

МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 10



1. [3 балла] При каком наименьшем натуральным n число $(n - 1)! + n! + (n + 1)!$ делится на 289?
2. [3 балла] Из суммы квадратов семи последовательных натуральных чисел вычли число 28 и получили пятую степень натурального числа N , большего 8. Найдите наименьшее возможное значение N .
3. [4 балла] Решите неравенство

$$\left| \sqrt{x^2 - x - 2} + 5 \right| \geq \left| \sqrt{x^2 - x - 2} + x - 1 \right| + |6 - x|.$$

4. [5 баллов] На координатной плоскости рассматриваются ромбы с длиной стороны 5 такие, что абсциссы и ординаты всех четырёх вершин каждого ромба — целые числа из промежутка $[1; 45]$. Сколько существует таких ромбов? Наименним, что квадрат также является ромбом.
5. [5 баллов] Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющих уравнению

$$23 \cdot 2^x + 2025 = y^2.$$

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при каждом из которых для множества точек плоскости Oxy , задаваемых уравнением $x^2 + y^2 = a^2$, наибольшее значение выражения $y^2 - 4y - a$ равно 6.
7. [6 баллов] На сторонах AB и BC треугольника ABC выбраны точки M и N соответственно так, что $\angle MNB = \angle ANC = 70^\circ$. Найдите $\angle CAN$, если известно, что $BN \cdot MA = 2BM \cdot NC$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(n-1)! + n! + (n+1)! = (n-1)! (1+n+n(n+1)) = (n-1)! \cdot (n^2 + 2n + 1) = (n-1)! (n+1)^2$$

$$289 = 17^2 \Rightarrow \text{при } n=16 \quad (n+1)^2 = 17^2 : 289 \Rightarrow (n-1)! (n+1)^2 : 289 \text{ при } n=16$$

при $n \leq 16$: $\{(n-1)! \leq 17 \text{ (м.к. } 17 \text{ прогло)}$
 $\} \quad \{n+1 \leq 17 \quad \text{анкета} \Rightarrow (n+1)^2 \leq 17 \text{ (м.к. } 17 \text{ прогло)}\}$ $(n-1)! (n+1)^2 \leq 17 \Rightarrow n \leq 16$ не подходит

Ответ: 16

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.



- | | | | | | | |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

Пусть наименьшее из этих семи чисел равно $m-3 \Rightarrow$ сумма их квадратов $-28 =$

$$= (m-3)^2 + (m-2)^2 + (m-1)^2 + m^2 + (m+1)^2 + (m+2)^2 + (m+3)^2 - 28 = 7m^2 + 2(1+4+9) - 28 = 7m^2 = N^5$$

~~При $N=7$ получаем~~ $N^5 = 7m^2 \Rightarrow N^5 : 7 \Rightarrow N : 7$ (м.к. 7-простое) $\Rightarrow m$ (м.к. $N \geq 8$, то

Докажем, что ~~если~~ $N=7 \cdot 2$ и $N=7 \cdot 3$ не подходит.

при $N=7 \cdot 2$: $N^5 = 7^5 \cdot 2^5 = 7 \cdot m^2 \Rightarrow m^2 = 7^5 \cdot 2^2$, но 2 простое \Rightarrow м.к. В квадрате степень каждого простого делителя делится на 2, оц. степени 2 здесь = 5, то такого быть не может

при ~~если~~ $N=7 \cdot 3$ доказательство аналогичное

Выводим, $N : 7$, но $N \neq 2 \cdot 7; 3 \cdot 7 \Rightarrow N > 4 \cdot 7$. А при $N=4 \cdot 7$: $N^5 = (2^2 \cdot 7)^5 = 2^{10} \cdot 7^5 = 7 \cdot m^2 \Rightarrow m^2 = 2^{10} \cdot 7^4 \Rightarrow m = 7^2 \cdot 2^5 \Rightarrow$ есть пример, где $N=4 \cdot 7 \Rightarrow$ наименьшее $N=4 \cdot 7=28$

Ответ: 28

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$|\sqrt{x^2-x-2} + 5| \geq |\sqrt{x^2-x-2} + x-1| + |6-x|$$

$$\text{ОДЗ: } x^2 - x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow (x-2)(x+1) \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} x \leq -1 \\ x \geq 2 \end{cases}$$

$$\sqrt{x^2-x-2} + x-1 \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2-x-2} \geq 1-x \quad \text{при } x \geq 1 \vee$$

$$x \leq 1: x^2 - x - 2 \geq (1-x)^2 = 1 - 2x + x^2 \Leftrightarrow x \geq 3 \text{ не подх. (т.к. } x \leq 1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2-x-2} + x-1 \geq 0 \text{ при } x \geq 1$$

$$6-x \geq 0 \text{ при } x \leq 6$$

$$\sqrt{x^2-x-2} + 5 \geq 0 \quad \forall x \text{ из ОДЗ}$$

Итого:

$$\begin{array}{ccccc} & & 1 & & 6 \\ \sqrt{x^2-x-2} & - & + & | & + \\ \hline 6-x & + & + & | & - \end{array}$$

$$\text{при } x \leq 1: \sqrt{x^2-x-2} + 5 \geq -\sqrt{x^2-x-2} - x + 1 + 6 - x$$

$$2\sqrt{x^2-x-2} \geq 2 - 2x$$

$$\sqrt{x^2-x-2} \geq 1 - x \quad x \leq 1 \Rightarrow 1 - x \geq 0$$

$$x^2 - x - 2 \geq (1-x)^2 = 1 - 2x + x^2$$

$$x \geq 3, \text{ но } x \leq 1 \Rightarrow \emptyset$$

при $1 < x \leq 6$:

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2-x-2} + 5 &\geq \sqrt{x^2-x-2} + x-1 + 6-x \\ 5 &\geq x-1 + 6-x \\ 5 &\geq 5 \\ 0 \geq 0 &\Rightarrow \forall x \in (1; 6) \text{ подх.} \end{aligned}$$

при $x > 6$:

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2-x-2} + 5 &\geq \sqrt{x^2-x-2} + x-1 + x-6 \\ 5 &\geq x+x-7 \\ 2x &\leq 12 \\ x &\leq 6, \text{ но } x > 6 \Rightarrow \text{подх. только } x=6 \end{aligned}$$

$\Rightarrow 1 < x \leq 6$. Теперь наложим на ОДЗ:

$$\begin{cases} 1 < x \leq 6 \\ x \leq -1 \\ x \geq 2 \end{cases} \rightarrow 2 \leq x \leq 6$$

Ответ: $x \in [2; 6]$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Теперь приведём общий алгоритм, который для конкретной формы ромба посчитает сколько их всего в промежутке $[1;45]$ (координаты всех их вершин в промежутке $[1;45]$):

Последуя этому алгоритму, представим получившую область для расположения ромбов в виде квадрата со стороной 44. Все подходящие ромбы лежат полностью внутри этого квадрата (или на его границе). Запомним, что если вокруг ромба X описать прямоугольник, то он будет включать ромб X и пологий ромб, то есть форма X , мы однозначно восстановим ромб X мы получаем взаимное соответствие между вершинами и описанного ромба X и описанного вокруг него прямоугольника. Так же запомним, что если ромб X находится внутри получившей области квадрата 4×4 , то и его описанный прямоугольник лежит внутри (вокруг), частично на границе) этой области \Rightarrow количество ромбов формы X внутри этой области есть количество описанных прямоугольников, являющихся описаными для ромба формы X , внутри этой области. Тогда запомним, что описанных прямоугольников n^2 внутри этой области (прямоугольники с целочисленными координатами вершин) \Rightarrow $(45-n)(45-m)$ штук (т.к. каждый из них однозначно задаётся парой верхней левой вершиной, которая находится между вертикальными и горизонтальными осями). Т.е. прямоугольники 1×2 и 2×1 , к примеру, разные

размером $(45-n) \cdot (45-m)$. Значит, если описанный прямоугольник для ромба X имеет размеры $n \times m$, то таких ромбов в области $(45-n)(45-m)$. Тогда запомним, что n - расстояние между левый и правой вершинами ромба по горизонтали, m - расстояние по вертикали между верхней и нижней вершинами ромба.

Выходит, для формы ромба X мы получились понять, сколько таких ромбов внутри поддающей области \Rightarrow если все эти значения для 15 форм сочтём, получим ответ на задачу. Но сначала определим для каждой формы посчитает сколько таких ромбов нам подходит.

Форма:	Число подд. ромбов:	Форма:	Число подд. ромбов:
1	40×40	9	$39 \cdot 37$
2	$41 \cdot 37$	10	$38 \cdot 38$
3	$41 \cdot 37$	11	$38 \cdot 38$
4	$42 \cdot 36$	12	$38 \cdot 38$
5	$42 \cdot 36$	13	$38 \cdot 38$
6	$42 \cdot 36$	14	$41 \cdot 37$
7	$39 \cdot 37$	15	$36 \cdot 42$
8	$41 \cdot 37$		

$$\begin{aligned}
 &\text{Итого получаем:} \\
 &40 \cdot 40 + 4 \cdot 42 \cdot 36 + 4 \cdot 38^2 + 41 \cdot 37 \cdot 2 + \\
 &+ 39 \cdot 37 \cdot 2 = 1600 + 6048 + \\
 &+ 5904 + 6068 + 2886 = \\
 &= 22506
 \end{aligned}$$

Ответ: 22 506



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | X | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 ИЗ 3

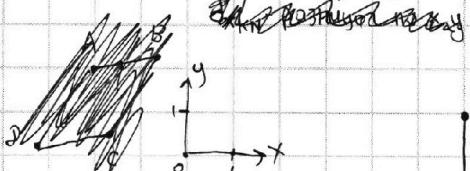
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

по стороне

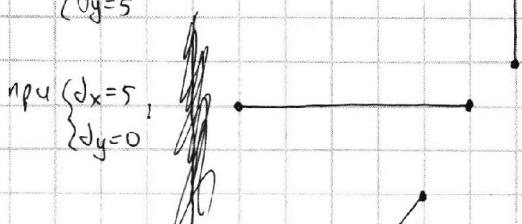
Возьмём две соседние вершины такого ромба пусть d_x -модуль разности их координат по x, d_y -модуль разности их координат по y. Расстояние между этими вершинами $\sqrt{d_x^2 + d_y^2}$ = длина стороны ромба = 5. Т.к. d_x, d_y - числа целые (чтобы не было дробей), и при этом целые (т.к. вершины ромба имеют целые координаты), то заметим, что

$d_x, d_y \leq 5$ (иначе $d_x > 5 \Rightarrow d_x^2 + d_y^2 > 25 \Rightarrow \sqrt{d_x^2 + d_y^2} > 5 \Rightarrow d_x, d_y$ - не лежат в промежутке от 0 до 5 включительно) $\Rightarrow \begin{cases} d_x = 3 \\ d_y = 4 \end{cases}$ — с точностью до перестановки Mermanu d_x, d_y

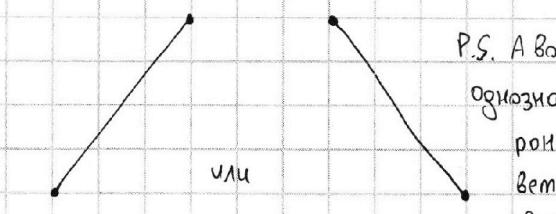
~~Приятель your partner ABCD, где A - самая верхняя его вертикальная линия, несколько линий вниз, а B линия левее B (не присоединяется к A) и т.д. Потом все соединяют B с C, и путь D лежит внизу (B-C-D) не лежит на одной вертикали т.к. ABCD расположено в выпуклости~~



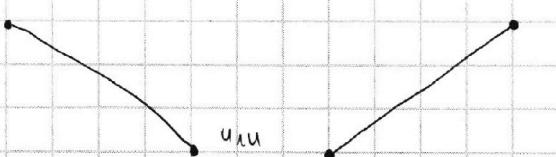
При $\begin{cases} dx=0 \\ dy=5 \end{cases}$ сторона ромба имеет вид:



$$npu \quad \left\{ \begin{array}{l} j_x=3 \\ j_y=4 \end{array} \right.$$



$$\text{apu} \quad \begin{cases} \exists x = 4 \\ \exists y = 3 \end{cases}$$



Запомни, что м.к. у ромба противопол. стороны параллельны, т.б. выбрав из предложенных чине 6 сторон 2 штуки, мы одно значение зададим группе ромба с точноностью до его параллельного

~~переноса.~~ При том из одной пары выбранных строк, как бы мы их ни переставляли, будем получаться одни и те же результаты = видов ромбов у нас $C_6^6 = 15$. Все они приведены ниже:

P.S. А вот уже по картинке рабочая машина однозначно установить из какой пары состоят они сделаны у нас взаимное соответствие рабочие пары и пары сторон = рабочих $C_6^2 = 15$ штук

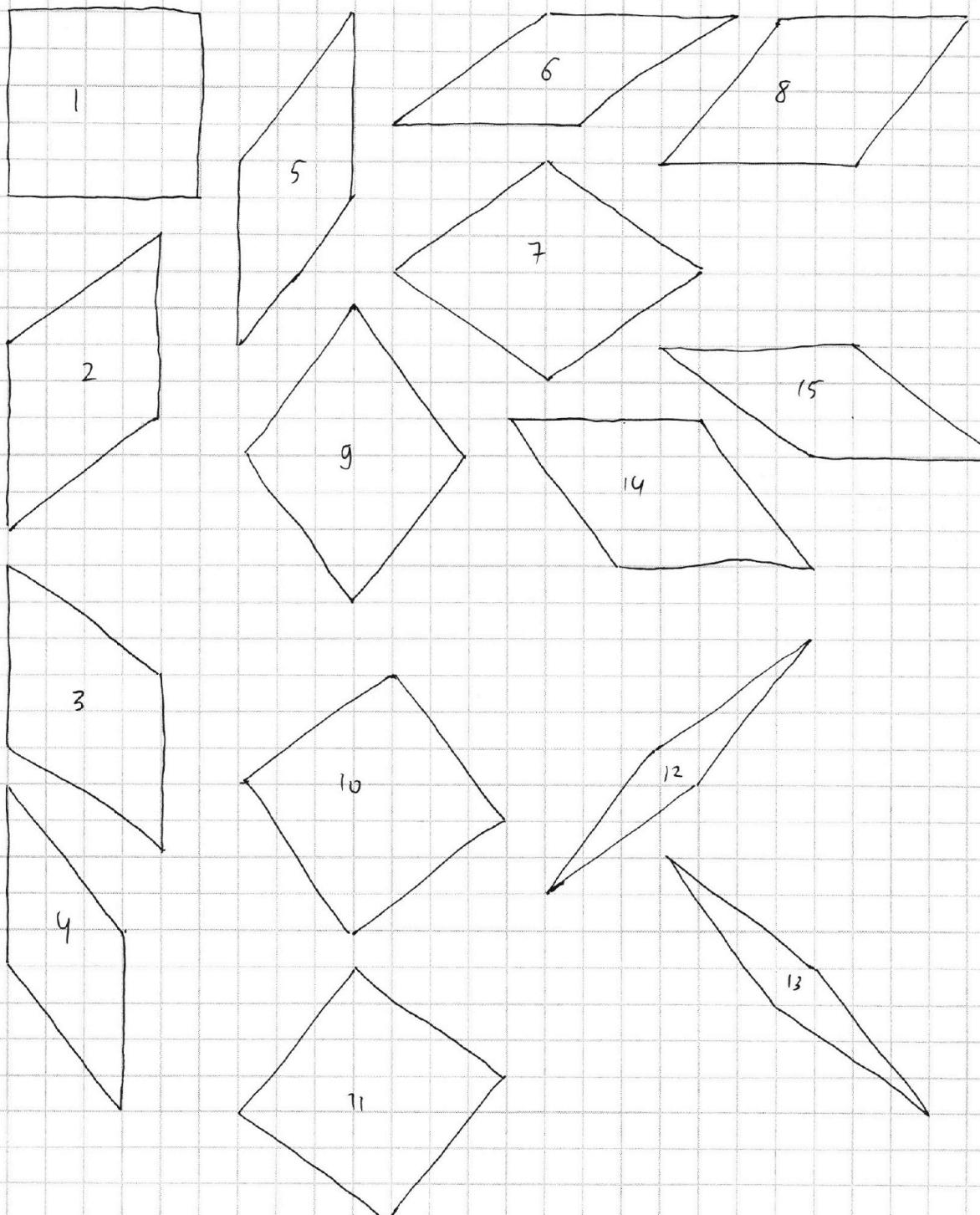


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



P.S. Я тут, когда показывала группу роботов чих (торон), подразумевалось, что оси координат у меня направлены вдоль линий сетки, а одна сторона клетки — единичный отрезок



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

~~Задача, которую я решал~~

28

Заметим, что y^2 -целое (т.к. $y \in \mathbb{Z}$), $2025 \in \mathbb{Z} \Rightarrow 23 \cdot 2^x \in \mathbb{Z} \Rightarrow$ т.к. $23 \nmid 2$, то $x \geq 0$.
Также заметим, что если $(x; y)$ удовлетворяет уравнению, то $(x; -y)$ тоже удовлетворяет уравнению, т.к. $y^2 = (-y)^2 \Rightarrow$ будем рассматривать $y \geq 0$.
потом отразим ответ по y

Заметим, что $2025 + 23 \cdot 2^x > 2025 = 45^2 \Rightarrow y > 45$ (~~т.к.~~ $f(x) = 23 \cdot 2^x$ возрастает на промежутке $[0; +\infty)$). $2025 \equiv 1 \pmod{23} \Rightarrow 23 \cdot 2^x + 2025 \equiv 1 \pmod{23} \Rightarrow y^2 \equiv 1 \pmod{23}$. Посмотрим на все остатки по $\text{mod } 23$

и их квадраты:

•

ост. квадрат. по $\text{mod } 23$

0

1

4

9

16

2

13

3

18

12

8

6

6

8

12

18

1

3

13

1

1

1

1

1

1

1

1

1

1

1

по $\text{mod } 23$ только остатки 1 и 22 дают 1 в квадрате \Rightarrow

$$\begin{cases} y \equiv 1 \pmod{23} \\ y \equiv -1 \pmod{23} \end{cases}$$

если

45^2

при $y \equiv 1$: $y > 45 \Rightarrow y \geq 47$. т.к. $y \equiv 1 \Rightarrow 23 \cdot 2^x + 2025 = 47^2 \Rightarrow 23 \cdot 2^x = 47^2 - 45^2 = (47-45)(47+45) = 8 \cdot 23 = 23 \cdot 2^3 \Rightarrow x=3$. Одна пара

найдена: $(3; 47)$ при $y \neq 47 \Leftrightarrow y \geq 47$

при $y > 47$: $y \geq 50$ т.к. $y \equiv 1 \Rightarrow 23 \cdot 2^x = y^2 - 45^2 = (y-45)(y+45)$. $45 \equiv -1 \pmod{45}$

$\Rightarrow y+45 \geq 23$ (т.к. $y \equiv 1 \Rightarrow y+45 \geq 23 \Rightarrow y-45$ степень второй (т.к.

$23 \cdot 2^x : 23, 2^x$ - простые множн.), ~~если~~ простой $y-45=2^n$. $y+45 \geq 23$, но

при этом $y^2 - 2025 = 23 \cdot 2^x \Rightarrow y+45 = 23 \cdot 2^n$ ($n \in \mathbb{N}$) (т.к. в чинах скучаях

получаем лишние простые множители). \leftarrow т.к. $y+45 \geq 46$

$$2^n = \frac{y+45}{23} \quad 2^n = y-45 \quad \exists n \in \mathbb{N} \Rightarrow 2^n \leq 2^n \Leftrightarrow \frac{y+45}{23} \leq y-45 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 22y \geq 45 \cdot 24 \Leftrightarrow y \geq \frac{45 \cdot 24}{22} = \frac{45 \cdot 22}{22} + \frac{90}{22} = 45 + \frac{90}{22} = 45 + \frac{2}{22} \Rightarrow$$

$\Leftrightarrow y \geq 50$ т.к. $y \in \mathbb{Z}$ - а это доказали ранее (т.к. $y \geq 50$). В силу

равногильности переходов $\left\{ \begin{array}{l} n \geq 1 \\ n \geq 0 \end{array} \right. \Rightarrow \text{НД}(y+45; y-45) = \text{НД}(y-45; 50)$

(Алг. Евклида) $= 2^n \Rightarrow 50 : 2^n \Rightarrow n=1 \Rightarrow y+45 = 23 \cdot 2^1 = 46 \Rightarrow y=1$ противоречие \Rightarrow

\Rightarrow при $y \equiv 1$ подходят только пары $(3; 47)$

$$\text{а. P.S. НД}(y-45; y+45) = \text{НД}(2^n; 23 \cdot 2^n) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{НД}(y-45; y+45) = 2^n \\ n \leq 1 \end{array} \right. \quad (\text{доказано})$$

$n \leq 1$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

при $y_{23}^{\equiv -1}$:

$$y > 45 \Rightarrow y \geq 68$$

$$y_{23}^{\equiv -1} \Rightarrow y - 45 \equiv 0 \Rightarrow y - 45 = 23 \cdot 2^k \quad (k \in \mathbb{N} \text{ (т.к. } y \geq 68\text{), потому что } y^2 - 2025 = (y + 45)(y - 45) = 23 \cdot 2^k =)$$

$\Rightarrow y - 45$ не может делиться ни на какие промежуточные множн., кроме 23 и 2)

$$\begin{aligned} y + 45 \not\equiv 23 \quad (\text{т.к. } y - 45 \text{ чине } : 23, \text{ а } 8 \text{ чине } y^2 - 2025 = 23 \cdot 2^k \cdot 23 \cdot 8 \text{ первою степеню}) \Rightarrow y + 45 = \\ = 2^n \quad (n \in \mathbb{N}) \quad (\text{т.к. } y + 45 > 1) \quad \text{НОД}(y - 45; y + 45) = \text{НОД}(23 \cdot 2^k; 2^n) = \\ = 2^k \quad (\text{т.к. } k < n) \end{aligned}$$

~~запомним, что $\text{НОД}(y + 45; y - 45) = \text{НОД}(y - 45; 90)$ (алг. ЕВКЛИДА) $= 2^k$ (т.к. $k < n$)~~

~~$\Rightarrow 90 : 2^k = j, k=1 \Rightarrow y - 45 = 23 \cdot 2^k = 46 \Rightarrow y = 91 \Rightarrow y + 45 = 136 = 2^n \Rightarrow$ противоречие $\Rightarrow y_{23}^{\equiv -1}$ не выполняет~~

~~$\{k=0 \Rightarrow y - 45 = 23 \cdot 2^k = 23 \Rightarrow y = 68 \Rightarrow y + 45 = 113 = 2^n \Rightarrow$ противоречие~~

Получаем один ответ $(3; 47)$ и, как оговорено в начале, подсчитим ещё $(3; -47)$. Выходит, это все пары подходящих $(x; y)$.

Ответ: $\{(3; 47); (3; -47)\}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 + y^2 = a^2 \text{ - симметричично относительно } x\text{-}y\text{ и } y\text{-}x \Rightarrow y^2 - 4x - a \text{ запишем на } f(x) = x^2 - 4x - a$$

$x^2 + y^2 = a^2$ окружность (если график смотреть) с центром $B(0,0)$ и радиусом $|a|$
 $\Rightarrow D(f) = [-|a|, |a|]$

$$f(x) = x^2 - 4x - a = (x-2)^2 - (a+4)$$

обсущась вершины

↑
 парабола ветвями вверх $x_B = 2$ ~~написано зеркально~~

Парабола ветвями вверх \Rightarrow максимум на концах области её определения (при $x = \pm |a|$)
 т.е. максимум $= \max(f(|a|), f(-|a|))$. $f(-|a|) > f(|a|)$ т.к.

$$\begin{aligned} f(-|a|) \geq f(|a|) &\Leftrightarrow (-|a|-2)^2 - (a+4) \geq (|a|-2)^2 - (a+4) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (|a|+2)^2 \geq (|a|-2)^2 \text{ т.к. } |a|+2 \geq |a|-2 \Rightarrow \text{сумма равносильности переходов} \\ f(-|a|) \geq f(|a|) &\Rightarrow \max_{[-|a|, |a|]} f(x) = f(-|a|) = (|a|+2)^2 - a - 4 = 6 \text{ решим это уравнение} \end{aligned}$$

$$\text{при } a \geq 0: (a+2)^2 - a - 4 = 6 \Leftrightarrow a^2 + 3a - 6 = 0 \quad D = 3^2 + 4 \cdot 6 = 33 \Rightarrow a = \frac{3 \pm \sqrt{33}}{2}, \text{ но } a \geq 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow a = \frac{3 + \sqrt{33}}{2}$$

$$\text{при } a < 0: (-a+2)^2 - a - 4 = (a-2)^2 - a - 4 = 6 \Leftrightarrow a^2 - 5a - 6 = 0 \Leftrightarrow (a-6)(a+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ a = 6 \end{cases}, \text{ но } a < 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = -1$$

Ответ: при $a \in \{-1, \frac{3+\sqrt{33}}{2}\}$

$$* |a|+2 \geq |a|-2 \text{ т.к. } |a|+2 \geq 2$$

$$|a|-2 \leq 2$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА

— ИЗ —

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$23 \cdot 2^x + 2025 = y^2$

$68 + 45 = 113$ $y =$ $K \geq 0$

$23 \cdot 2^x + 45^2 = y^2$ $-45 = 23$ $2^x = 24$ -1

$a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1$ 68 0 0 115

$a^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1$ 1 1

p $23 \cdot 2^{x-1} + 23 \cdot 2^{x-1} + 45^2 = y^2$ $4 \cdot 16$ $1 \cdot 1$

$x \geq 12$ $23 \cdot 2^{x-1} + 23 \cdot 2^{x-1} + 45^2 = y^2$ $5 \cdot 2$

$23 \cdot 2^{x-1} + 23 \cdot 2^{x-1} + 45^2 = y^2$ $6 \cdot 13$

$y^2 - 45^2 = (y+45)(y-45)$

1 32 $22 \cdot 11$ $45^2 + 23 \cdot 2^{x-1}$ $7 \cdot 3$ $y \leq -1$

2 2 $22 \cdot 11$ $45^2 + 23 \cdot 2^{x-1}$ $8 \cdot 18$ 23

4 8 $x = 2k+1$ 46 $9 \cdot 12$

8 16 $23 \cdot 2^{2k+1} + 23 \cdot 45^2 = y^2$ $10 \cdot 8$ $25 \cdot 115$

9 $23 \cdot 2^{2k+1} + 23 \cdot 45^2 = y^2$ $12 \cdot 1$ $11 \cdot 6$

18 36 $23 \cdot 2^{2k+1} + 23 \cdot 45^2 = y^2$ $13 \cdot 0$ $12 \cdot 6$

13 $23 \cdot 2^{2k+1} + 23 \cdot 45^2 = y^2$ $14 \cdot 12$ $13 \cdot 8$

3 6 $(45 + 23 \cdot 2^{2k})^2 + 23 \cdot 2^{x-1} - 23 \cdot 2^{4k-2} = y^2$ $15 \cdot 18$ $14 \cdot 12$

6 12 $(45 + 23 \cdot 2^{2k})^2 + 23 \cdot 2^{x-1} - 23 \cdot 2^{4k-2} = y^2$ $16 \cdot \dots$ $15 \cdot 18$

$23 \cdot 2^x = (y+45)(y-45)$ $23 \cdot 2^x = (y+45)(y-45)$

$y-45$ $\frac{2025}{184} \mid \begin{array}{r} 23 \\ 184 \\ \hline 185 \\ -184 \\ \hline 1 \end{array}$ $\frac{23}{9} \mid \begin{array}{r} 23 \\ 207 \\ \hline 184 \\ \hline 23 \\ -23 \\ \hline 0 \end{array}$ $\frac{20}{8} \mid \begin{array}{r} 23 \\ 184 \\ \hline 184 \\ \hline 0 \end{array}$ $\boxed{\times}$ 23 113

$y \equiv 1$ N $2025 = 23 \cdot 88 + 1$ $47^2 - 45^2 = 2 \cdot 92 = 184$ 70 $70^2 - 45^2 =$

$(n-3) \cdot (n-2) \cdot (n-1)$ $47 + 45 = 92$ $184 \mid \begin{array}{r} 23 \\ 184 \\ \hline 184 \\ \hline 0 \end{array}$ 113 $(68+45) / (68-45)$

$23 \cdot 2^x + 2025 \equiv 1$ $\boxed{y \equiv 1}$ $\pm \sqrt{23 \cdot 2^x + 2025}$ $2 \cdot 92$ 68

$y = y$ $y-45$ $y = 47$ $x = 3$ $2 \cdot 4$

$1 \cdot 46 + 25$ 45

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{array}{r} 17 \\ \times 17 \\ \hline 119 \\ 170 \\ \hline 289 \end{array}$$

$$x = j+k$$

$$y = h + k$$

$$n^2 + 2n + 1 = 23 \cdot 2^k$$

$$y - 45 = 2^k$$

$$33 = 6 \cdot h + b = 0$$

$$\sum_{i=1}^{28} f(i) = 10$$

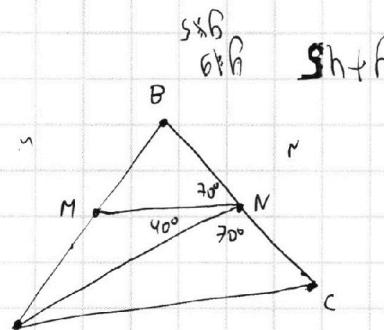
$$y = 45$$

$$a^2 + 3a =$$

$$h - a - h + a + b = 14 - (a + b)$$

$$(h + a) - (2 - x)$$

$$(n-1)! + n! + (n+1)! = (n-1)! \left(n + n(n+1) + 1 \right) = (n-1)! \cdot (n+1)^2$$



$$A |a| + 2 < |a| - 2$$

$$BN \cdot MA = 2BN \cdot NC$$

$$\frac{BN}{BM} = \frac{2EN}{AM}$$

$$-|a| + 2 < |a| + 2 < |a| - 2$$

$$x^2 + y^2 = a^2$$

$$y^2 - 4y - a$$

$$|a| - 2 < |a| + 2$$

$$-a \leq y \leq a$$

$$2|a| > 0$$

$$a > 0$$

$$f(y)$$

$$f(y) = y^2 - 4y - a$$

$$\mathcal{D}f = \mathbb{R}, m_0$$

(8б)

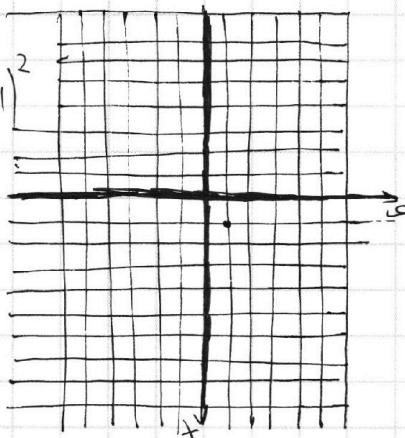
81

$y = f$

$$(sh - 36)(sh + 36)$$

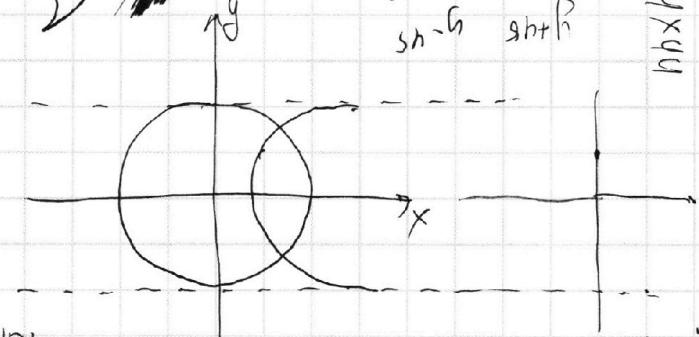
$$\frac{26}{64} x$$

$$\therefore$$



$$sh - 6 \quad sh + 6$$

$$h \times h$$



$$Q = 6$$

$$x^2 + y^2 = 6^2$$

$$y^2 - 4y - a$$

$$y^2 + 6^2$$

$$x^2 + y^2 = 6^2$$

$$(sh - 6)(sh + 6) \quad : 2$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$(n-3)^2 + (n-2)^2 + (n-1)^2 + n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 + (n+3)^2 =$$

$$= 7n^2 + 2(1+4+9) = 7n^2 + 28$$

$$7n^2 = N^5$$

$$2^5 \cdot 7^5$$

$$2^5 \cdot 7$$

$$7^2$$

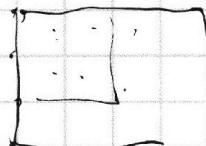
$$2^2 \cdot 7$$

$$7^{10}$$

$$2^{10} \cdot 7^5$$

$$7^{15}$$

$$7$$



$$3 \quad 40 \quad 2 \times 2$$

$$(4-2)(7-2)$$

$$2 \cdot 3$$

$$6068$$

нет

$$y \equiv 1$$

$$y - 45^2 = 23 \cdot 2$$

$$y - 45 \equiv 2$$

$$23$$

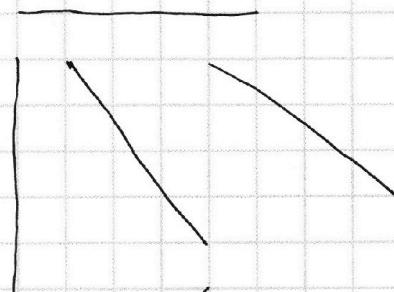
$$(y-45)(y+45) =$$

$\vdots 23$

$$(y-45; y+45) = \frac{y+45}{23}$$

$$(y-45)$$

$$(y-45; 90)$$



$$y - 45 = 2^k$$

$$y + 45 = 2^l \cdot 23$$

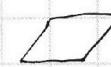
$$\text{НОД}(y-45; y+45) = 2^m$$

$$(y-45; 90) = 2^p$$

$$(91+45)(91-45)$$

$$46$$

$$136 \quad 2 \cdot 3$$



$$90 = 2 \cdot 45$$

$$90 = 2^p \cdot 45$$

$$\begin{array}{r} 369 \\ \times 16 \\ \hline 7269 \\ 369 \\ \hline 5904 \end{array}$$

$$n \geq 1$$

$$n \geq \frac{y+45}{23} \leq y-45$$

$$y+45 \leq 23y - 23 \cdot 45$$

$$45 \cdot 24 \leq 22y$$

$$y \geq \frac{45 \cdot 24}{22} = \frac{45 \cdot 22 + 90}{22} = 45 +$$

$$144 \times 2 \\ 11 \\ 2886$$



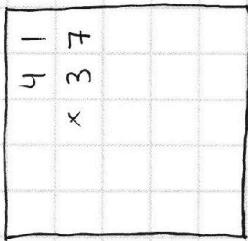


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!



023. $\sqrt{x^2 - x - 2 + 5} \geq |\sqrt{x^2 - x - 2} + x - 1| + |6 - x|$

$$023: x^2 - x - 2 \geq 0 \quad (x - \frac{1}{2})(x + 1) \geq 0 \quad [x \leq -1] \quad [x \geq 2]$$

$$\sqrt{x^2 - x - 2} + x - 1 \geq 0$$

$$\sqrt{x^2 - x - 2} \geq 1 - x \quad \text{при } x \geq 1: \checkmark$$

$$6 \ 0 \ 6 \ 8$$

$$\text{при } x \leq 1: x^2 - x - 2 \geq 1 - 2x + x^2$$

$$+ \ 6 \ 0 \ 4 \ 8$$

$$x \geq 3 \times$$

$$+ \begin{array}{r} 1 \ 2 \ 1 \ 1 \ 6 \\ 8 \ 7 \ 9 \ 0 \end{array}$$

$$20906$$

$$\frac{BN}{BC-BN} = \frac{2BM}{AB-BM}$$

$$BN \cdot AB - BN \cdot BM = 2BM \cdot BC - 2BN \cdot BM$$

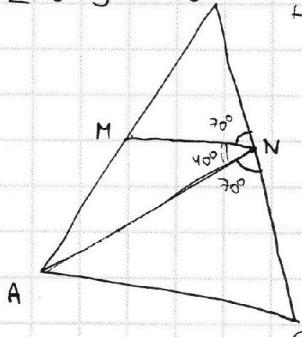
$$BN \cdot AB + BN \cdot BM = 2BN \cdot BC$$

$$BN(AB + BM) = 2BN \cdot BC$$

$$20906B$$

$$\begin{array}{r} 20906 \\ 1600 \\ \hline 22506 \end{array}$$

$$\angle NAC < 40^\circ \Rightarrow \angle A(N) > 70^\circ$$



$$BN \cdot MA = 2BM \cdot NC$$

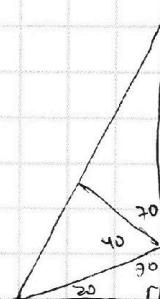
$$\frac{BN}{BM} = \frac{2NC}{AM}$$

$$CN = BC -$$

$$\frac{BN}{NC} = \frac{2BM}{AM} \Rightarrow \frac{BN}{AM} < \frac{BN}{NC}$$

$$\text{значит } AM = AB - BM$$

$$NC = BC - BN$$



$$\begin{array}{r} 44 \ 2 \ 5 \\ - 1 \ 5 \ 1 \\ \hline 0 \ 0 \ 6 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2 \ 6 \ 2 \\ \times 3 \ 6 \\ \hline 2 \ 5 \ 6 \\ 6 \ 0 \ 0 \\ \hline 7 \ 2 \ 0 \ 0 \\ - 1 \ 0 \ 0 \ 0 \\ \hline 5 \ 2 \ 0 \ 0 \end{array}$$