

МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ



## 9 КЛАСС. Вариант 9

1. [3 балла] При каком наименьшем натуральном  $n$  число  $n! + (n+1)! + (n+2)!$  делится на 361?  $\text{тч} \checkmark$

2. [3 балла] Из суммы квадратов пяти последовательных натуральных чисел вычли число 10 и получили куб натурального числа  $N$ , большего 6. Найдите наименьшее возможное значение  $N$ .  $\text{тч} \checkmark$

3. [4 балла] Решите неравенство

$$\left| \sqrt{x^2 - 2x - 3 + 6} \right| \geqslant \left| \sqrt{x^2 - 2x - 3} + 2x - 1 \right| + |7 - 2x|. \quad \text{тч}$$

4. [5 баллов] На координатной плоскости рассматриваются ромбы с длиной стороны 5 такие, что абсциссы и ординаты всех четырёх вершин каждого ромба — целые числа из промежутка  $[1; 50]$ . Сколько существует таких ромбов? Напомним, что квадрат также является ромбом.

5. [5 баллов] Найдите все пары целых чисел  $(x; y)$ , удовлетворяющих уравнению

$$19 \cdot 2^x + 2025 = y^2. \quad \text{тч} \checkmark$$

тч

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых для множества точек плоскости  $Oxy$ , задаваемых уравнением  $x^2 + y^2 = a^2$ , наибольшее значение выражения  $x^2 - 6x + a$  равно 8.  $\text{тч} \checkmark$

7. [6 баллов] На сторонах  $AB$  и  $BC$  треугольника  $ABC$  выбраны точки  $M$  и  $N$  соответственно так, что  $\angle MNB = \angle ANC = 80^\circ$ . Найдите  $\angle CAN$ , если известно, что  $BN \cdot MA = 2BM \cdot NC$ .  $\text{реклама}$

$$\begin{array}{r} 41 \\ \times 47 \\ \hline 287 \\ + 164 \\ \hline 3927 \end{array} \quad \begin{array}{r} 42 \\ \times 46 \\ \hline 252 \\ + 168 \\ \hline 3796 \end{array} \quad \begin{array}{r} 92 \\ \times 44 \\ \hline 376 \\ + 368 \\ \hline 2696 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2025 \\ + 5781 \\ \hline 7806 \end{array} \quad \begin{array}{r} 231 \\ + 5781 \\ \hline 6012 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 11 \\ + 18 \\ \hline 29 \end{array} \quad \begin{array}{r} 14 \\ + 8 \\ \hline 22 \end{array} \quad \begin{array}{r} 4 \\ + 2 \\ \hline 6 \end{array}$$

$$\frac{BN}{NC} = \frac{2BM}{MC}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

Найдем делители числа 361:  $361 = 19^2$

Далее преобразуем данное в условие обратное:

$$n! + (n+1)! + (n+2)! = n! (1 + n + 1 + (n+1)(n+2)) = n! (n+2 + n^2 + n + 2n + 2) = n! (n^2 + 4n + 4) = n! (n+2)^2 = n! (n+2)(n+2)$$

Тогда, так как все это выражение должно быть кратно 19, то необходимо и достаточно того, чтобы два слагаемых были кратны 19 или одно было кратно 361. Рассмотрим все случаи для нахождения наименьшего.

$$1) n! : 361 \Rightarrow n \geq 2 \cdot 19 = 38$$

$$2) (n+2) : 361 \Rightarrow n \geq 359$$

$$3) n! : 19, (n+2) : 19 \Rightarrow \text{из первой строки: } n \geq 19, \text{ из второй:}$$

$$n \geq 17, \text{ то есть итого: } n \geq 19$$

$$4) (n+2) : 19 \text{ и } (n+2) : 19 \Rightarrow n \geq 17$$

Видим, что наименьший случай:  $n \geq 17$ . Если тогда, что минимальное значение ходит для 17

и ответом является число 17 (меньше не может быть, так как упомянуто в условии):

$$17! + 18! + 19! = 17! (1 + 18 + 18 \cdot 19) = 17! (19 + 18 \cdot 19) = 17! \cdot 19^2 = 17! \cdot 361, \text{ что очевидно кратно } 361.$$

Ответ: 17



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                                   | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть минимальное число в полуподательницах -  $(m-2)$

Тогда запишем сумму квадратов пяти последователей чисел.  

$$(m-2)^2 + (m-1)^2 + m^2 + (m+1)^2 + (m+2)^2 = m^2 - 4m + 4 + m^2 + 2m + 1 + m^2 + m^2 + 2m + 1 + m^2 + 4m + 4 = 5m^2 + 10$$

Тогда, мы можем записать уравнение где  $N^3$ :

$N^3 = 5m^2$ . Отсюда получаем, что  $N^3 : 5 \Rightarrow N : 5$ , так как 5 - простое число. Значит  $N^3 : 5^3$  и следовательно  $5m^2 : 5^3 \Rightarrow m^2 : 25$ . Ясно, что минимальное  $N$  равно 5, но такой ответ противоречит условию. Тогда, мы должны увеличить  $N$ , а с этим и  $N^3$  и  $m^2$ . Так как ~~5^2 \* 25~~ данное выше про деление на 5 верно, то для увеличения  $N$  мы должны "дополнить" правую часть на какой-то иуб ~ этот иуб должен содержаться в  $m^2$ , значит это будет уже не иуб, а число в 6 степени (минимально в 6 степени). При этом это число должно быть минимальным (и оно будет не 1). Ясно, что это число пятизначное значит минимально:  $2^6$ . Тогда,  $m^2$  представляет из себя  $5^2 \cdot 2^6$ . Найдем отсюда  $N$ :

$$N^3 = 5 \cdot 5^2 \cdot 2^6 = 5^3 \cdot 2^6 \Rightarrow N = 5 \cdot 2^2 = 20$$

Ответ: 20

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи отдельно.

- |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                                   | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой** из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

Две начала сразу обозначим ограничение для корней:

$$x^2 - 2x - 3 \geq 0. \text{ Решим это неравенство:}$$

Куда:  $x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow D = 4 + 3 \cdot 4 = 16 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{2 \pm 4}{2} = 1 \pm 2 \Rightarrow x_1 = 3, x_2 = -1$ , отсюда  $x^2 - 2x - 3 \geq 0$  при  $\forall x \in (-\infty; -1] \cup [3; +\infty)$  (так как  $a=1, d>0$  то ветви направлены вверх)

Теперь введем рассматриваемое промежутки с помощью метода интервалов:

$$\begin{array}{ccccccc|ccccc} + & + & + & + & + & + & + & + & + & + \\ - & - & - & - & + & + & + & + & + & + \\ + & + & + & + & + & + & + & + & + & + \end{array} \quad \begin{array}{c} \boxed{x^2 - 2x - 3 + 6} \\ \boxed{x^2 - 2x - 3 + 2x - 1} \\ 7 - 2x \end{array}$$

$$1) \sqrt{x^2 - 2x - 3 + 6} \geq 0, 6 \geq 0 \rightarrow \text{их сумма всегда} > 0 \text{ всегда}$$

2)  $\sqrt{x^2 - 2x - 3} \geq 0$ , а  $7 - 2x$  не всегда. Найдем, когда функция становится отрицательной:

$$\sqrt{x^2 - 2x - 3 + 2x - 1} < 0 \Rightarrow \sqrt{x^2 - 2x - 3} < 1 - 2x \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 2x - 3 < (1 - 2x)^2 \\ 1 - 2x > 0 \end{cases}$$

$$x^2 - 2x - 3 < 1 - 4x + 4x^2 \Rightarrow 3x^2 - 2x + 4 > 0.$$

Ветви

$D = 4 - 4 \cdot 4 \cdot 3 < 0 \rightarrow$  нет корней, а  $a=3$ , значит графика параболы направлено вверх и отсюда функция  $y = 3x^2 - 2x + 4$  строится положительно, значит, при  $x < 0,5$  выражение меньше 0.

3) Найдем момент, когда выражение меньше 0:  $7 - 2x < 0 \Rightarrow 7 < 2x \Rightarrow x > 3,5$

Такие же "могут" метода интервалов изображением "ворота"  $\rightarrow$  значение в них дают отрицательное нулю равное выражение  $\rightarrow$  внутри этих "ворот" промежутки не рассматриваются

Теперь, по "могут" видим пересечение нас интервалов (интервал с дополнительным):  $(-\infty; -1]; [3; 3,5], (3,5; +\infty)$

1. Промежуток  $(-\infty; -1]$ . Раскроем модуль:

$$\sqrt{x^2 - 2x - 3 + 6} \geq -\sqrt{x^2 - 2x - 3} - 2x + 1 + 7 - 2x$$

$$2\sqrt{x^2 - 2x - 3} \geq 2 - 4x. \text{ В этом промежутке } 2 - 4x > 0, \text{ поэтому:}$$

$$4x^2 - 4x - 6 \geq 4 - 16x + 16x^2$$

$$12x^2 - 12x + 10 \leq 0$$

$a = 12 \Rightarrow$  ветви параболы направлены вверх

$$D = 144 - 4 \cdot 10 \cdot 12 = -336 < 0, \text{ следовательно функция}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                                   | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

сторо бывшие пись и у первавитва нет решения

2. Промежуток  $[3; 3,5]$ . Решаем методом

$$\sqrt{x^2 - 2x - 3} + 6 \geq \sqrt{x^2 - 2x - 3} + 2x - 1 + 7 - 2x$$

$6 \geq 6 \rightarrow$  верно, значит берем весь этот промежуток.

3. Промежуток  $(3,5; +\infty)$

$$\sqrt{x^2 - 2x - 3} + 6 \geq \sqrt{x^2 - 2x - 3} + 2x - 1 - 7 + 2x$$

$$6 \geq 4x - 8 \Rightarrow 4x \leq 14 \Rightarrow x \leq 3,5$$

Противоречие с введенными промежутками, значит здесь нет решения.

Итако: подходит лишь промежуток  $[3; 3,5]$ . Это и есть итоговый ответ

Ответ:  $[3; 3,5]$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 2

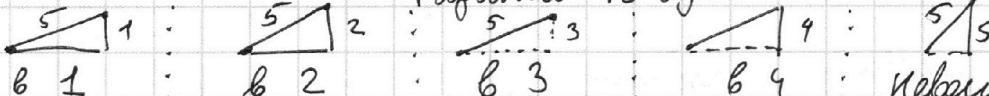
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Рассмотрим, как на координатной плоскости могут располагаться отрезки длиной 5.

1. Параллельно оси абсцис или ординат

2. Теперь уже они пакомят. Будем смотреть разное расположение в координатах по Оy и смотреть, возможно ли это в разных числах для Оx

Различие по Оy:



Будем находить различие по Оx как наименьшее возможное, т.е. ищем разность катетов прямого треугольника

$$\Delta x^2 = 25 - 1 \quad \Delta x = \sqrt{25 - 1} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$$

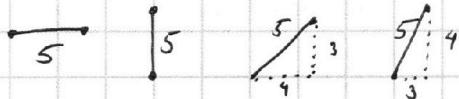
$$\Delta x = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} = 4$$

Противоречие! Противоречие

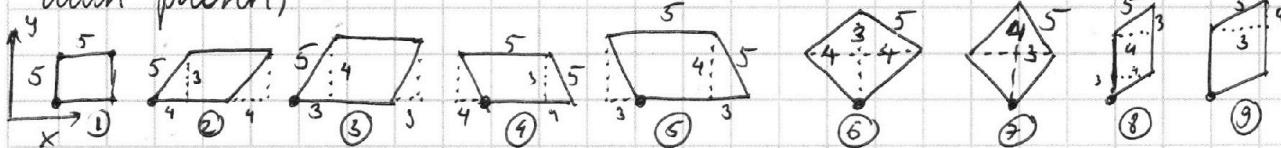
① ②

$\Delta x$ - член

Итак, мы можем составлять разные:



Рассмотрим различные варианты разбивок четырех можно составить: (учитывая то, что у них у противолежащих вершин равны).



Было нечего там как будем нарушать свойства разбивки (заметим, что ② и ④, ③ и ⑤, ⑥ и ⑦, ⑧ и ⑨ — **симметричны**) друг другу. У ①, ⑥, ⑦ такого нет, потому что у них есть две одинаковые симметрии)

Рассмотрим, сколько на координатной плоскости можно расположить каждого фигуры (①, ②, ..., ⑨). В каждой строке будем смотреть за левой нижней вершиной, ведь задача №2 её задание все фигуры типа.

⑦ Куда можно поместить левую нижнюю вершину:

$$Ox: [1; 50 - 5] \Rightarrow [1; 45], Oy: [1; 50 - 5] \Rightarrow [1; 45]$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                                   | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

Знамит всего вариантов:  $45 \cdot 45 = 45^2$ .

② Аналогично, но  $Ox: [1; 50-9] \Leftrightarrow [1; 41]$   
 $Oy: [1; 50-3] \Leftrightarrow [1; 47]$

Знамит всего вариантов 41·47

③ Аналогично, но  $Ox: [1; 50-8] \Leftrightarrow [1; 42]$  } Всего вариантов  
 $Oy: [1; 50-4] \Leftrightarrow [1; 46]$  } 42·46

④ Аналогично, но  $Ox: [1+4; 50-5] \Leftrightarrow [5; 45]$  } Вариантов: 41·47  
 но  $Oy: [1; 50-3] \Leftrightarrow [1; 47]$

⑤ Аналогично, но  $Ox: [1+3; 50-5] \Leftrightarrow [4; 45]$  } Вариантов:  $45^2 \cdot 46$   
 $Oy: [1; 50-4] \Leftrightarrow [1; 46]$

⑥ Аналогично, но  $Ox: [1+4; 50-4] \Leftrightarrow [5; 46]$  } Вариантов 42·49  
 (здесь не идеал  $Oy: [1; 50-6] \Leftrightarrow [1; 44]$  } Вариантов 42·49

помимо, а просто помимо)

⑦ Аналогично ⑥:  $Ox: [1+3; 50-3] \Leftrightarrow [4; 47]$  } Вариантов 44·42  
 $Oy: [1; 50-8] \Leftrightarrow [1; 42]$

⑧ Аналогично:  $Ox: [1; 50-4] \Leftrightarrow [1; 46]$  } Вариантов 46·42  
 $Oy: [1; 50-8] \Leftrightarrow [1; 42]$

⑨ Аналогично:  $Ox: [1; 50-3] \Leftrightarrow [1; 47]$  } Вариантов 47·41  
 $Oy: [1; 50-9] \Leftrightarrow [1; 45]$

Логично, что всего общее количество равно сумме вариантов:

$$X = 45^2 + 41 \cdot 47 + 42 \cdot 46 + 41 \cdot 47 + 40 \cdot 46 + 42 \cdot 44 + 44 \cdot 42 + 46 \cdot 42 + \\ + 47 \cdot 41 = 45^2 + 3 \cdot 41 \cdot 47 + 3 \cdot 42 \cdot 46 + 2 \cdot 42 \cdot 44 = 2025 + 5781 + 5796 + \\ + 2696 = 16298$$

Ответ: 16298



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                                   | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$19 \cdot 2^x + 2025 = y^2$$

3

Рассмотрим выражение по модулю:

$$2^x \equiv y^2 \pmod{3}$$

Какие остатки может давать  $y^2$ :  $\begin{array}{c|cc|c} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ \hline 1 & & y^2 \end{array}$

Значит и  $2^x$  может давать такие остатки. Т.к.  $2 \not\equiv 1 \pmod{3}$ ,  
то  $2^x \not\equiv 1 \pmod{3}$ . Тогда наши остатки могут быть  $x$ ? Тогда получим, что  
 $2 \equiv 2^3 \pmod{3}$ ,  $2^2 \equiv 1 \pmod{3}$ ,  $2^3 \equiv 1 \pmod{3}$ ,  $2^4 \equiv 1 \pmod{3}$  и т.д.

(если рассматриваем наименьшие  $x$  и  $y$ , тогда если они будут ~~простые~~ ~~нечетные~~, условие, но не наименьшие  
то выражение справа будет  $< 1$ , а слева  $> 1$  Противоречие)  
Получаем, что  $x$  - четное.

Далее,  $19 \cdot 2^x \equiv 0 \pmod{2}$ ,  $2025 \equiv 1 \pmod{2} \Rightarrow y \equiv 1 \pmod{2}$ .

Значит,  $y$  четное. Аналогично, и  $y$  не кратно 3, 5, 19,  
так как  $2025 = 45^2$  и не кратно 19.

Перепишем 2025 в другую форму, получим

$$(y-45)(y+45) = 19 \cdot 2^x$$

Используя одно из свойств деления быть кратна 19.

А также, обе скобки кратны 2. Таким образом, сумма степеней двойки, на которых кратны скобки равна двум. Обе скобки могут быть кратны только 19 и 2.

1) Пусть  $y-45 \equiv 19 \pmod{2}$ , тогда  $y-45 = 19 \cdot 2^a$

$$y+45 = 2^b$$

Используя  $b > a$ ,  $y = 2^b - 45$

$$2^b - 45 - 45 = 19 \cdot 2^a$$

$$2^b - 90 = 19 \cdot 2^a$$

$$2^a(19 - 2^{b-a}) = -90$$

$$2^a(2^{b-a} - 19) = 90 = 45 \cdot 2 = 3 \cdot 5 \cdot 2^a$$

Очевидно,  $a=1$ ,  $2^{b-1} - 19 = 45$

$$2^{b-1} = 64 \Rightarrow b-1 = 6 \Rightarrow b = 7$$

Тогда,  $x = a+b = 8$ ,  $y = 128 - 45 = 83$

Получаем  $(8; 83)$

2) Пусть  $y+45 \equiv 19 \pmod{2}$ , тогда  $y+45 = 19 \cdot 2^a$

$$y-45 = 2^b$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$y = 2^b + 45 \Rightarrow 2^b + 90 = 19 \cdot 2^a$$

~~значит~~, то

$$19 \cdot 2^a - 2^b = 90$$

Пусть  $a < b$ , тогда:  $2^a(19 - 2^{b-a}) = 5 \cdot 9 \cdot 2$

Отсюда  $a=1$ ,  $19 - 2^{b-1} = 45$ . Противоречие ( $2^{b-1} > 0$ )

Тогда  $b < a$ , тогда  $2^b(19 \cdot 2^{a-b} - 1) = 90 = 5 \cdot 9 \cdot 2$

Отсюда, ~~значит~~  $b=1$ , а  $19 \cdot 2^{a-1} - 1 = 45$

$$19 \cdot 2^{a-1} = 46$$

ЧГ: 19 поэтому это уравнение не имеет решений.

Итак получаем один ответ:  $(8; 83)$

Ответ:  $(8; 83)$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

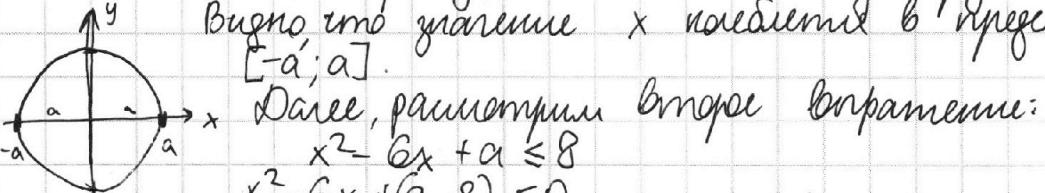
- |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                                   | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Ясно, что  $x^2 + y^2 = a^2$  - это уравнение окружности с центром в точке  $O$  (начало координат) и с радиусом  $a$ . Очевидно, что  $a \geq 0$  (иначе та же окружность не имеет смысла). Нарисуем схематично эту окружность.

Видно, что значение  $x$  лежит в промежутке  $[-a; a]$ .



Далее, решим второе неравенство:

$$x^2 - 6x + a \leq 8$$

$$x^2 - 6x + (a - 8) \leq 0$$

$$\Delta = 36 - 4(a - 8) = 68 - 4a = 4(17 - a)$$

Нули функции при:  $x = \frac{6 \pm 2\sqrt{17-a}}{2}$  или:  $x_1 = \frac{3 \pm \sqrt{17-a}}{2}$ ,  $x_2 = \frac{3 - \sqrt{17-a}}{2}$

Тогда решениями неравенства будут являться:

(Ветви параболы вверх, т.е.  $a = 1, 1 > 0$ )

$$x \in [3 - \sqrt{17-a}; 3 + \sqrt{17-a}]$$

Очевидно понятно, что для выполнения условия необходимо, чтобы оба корня  $[3 - \sqrt{17-a}, 3 + \sqrt{17-a}]$  содержали в себе оба корня  $[-a; a]$ . Очевидно получаем неравенства:

$$\begin{cases} 3 - \sqrt{17-a} \leq -a \\ 3 + \sqrt{17-a} \geq a \end{cases} \quad \begin{cases} \sqrt{17-a} \geq a+3 \\ \sqrt{17-a} \geq a-3 \end{cases} \quad \begin{cases} 17-a \geq a^2 + 6a + 9 \\ 17-a \geq a^2 - 6a + 9 \end{cases} \quad \begin{cases} 17-a \geq 0 \end{cases}$$

$$1) 17-a \geq a^2 + 6a + 9$$

$$a^2 + 7a - 8 \leq 0, \quad \Delta = 49 + 4 \cdot 8 = 9^2$$

$$a = \frac{-7 \pm 9}{2} \Rightarrow a_1 = 1, a_2 = -8$$



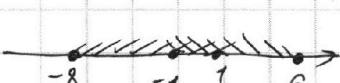
$$a \in [-8; 1]$$

$$2) 17-a \geq a^2 - 6a + 9 \Rightarrow a^2 - 5a - 8 \leq 0 \Rightarrow \Delta = 25 + 4 \cdot 8 = 7^2$$

$$a_{1,2} = \frac{5 \pm 7}{2}, \quad a_1 = 6, a_2 = -1$$

$$3) 17-a \geq 0 \Rightarrow a \leq 17$$

Объединяем



$$a \in [-1; 1]$$

Но также  $a \geq 0 \Rightarrow a \in [0; 1]$

Ответ:  $[0; 1]$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

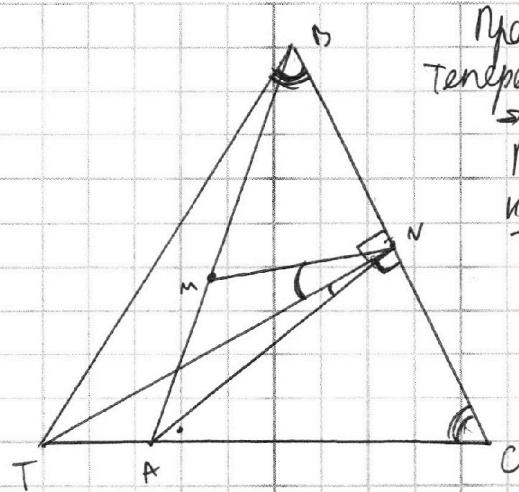
5

6

7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Проведем биссектрису угла  $MNA$ .  
Теперь  $\angle MNT = 10^\circ \Rightarrow \angle BNT = 90^\circ \Rightarrow$   
 $\angle TMC = 90^\circ$

Пусть биссектриса ~~угла~~ угла пересечения  $AC$  в точке  $T$ .

Теперь из  $BN \cdot MA = 2BM \cdot NC$

$$\frac{BN}{2BM} = \frac{NC}{MA}$$

В  $\triangle BTC$   $TN$ - биссектриса, значит

$$\frac{BN}{BT} = \frac{NC}{TC}$$

$$\frac{BT}{2BM} = \frac{TC}{MA}$$

Из этих двух выражений:  $\frac{2BM}{2BM} = \frac{TC}{MA} \Rightarrow$   
 $\operatorname{ctg} \angle C = NC/TC = \operatorname{ctg} \angle TB\bar{N} \Rightarrow \angle C = \angle TB\bar{N}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{array}{r}
 3 \quad 956 \\
 2 \quad 1664, 256, 1024, 4096 \text{ и т.д.} \\
 \times 16 \\
 \hline
 64 \\
 \times 9 \\
 \hline
 256 \\
 1 \\
 + 95 \\
 \hline
 64
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 y + 45 = 256 \Rightarrow y = 211, 211 - 45 = 166 \\
 y + 45 = 1024 \Rightarrow y = 979 \\
 - 45 \\
 \hline
 579
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 211 \\
 - 45 \\
 \hline
 166 \\
 - 128 \\
 \hline
 38
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 166 \\
 - 128 \\
 \hline
 38
 \end{array}$$

$$19 \cdot 2^3 + 2025 = 822$$

$$\widehat{26} = 12$$

$$\begin{array}{r}
 1 \quad 93 \\
 \times 63 \\
 \hline
 129 \\
 172 \\
 \hline
 1849
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 2 \quad 83 \\
 \times 83 \\
 \hline
 245 \\
 664 \\
 \hline
 6889
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 4864 \\
 - 4 \\
 \hline
 1216 \\
 24 \\
 \hline
 12 \\
 16 \\
 \hline
 304 \\
 28 \\
 \hline
 24 \\
 76
 \end{array}$$

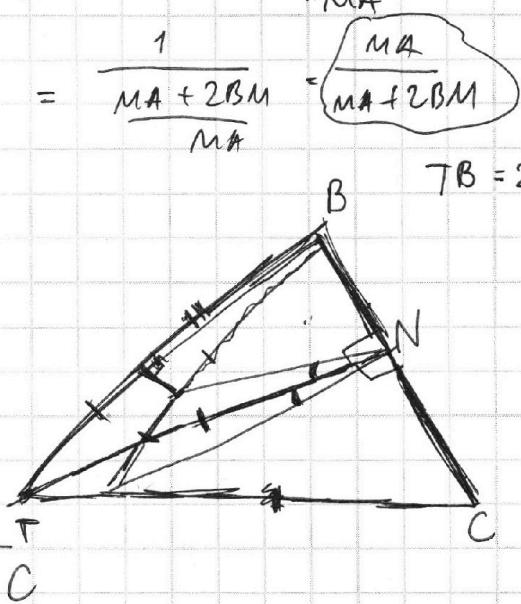
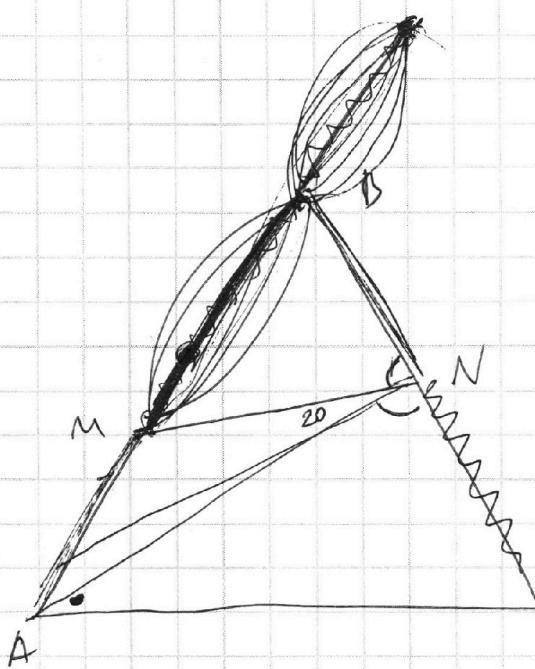
$$76 = 4$$

$$6, 10, 15, 20, \frac{25}{34}$$

$$\frac{BN \cdot MA}{2} = BM \cdot NC \Rightarrow \frac{BN}{MC} = \frac{2BM}{MA}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{BN}{BN+NC} &= \frac{BAJ}{BAJ + 2BM \cdot BN} = \frac{1}{1 + \frac{2BM}{MA}} = \\
 &= \frac{1}{\frac{MA + 2BM}{MA}} = \frac{MA}{MA + 2BM}
 \end{aligned}$$

$$TB = 2BM$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1      2      3      4      5      6      7      СТРАНИЦА  
\_\_\_\_\_ из \_\_\_\_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1

2

3

4

5

1

1

СТРАНИЦА  
— ИЗ —

1

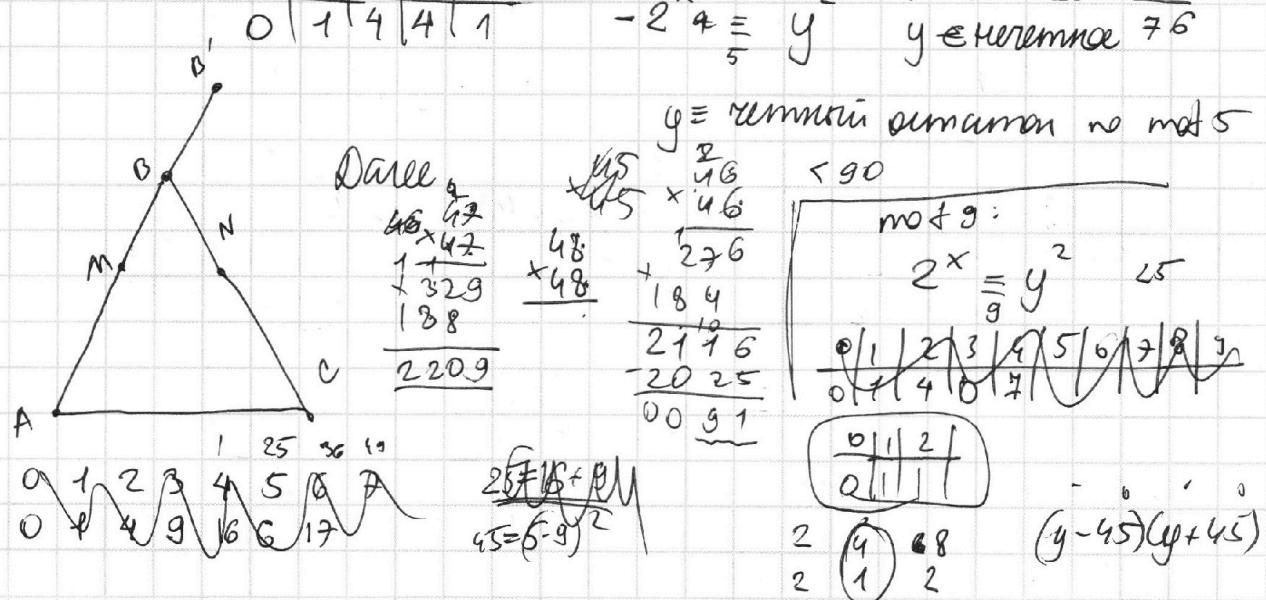
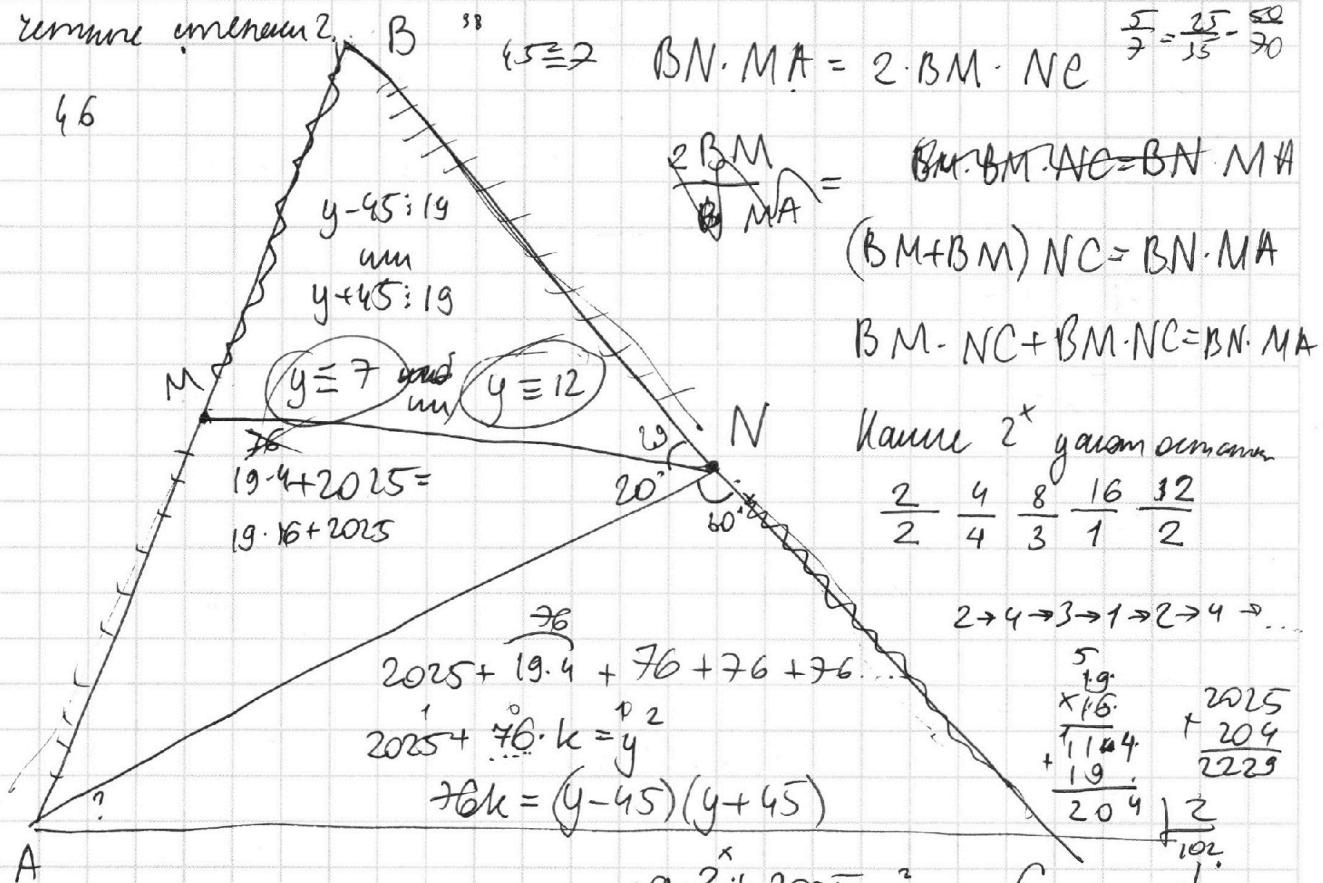


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- |                            |                            |                                       |                            |                                       |                            |                                       |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|---------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input checked="" type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input checked="" type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|---------------------------------------|

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$y \equiv$  четный остаток по мод 5

$2^x \equiv y^2 \pmod{5}$

$2^0 \equiv 1 \pmod{5}$

$2^1 \equiv 2 \pmod{5}$

$2^2 \equiv 4 \pmod{5}$

$2^3 \equiv 3 \pmod{5}$

$2^4 \equiv 1 \pmod{5}$

$2^0 \equiv 1 \pmod{5}$

$2^1 \equiv 2 \pmod{5}$

$2^2 \equiv 4 \pmod{5}$

$2^3 \equiv 3 \pmod{5}$

$2^4 \equiv 1 \pmod{5}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

Ограничение с центром  $B(0)$  и радиусом  $a$

$$x^2 - 6x + a \leq 8$$

$$x^2 - 6x + (a-8) \leq 0$$

$$\Delta = 36 - 4(a-8) = 36 - 4a + 32 = 68 - 4a \geq 0$$

$$x \in (-\infty, 2a+4] \quad x \in [2a-a, a]$$

$$x_1 = \frac{6 \pm 2\sqrt{17-a}}{2} = 3 \pm \sqrt{17-a}$$

$$\begin{array}{c} 1 \\ \hline 3 \\ \hline 3 \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} 1 \\ \hline 3 \\ \hline 3 \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} \frac{1}{2} \\ \hline \frac{3}{2} \\ \hline 3 \end{array}$$

$$\begin{cases} 3 + \sqrt{17-a} \geq a \\ 3 - \sqrt{17-a} \leq -a \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{17-a} \geq a-3 \\ \sqrt{17-a} \geq a+3 \end{cases}$$

$$a \leq 17 : \quad 17-a \geq (a+3)^2$$

$$17-a \geq a^2 + 6a + 9$$

$$a^2 + 7a - 8 \leq 0$$

$$\Delta = 49 + 4 \cdot 8 = 9^2$$

$$a = \frac{-7 \pm 9}{2} \quad a_1 = -8, a_2 = 1$$

$$[1; -8]$$

$$19 \cdot 2^x + 2025 = y^2$$

$$\begin{array}{r} 34 \\ -18 \\ \hline 16 \end{array} \quad \begin{array}{r} 25 \\ -18 \\ \hline 7 \end{array}$$

$$(y-45)(y+45) = 19 \cdot 2^x$$

$$a = \Delta = 1 + 4 \cdot 16$$

$$34 - 2a \geq 2a^2 + 18$$

$$34 - a \geq a^2 + 18 \quad \leftarrow$$

$$2025 + 19$$

$$\begin{array}{l} \sqrt{x^2 + y^2} = a - 1 \\ x^2 - 6x \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 38 \\ 7 \\ \hline 7 \end{array}$$

$$a^2 + a - 16 \geq 0$$

$$19 \cdot 2^x = y^2 - 45^2$$

$$19 \cdot 2^x + 2025 = y^2 \Rightarrow (y-45)(y+45) = 19 \cdot 2^x \quad \cancel{17+19}$$

$$\text{II) } y-45 : 19 \Rightarrow y = 19k + 45 \Rightarrow y \equiv 7 \pmod{19} \quad y \rightarrow \text{четное}$$

$$y \equiv 7 \pmod{19} \quad y = 26, y = 45, y = 5, y = 3 \quad \cancel{17+19}$$

$$\begin{array}{r} 19 \cdot 2^x \\ 45 \\ \hline 57 \end{array} \quad \begin{array}{r} 45 \cdot 19 \\ 57 \\ \hline 57 \end{array} \quad \begin{array}{r} 64 \\ 19 \\ \hline 45 \end{array} \quad \begin{array}{r} 64 \\ 19 \\ \hline 45 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 256 \\ 384 \\ \hline 4096 \end{array} \quad \begin{array}{r} 19 \\ 45 \\ \hline 503 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 6096 \\ -2025 \\ \hline 4071 \end{array} \quad \begin{array}{r} 19 \\ 109 \\ \hline 171 \end{array} \quad \begin{array}{r} 25600 \\ -2025 \\ \hline 23575 \end{array} \quad \begin{array}{r} 9 \\ 0 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 153 \\ 160 \\ \hline 153 \\ -153 \\ \hline 65 \\ 153 \\ \hline 0 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1      2      3      4      5      6      7

СТРАНИЦА  
— ИЗ —

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



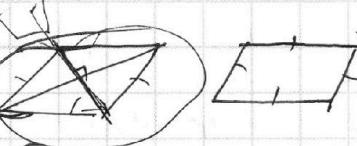
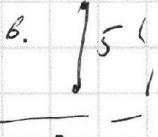
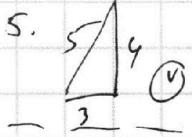
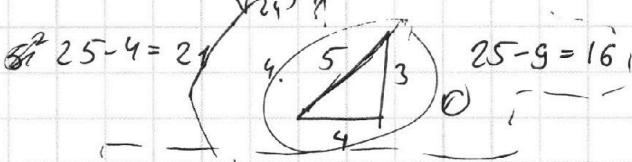
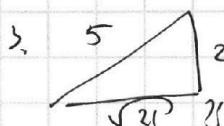
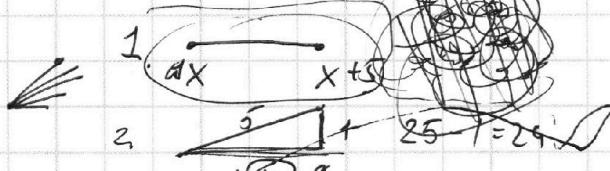
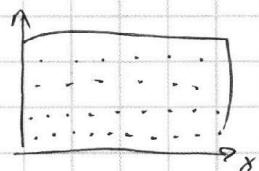
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                                       |                                       |                                       |                                       |                                       |                                       |                                       |
|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|
| <input checked="" type="checkbox"/> 1 | <input checked="" type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input checked="" type="checkbox"/> 4 | <input checked="" type="checkbox"/> 5 | <input checked="" type="checkbox"/> 6 | <input checked="" type="checkbox"/> 7 |
|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 - 2x - 3} + 2x - 1 < 0 &\Rightarrow \sqrt{x^2 - 2x - 3} < 1 - 2x \\ x^2 - 2x - 3 &< 1 - 4x + 4x^2 \Rightarrow 3x^2 - 2x + 4 > 0 \quad D = 4 - 4 \cdot 3 \cdot 3 < 0, \text{ значит не имеет} \\ \text{пучей и } a > 1 &\rightarrow \text{стандартно дальше} \quad \text{0+} \quad \boxed{x \leq 0,5} \end{aligned}$$



$$19 \cdot 2^x + 2025 = y^2 \Rightarrow (y-45)(y+45) = 19 \cdot 2^x$$

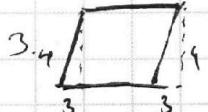
Квадратик: правее плюсше левое:  $[1; 45]$   
вариантов тогда:  $45^2 = 2025$



левое плюсше:  $[45; 0]$  по  $Ox: [45; 45], Oy: [1; 47]$

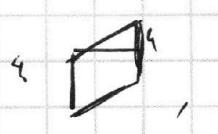
вариантов:  $41 \cdot 47$

$$Ox: [1; 41], Oy: [1; 47] \quad \left. \begin{array}{l} \text{вариантов: } 41 \cdot 47 \\ 2 \cdot 41 \cdot 47 \end{array} \right\}$$



вариантов:  $Ox: [1; 42], Oy: [1; 46]$

вариантов:  $2 \cdot 42 \cdot 46$



(+)

