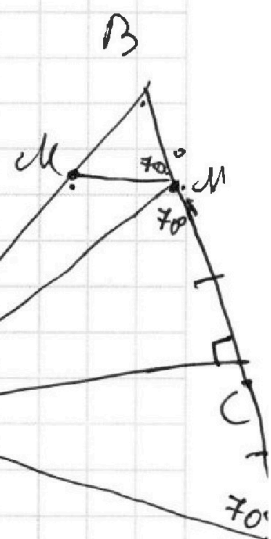
$$\begin{array}{r} +13716 \\ 2888 \\ \hline 16604 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} +16604 \\ 2886 \\ \hline 19490 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} +19490 \\ 2888 \\ \hline 22378 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} +15710 \\ 6068 \\ \hline 20778 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 8909 \\ \hline 151 \\ 2 \end{array}$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$|\sqrt{x^2-x-2} + x - 1| + |6 - x| = \sqrt{x^2-x-2} + x - 1 + 6 - x =$$

$$= \sqrt{x^2-x-2} + 5$$

$$\sqrt{x^2-x-2} + 5 \geq \sqrt{x^2-x-2} + 5$$

0 ≥ 0

Неравенство верно.

При $x \geq 6$:

$$|\sqrt{x^2-x-2} + 5| = \sqrt{x^2-x-2} + 5$$

$$|\sqrt{x^2-x-2} + x - 1| + |6 - x| = \sqrt{x^2-x-2} + x - 1 + x - 6 =$$

$$= \sqrt{x^2-x-2} + 2x - 7$$

$$\sqrt{x^2-x-2} + 5 \geq \sqrt{x^2-x-2} + 2x - 7$$

$$16 \geq 2x - 12 \geq 2x$$

$$6 \geq x$$

$$x \geq 6$$

$$x = 6$$

Ответ: $[2; 6]$.

$$\begin{array}{r} 6048 \\ + 2886 \\ \hline 8934 \end{array}$$

$$10534$$

$$\begin{array}{r} 8934 \\ + 1600 \\ \hline 10534 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 38 \\ \times 38 \\ \hline 1304 \\ 1304 \\ \hline 1444 \end{array}$$

$$40 \cdot 40 = 1600$$

$$\begin{array}{l} x-3 \geq 1 \\ y-8 \geq 1 \\ x \geq 4 \\ y \geq 10 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x \leq 45 \\ y \leq 45 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 304 \\ \times 38 \\ \hline 11512 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 42 \\ \times 36 \\ \hline 252 \\ 126 \\ \hline 1512 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 37 \\ \times 38 \\ \hline 1386 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 111 \\ \times 11 \\ \hline 1221 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 42 \\ \times 36 \\ \hline 256 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x+5 \leq 45 \\ y+5 \leq 45 \\ x \leq 40 \\ y \leq 40 \\ x \geq 1 \\ y \geq 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 45-4+1=42 \\ 45-10+1=36 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 37 \\ \times 41 \\ \hline 1517 \end{array}$$

$$x-3; y-8$$

$$x-4; y+3$$

$$x-5; y+4$$

$$(x; y)$$

$$1600$$

$$x; y+6$$

$$x-4$$

$$2886$$

$$x+4; y+3$$

$$\begin{array}{l} x; y \\ x \geq 1 \\ y \geq 1 \end{array}$$

$$(x+5; y+5)$$

$$\begin{array}{l} x-4 \geq 1 \\ x \geq 5 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x+4 \leq 45 \\ x \leq 41 \end{array}$$

$$41-5+1=37$$

$$\begin{array}{l} y \geq 1 \\ y+6 \leq 45 \\ y \leq 39 \end{array}$$

$$39-6+1=34$$

$$\begin{array}{r} 37 \\ \times 38 \\ \hline 1386 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

При

$$\sqrt{x^2 - x - 2} + 5 > 0 + 0 = 0$$

$$|\sqrt{x^2 - x - 2} + 5| = 0$$

$$\sqrt{x^2 - x - 2} + x - 1 \geq 0$$

$$\sqrt{x^2 - x - 2} \geq 1 - x$$

При $1 - x < 0$, $x > 1$, $\sqrt{x^2 - x - 2} \geq 0 > 1 - x$

При $1 - x \geq 0$, $x \leq 1$:

$$x^2 - x - 2 \geq (1 - x)^2$$

$$x^2 - x - 2 \geq 1 - 2x + x^2$$

$$x \geq 3$$

$\sqrt{x^2 - x - 2} + x - 1 \geq 0$ при $x > 1$, при

при $x \leq 1$

$$\sqrt{x^2 - x - 2} + x - 1 \leq 0 \text{ при } x < 1$$

$$|\sqrt{x^2 - x - 2} + x - 1| = \sqrt{x^2 - x - 2} + x - 1 \text{ при } x > 1$$

$$2|\sqrt{x^2 - x - 2} + x - 1| = 1 - x - \sqrt{x^2 - x - 2} \text{ при } x \leq 1$$

$$|6 - x| = 6 - x \text{ при } x \leq 6$$

$$|6 - x| = x - 6 \text{ при } x \geq 6$$

$$x \in (-\infty; -1] \cup [2; \infty)$$

При $x \in (-\infty; -1]$, $x \leq 1$, $x \in (-\infty; -1]$

При $x \leq -1$:

$$|\sqrt{x^2 - x - 2} + 5| = \sqrt{x^2 - x - 2} + 5$$

$$|\sqrt{x^2 - x - 2} + x - 1| + |6 - x| = 1 - x - \sqrt{x^2 - x - 2} + 6 - x =$$

$$= 7 - 2x - \sqrt{x^2 - x - 2}$$

$$\sqrt{x^2 - x - 2} + 5 \geq 7 - 2x - \sqrt{x^2 - x - 2}$$

$$2\sqrt{x^2 - x - 2} + 2x - 2 \geq 0$$

$$\sqrt{x^2 - x - 2} + x - 1 \geq 0$$

$$\sqrt{x^2 - x - 2} \geq 1 - x$$

$$\sqrt{x^2 - x - 2} \geq 0$$

$$1 - x \geq 1 - (-1) = 2 > 0$$

$$x^2 - x - 2 \geq (1 - x)^2 = 1 - 2x + x^2$$

$$x - 3 \geq 0$$

$$x \geq 3$$

Нет решений $x \leq -1$

Нет решений.

При $x \in (1; 6)$, $x \in [2; 6)$.

При $x \in [2; 6)$:

$$|\sqrt{x^2 - x - 2} + 5| = \sqrt{x^2 - x - 2} + 5$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(n-1)! + n! + (n+1)! = (n-1)! (1 + n + n(n+1)) =$$

$$= (n-1)! (1 + n + n^2 + n) = (n-1)! (n^2 + 2n + 1) = (n-1)! (n+1)^2$$

$$(n-1)! (n+1)^2 : 289 = 17^2$$

$$(n-1)! : 17$$

$$n-1 \geq 17$$

$$n \geq 18$$

$$n \geq 16$$

$$n+1 : 17$$

$$n+1 \geq 17$$

$$n \geq 16$$

$$\begin{array}{r} \times 9 \\ 32 \\ \hline 147 \\ \hline 1568 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 91 \\ -28 \\ \hline 63 \end{array}$$

$$(16-1)! + 16! + (16+1)! = 15! (1 + 16 + 16 \cdot 17) =$$

$$= 15! (17 + 16 \cdot 17) = 15! \cdot 17^2 = 15! \cdot 289 : 289$$

$$n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 + (n+3)^2 + (n+4)^2 + (n+5)^2 + (n+6)^2 -$$

$$- 28 = M^5$$

$$n^2 + n^2 + 2n + 1 + n^2 + 4n$$

$$n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 + (n+3)^2 + (n+4)^2 + (n+5)^2 + (n+6)^2 -$$

$$- 28 = n^2 + n^2 + 2n + 1 + n^2 + 4n + 4 + n^2 + 6n + 9 + n^2 + 8n + 16 +$$

$$+ n^2 + 10n + 25 + n^2 + 12n + 36 - 28 = 7n^2 + 42n + 63 =$$

$$= 7(n^2 + 6n + 9) = 7(n+3)^2 = M^5$$

$$M^5 : 7, 7 - \text{простое}$$

$$M : 7$$

$$M > 8$$

$$M \geq 14$$

$$\text{Если } M = 14, \text{ то}$$

$$7(n+3)^2 = 14^5 = 2^5 \cdot 7^5$$

$$(n+3)^2 = 2^5 \cdot 7^4$$

$$2^5 \cdot 7^4 \text{ не является полным квадратом, } M \neq 14$$

$$\text{Если } M = 21, \text{ то}$$

$$7(n+3)^2$$

$$\text{Пусть } M = 7^d \cdot x^b, d \geq 1, x \geq 2$$

$$7(n+3)^2 = 7^d \cdot x^b$$

$$x^2 - x - 2 \geq 0$$

$$D = 1 + 4 \cdot 2 = 9$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} = -1; 2$$

$$x \in (-\infty; -1] \cup [2; \infty)$$

$$\begin{array}{l} M = 28 \\ 7(n+3)^2 = 2^{10} \cdot 7^5 \\ (n+3)^2 = 2^{10} \cdot 7^4 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 7 \cdot 4^5 = 2^5 \cdot 7^5 \\ 14^5 = 2^5 \cdot 7^5 \end{array}$$