



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 9



1. [3 балла] При каком наименьшем натуральном n число $n! + (n+1)! + (n+2)!$ делится на 361? ТЧ (✓)

2. [3 балла] Из суммы квадратов пяти последовательных натуральных чисел вычли число 10 и получили куб натурального числа N , большего 6. Найдите наименьшее возможное значение N . ТЧ (✓)

3. [4 балла] Решите неравенство

$$\underbrace{\sqrt{x^2 - 2x - 3} + 6}_{\geq 0} \geq \underbrace{\sqrt{x^2 - 2x - 3} + 2x - 1}_{\geq 0} + |7 - 2x|.$$

ТЧ (✓)

4. [5 баллов] На координатной плоскости рассматриваются ромбы с длиной стороны 5 такие, что абсциссы и ординаты всех четырёх вершин каждого ромба — целые числа из промежутка $[1; 50]$. Сколько существует таких ромбов? Напомним, что квадрат также является ромбом. КОМБА (✓)

5. [5 баллов] Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющих уравнению

$$19 \cdot 2^x + 2025 = y^2.$$

ТЧ (✓)

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при каждом из которых для множества точек плоскости Oxy , задаваемых уравнением $x^2 + y^2 = a^2$, наибольшее значение выражения $x^2 - 6x + a$ равно 8. ТЧ (✓)

7. [6 баллов] На сторонах AB и BC треугольника ABC выбраны точки M и N соответственно так, что $\angle MNB = \angle ANC = 80^\circ$. Найдите $\angle CAN$, если известно, что $BN \cdot MA = 2BM \cdot NC$. РЕЗУЛТАТ (✓)

$$\begin{array}{r} 41 \\ \times 47 \\ \hline 287 \\ + 1640 \\ \hline 1927 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 221 \\ 2025 \\ + 5781 \\ \hline 5796 \\ 2696 \\ \hline 16298 \end{array}$$

$$\frac{11}{29} \quad \frac{14}{22} \quad + \frac{4}{6}$$

$$\frac{BN}{NC} = \frac{2BM}{MA}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Найдем делители числа 361: $361 = 19^2$

Далее преобразуем данное в условия выражение:

$$n! + (n+1)! + (n+2)! = n! (1 + n + 1 + (n+1)(n+2)) = n! (n+2 + n^2 + n + 2n + 2) = n! (n^2 + 4n + 4) = n! (n+2)^2 = n! (n+2)(n+2)$$

Тогда, так как все это выражение должно быть кратно 19, то необходимо и достаточно того, чтобы два множителя были кратны 19 или одно было кратно 361. Разберем все случаи для нахождения наименьшего.

1) $n! : 361 \Rightarrow n \geq 2 \cdot 19 = 38$

2) $(n+2) : 361 \Rightarrow n \geq 359$

3) $n! : 19, (n+2) : 19 \Rightarrow$ из первой условия: $n \geq 19$, из второй: $n \geq 17$, то есть итог: $n \geq 19$

4) $(n+2) : 19$ и $(n+2) : 19 \Rightarrow n \geq 17$

Видим, что наименьший случай: $n \geq 17$. Ясно тогда, что минимальное значение хотя бы 17

А ответом является число 17 (меньше не может быть, как доказано в условии):

$$17! + 18! + 19! = 17! (1 + 18 + 18 \cdot 19) = 17! (19 + 18 \cdot 19) = 17! \cdot 19^2 = 17! \cdot 361, \text{ что очевидно кратно } 361.$$

Ответ: 17



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть минимальное число в последовательности - $(m-2)$
Тогда запишем сумму квадратов пяти последоват. чисел.
 $(m-2)^2 + (m-1)^2 + m^2 + (m+1)^2 + (m+2)^2 = m^2 - 4m + 4 + m^2 - 2m + 1 + m^2 + m^2 + 2m + 1 + m^2 + 4m + 4 = 5m^2 + 10$
Тогда, мы можем записать уравнение где N^3 :
 $N^3 = 5m^2$. Отсюда, понятно, что $N^3 : 5 \Rightarrow N : 5$, так как 5 - простое число. Значит в $N^3 : 5^3$ и следовательно $5m^2 : 5^3 \Rightarrow m^2 : 25$. Ясно, что минимальное N равно 5, но такой ответ противоречит условию. Тогда, мы должны увеличить N , а с ним и N^3 и m^2 . Так как $m^2 : 25$ - это доказанное выше про делиться на 5 верно, то для увеличения N мы должны "дополнить" правую часть на какой-то куб $\rightarrow$ этот куб должен содержаться в m^2 , значит это будет уже не куб, а число в 6 степени (минимум в 6 степени). При этом это число должно быть минимальным (и obviously не 1). Ясно, что это число почитаемым значит минимум: 2^6 . Тогда, m^2 представляет из себя $5^2 \cdot 2^6$. Найдем отсюда N :
 $N^3 = 5 \cdot 5^2 \cdot 2^6 = 5^3 \cdot 2^6 \Rightarrow N = 5 \cdot 2^2 = 20$

Ответ: 20



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

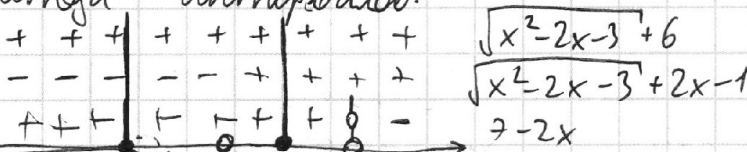
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Для начала сразу обозначим направление для корня:

$$x^2 - 2x - 3 \geq 0. \text{ Решим это неравенство:}$$

Найдем: $x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow D = 4 + 3 \cdot 4 = 16 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{2 \pm 4}{2} = 1 \pm 2 \Rightarrow x_1 = 3, x_2 = -1$,
отсюда $x^2 - 2x - 3 \geq 0$ при $x \in (-\infty; -1] \cup [3; +\infty)$ (так как $a = 1, 1 > 0$, то ветви направлены вверх)

Теперь введем рассматриваемые промежутки с помощью метода интервалов:



1) $\sqrt{x^2 - 2x - 3} \geq 0$; $6 \neq 0 \Rightarrow$ их сумма ~~тогда~~ > 0 всегда

2) $\sqrt{x^2 - 2x - 3} \geq 0$, а $2x - 1$ не всегда. Найдем, когда функция становится отрицательной:

$$\sqrt{x^2 - 2x - 3} + 2x - 1 < 0 \Rightarrow \sqrt{x^2 - 2x - 3} < 1 - 2x \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 2x - 3 < (1 - 2x)^2 \\ 1 - 2x > 0 \Rightarrow x < 0.5 \end{cases}$$

$$x^2 - 2x - 3 < 1 - 4x + 4x^2 \Rightarrow 3x^2 - 2x + 4 > 0$$

ветви

$D = 4 - 4 \cdot 4 \cdot 3 < 0 \Rightarrow$ нет корней, а $a = 3$, значит графика параболы направлены вверх и отсюда функция $y = 3x^2 - 2x + 4$ строго положительна, значит, при $x < 0.5$ выражение меньше 0.

3) Найдем момент, когда выражение меньше 0: $7 - 2x < 0 \Rightarrow 7 < 2x \Rightarrow x > 3.5$

Таким же образом "метод интервалов" обратим "ворота" $\Rightarrow$ значения в них дают отрицательное значение выражения $\Rightarrow$ внутри этих "ворот" промежутки не рассматриваются.

Теперь, по "методу" выделим интересующие нас интервалы (интервалы с знаменитостями): $(-\infty; -1]$; $[3; 3.5]$, $(3.5; +\infty)$

1. Промежутки $(-\infty; -1]$. Раскроем модуль:

$$\sqrt{x^2 - 2x - 3} + 6 \geq -\sqrt{x^2 - 2x - 3} - 2x + 1 + 7 - 2x$$

$$2\sqrt{x^2 - 2x - 3} \geq 2 - 4x. \text{ В этом промежутке } 2 - 4x > 0, \text{ поэтому:}$$

$$4x^2 - 4x - 6 \geq 4 - 16x + 16x^2$$

$$12x^2 - 12x + 10 \leq 0$$

$a = 12 \Rightarrow$ ветви параболы направлены вверх

$$D = 144 - 4 \cdot 10 \cdot 12 = -336 < 0, \text{ следовательно функция}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

строю больше нуля и у неравенства нет решений.

2. Проинтервал $[3; 3,5]$. Расширим могут

$$\sqrt{x^2 - 2x - 3} + 6 \geq \sqrt{x^2 - 2x - 3} + 2x - 1 + 7 - 2x$$

$6 \geq 6 \rightarrow$ верно, значит берем весь этот проинтервал.

3. Проинтервал $(3,5; +\infty)$

$$\sqrt{x^2 - 2x - 3} + 6 \geq \sqrt{x^2 - 2x - 3} + 2x - 1 - 7 + 2x$$

$$6 \geq 4x - 8 \Rightarrow 4x \leq 14 \Rightarrow x \leq 3,5$$

Противоречие с взятым проинтервалом, значит здесь нет решений.

Итого: подходит лишь проинтервал $[3; 3,5]$. Это и есть итоговый ответ

Ответ: $[3; 3,5]$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

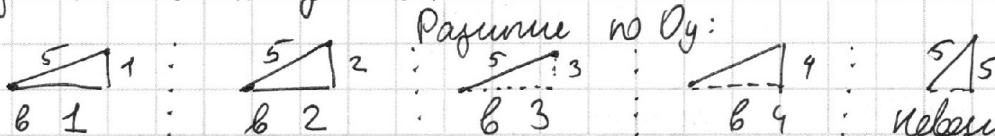
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Рассмотрим, как на координатной плоскости могут располагаться отрезки длиной 5.

1. Параллельно оси абсцисс или ординат
2. Теперь уже они наклонены. Будем смотреть разное раз-
личие в координатах по Oy и смотреть, возможно ли это в
целых числах для Ox

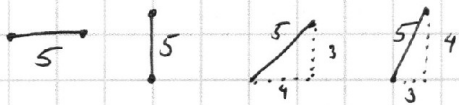


Будем находить различие по Ox как на- или равно 5, т.е. имеем
мет прямоугольного треугольника $\geq$ гипотенузы

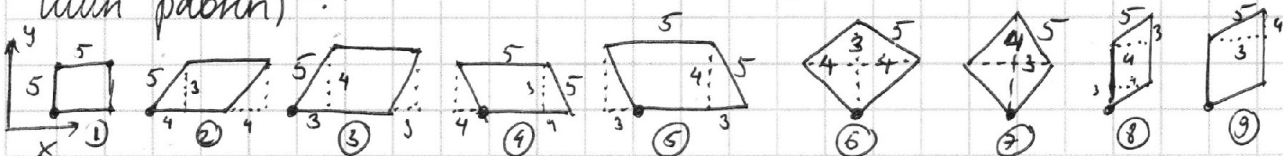
$$\Delta x^2 = 25 - 1 \quad ; \quad \Delta x = \sqrt{25 - 4} = 3 \quad ; \quad \Delta x = \sqrt{25 - 9} = 4 \quad ; \quad \Delta x = \sqrt{25 - 16} = 3$$

Противоречие! Противоречие
 Δx - целое

Итого мы можем составить ромб из:



Рассмотрим различные варианты ромбов, которых можно
составить: (учитывая то, что углы у противоположных вер-
шин равны).



Большее число так как будет нарушаться свойство
ромба (заметьте, что ② и ④, ③ и ⑤, а также ⑧ и ⑨
дву-дву. У ①, ⑥, ⑦ такое нет, потому что у них есть
все эти свойства)

Рассмотрим, сколько на координатной плоскости можно
разместить каждый фигуру (①, ②, ..., ⑨). В каждой фигуре
будем считать за левую нижнюю вершину, ведь задав
ее задание все фигура типа.

① Куда можно поместить левую нижнюю вершину:
 $Ox: [1; 50 - 4.5] \Rightarrow [1; 45.5]$, $Oy: [1; 50 - 5] \Rightarrow [1; 45]$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☐3
☐4
☒5
☐6
☐7
☐СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Знаем всего вариантов: $45 \cdot 45 = 45^2$

② Аналогично, по $Ox: [1; 50-9] \Leftrightarrow [1; 41]$

$Oy: [1; 50-3] \Leftrightarrow [1; 47]$

Знаем всего вариантов $41 \cdot 47$

③ Аналогично, по $Ox: [1; 50-8] \Leftrightarrow [1; 42]$ } Всего вариантов
 $Oy: [1; 50-4] \Leftrightarrow [1; 46]$ } $42 \cdot 46$

④ Аналогично, по $Ox: [1+4; 50-5] \Leftrightarrow [5; 45]$ } Вариантов: $41 \cdot 47$
по $Oy: [1; 50-3] \Leftrightarrow [1; 47]$ }

⑤ Аналогично, по $Ox: [1+3; 50-5] \Leftrightarrow [4; 45]$ } Вариантов: 45^2
 $Oy: [1; 50-4] \Leftrightarrow [1; 46]$ }

⑥ Аналогично, по $Ox: [1+4; 50-4] \Leftrightarrow [5; 46]$ } Вариантов $42 \cdot 44$
Здесь не целые $Oy: [1; 50-6] \Leftrightarrow [1; 44]$ }

⑦ Аналогично ⑥: $Ox: [1+3; 50-3] \Leftrightarrow [4; 47]$ } Вариантов $44 \cdot 42$
 $Oy: [1; 50-8] \Leftrightarrow [1; 42]$ }

⑧ Аналогично: $Ox: [1; 50-4] \Leftrightarrow [1; 46]$ } Вариантов $46 \cdot 42$
 $Oy: [1; 50-8] \Leftrightarrow [1; 42]$ }

⑨ Аналогично: $Ox: [1; 50-9] \Leftrightarrow [1; 41]$ } Вариантов $47 \cdot 41$
 $Oy: [1; 50-3] \Leftrightarrow [1; 47]$ }

Получно, что всего - общее количество равно сумме вариантов:

$$x = 45^2 + 41 \cdot 47 + 42 \cdot 46 + 41 \cdot 47 + 45^2 + 42 \cdot 44 + 44 \cdot 42 + 46 \cdot 42 + 47 \cdot 41 = 45^2 + 3 \cdot 41 \cdot 47 + 3 \cdot 42 \cdot 46 + 2 \cdot 42 \cdot 44 = 2025 + 5781 + 5796 + 2696 = 16298$$

Ответ: 16298



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$19 \cdot 2^x + 2025 = y^2$$

Рассмотрим выражение по модулю 3:

$$2^x \equiv y^2 \pmod{3}$$

Какие остатки может давать y^2 :

$$\begin{array}{r|rr} 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 1 & 1 \end{array} \begin{array}{l} y \\ y^2 \end{array}$$

Значит 2^x может давать такие остатки. Т.е. $2^x \equiv 1 \pmod{3}$. Тогда какими может быть x ? Только четным, т.е. $2^2 \equiv 1, 2^4 \equiv 1, 2^6 \equiv 1, 2^8 \equiv 1$ и т.д.

(или рассматриваем натуральности x и y , так как если они будут ~~противоположными~~ целыми, но не натуральными, то выражение справа будет < 1 , а слева > 1 Противоречие)

Попробуем, что x — четное.

$$\text{Далее, } 19 \cdot 2^x \equiv 0 \pmod{2}, 2025 \equiv 1 \pmod{2} \Rightarrow y \equiv 1 \pmod{2}$$

Значит, y нечетное. Аналогично, y не кратно 3, 5, 19, так как $2025 = 45^2$ и не кратно 19.

Перенесем 2025 в другую часть, получим

$$(y-45)(y+45) = 19 \cdot 2^x$$

Значит, одна из скобок должна быть кратна 19.

А также, обе скобки кратны 2. Также, сумма степеней двоек, на которые кратны скобки равна x . Обе скобки могут быть кратны только 19 и 2.

$$1) \text{ Пусть } y-45: 19, \text{ тогда } y-45 = 19 \cdot 2^a$$

$$y+45 = 2^b$$

Значит, $b > a$.

$$y = 2^b - 45$$

$$2^b - 45 - 45 = 19 \cdot 2^a$$

$$2^b - 90 = 19 \cdot 2^a$$

$$2^a(19 - 2^{b-a}) = -90$$

$$2^a(2^{b-a} - 19) = 90 = 45 \cdot 2 = 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2$$

$$\text{Отсюда, } a = 1, 2^{b-1} - 19 = 45$$

$$2^{b-1} = 64 \Rightarrow b-1 = 6 \Rightarrow b = 7$$

$$\text{Тогда, } x = a + b = 8, y = 128 - 45 = 83$$

Получаем (8; 83)

$$2) \text{ Пусть } y+45: 19, \text{ тогда } y+45 = 19 \cdot 2^a$$

$$y-45 = 2^b$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☒

6
☒

7
☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$y = 2^b + 45 \Rightarrow 2^b + 90 = 19 \cdot 2^a$$

~~или~~ $19 \cdot 2^a - 2^b = 90$

Пусть $a < b$, тогда: $2^a(19 - 2^{b-a}) = 5 \cdot 9 \cdot 2$

Отсюда $a = 1$, $19 - 2^{b-1} = 45$. Противоречие ($2^{b-1} > 0$)

Тогда $b < a$, тогда $2^b(19 \cdot 2^{a-b} - 1) = 90 = 5 \cdot 9 \cdot 2$

Отсюда, ~~то~~ $b = 1$, а $19 \cdot 2^{a-1} - 1 = 45$

$$19 \cdot 2^{a-1} = 46$$

46: 19, потому это уравнение не имеет решений.

Итого получаем один ответ: (8; 83)

Ответ: (8; 83)

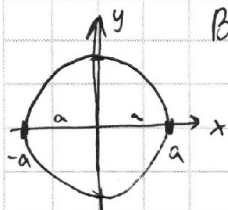


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☐3
☐4
☐5
☐6
☒7
☐СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Ясно, что $x^2 + y^2 = a^2$ — это уравнение окружности с центром в точке O (начало координат) и с радиусом a . Отсюда очевидно, что $a \geq 0$ (иначе такая окружность не имеет смысла). Нарисуем схематично эту окружность.



Видно, что значение x принадлежит в пределах: $[-a; a]$.

Далее, решим второе уравнение:

$$x^2 - 6x + a \leq 8$$

$$x^2 - 6x + (a - 8) \leq 0$$

$$D = 36 - 4(a - 8) = 68 - 4a = 4(17 - a)$$

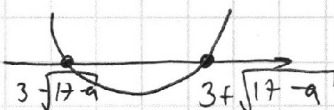
Нули функции при: $x = \frac{6 \pm \sqrt{4(17-a)}}{2}$ и $x_2 = \frac{6 - 2\sqrt{17-a}}{2}$

или: $x_1 = 3 + \sqrt{17-a}$ и $x_2 = 3 - \sqrt{17-a}$

Тогда решениями неравенства будут значения:

(ветви параболы вверх, т.е. $a = 1, 1 > 0$)

$$x \in [3 - \sqrt{17-a}; 3 + \sqrt{17-a}]$$



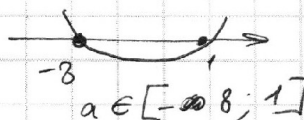
Отсюда понятно, что для выполнения условия необходимо, чтобы область $[3 - \sqrt{17-a}; 3 + \sqrt{17-a}]$ содержала в себе область $[-a; a]$. Отсюда получаем неравенства:

$$\begin{cases} 3 - \sqrt{17-a} \leq -a \\ 3 + \sqrt{17-a} \geq a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{17-a} \geq a+3 \\ \sqrt{17-a} \geq a-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 17-a \geq a^2+6a+9 \\ 17-a \geq a^2-6a+9 \\ 17-a \geq 0 \end{cases}$$

$$1) 17-a \geq a^2+6a+9$$

$$a^2 + 7a - 8 \leq 0, D = 49 + 4 \cdot 8 = 9^2$$

$$a_{1,2} = \frac{-7 \pm 9}{2} \Rightarrow a_1 = 1, a_2 = -8$$

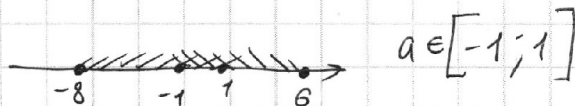


$$2) 17-a \geq a^2-6a+9 \Rightarrow a^2-5a-8 \leq 0 \Rightarrow D = 25 + 4 \cdot 8 = 7^2$$

$$a_{1,2} = \frac{5 \pm 7}{2}, a_1 = 6, a_2 = -1$$

$$3) 17-a \geq 0 \Rightarrow a \leq 17$$

Объединяем



$$a \in [-1; 1]$$

Но также $a \geq 0 \Rightarrow a \in [0; 1]$

Ответ: $[0; 1]$

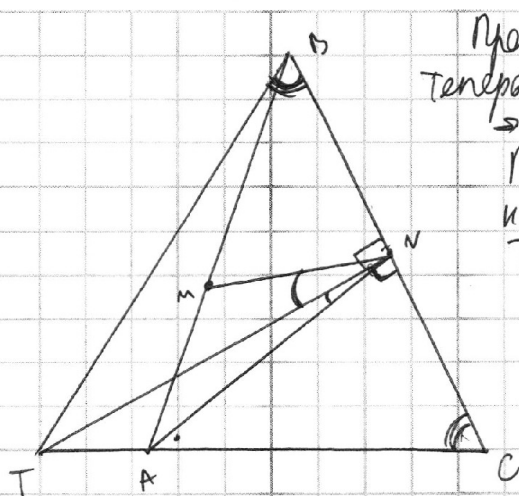


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Проведем биссектрису угла $\angle MNA$.
Теперь $\angle MNT = 10^\circ \Rightarrow \angle BNT = 90^\circ \Rightarrow$
 $\Rightarrow \angle TMC = 90^\circ$

Пусть биссектриса угла пересекет AC в точке T.

Теперь у нас $BN \cdot MA = 2BM \cdot NC$

$$\frac{BN}{2BM} = \frac{NC}{MA}$$

В $\triangle BTC$ TN - высота, значит

$$\frac{BN}{BT} = \frac{NC}{TC}$$

$$\frac{BT}{2BM} = \frac{TC}{MA} \Rightarrow$$

Из этих двух выражений:
 $\operatorname{ctg} \angle C = NC/TC = \operatorname{ctg} \angle TBN \Rightarrow \angle C = \angle TBN$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

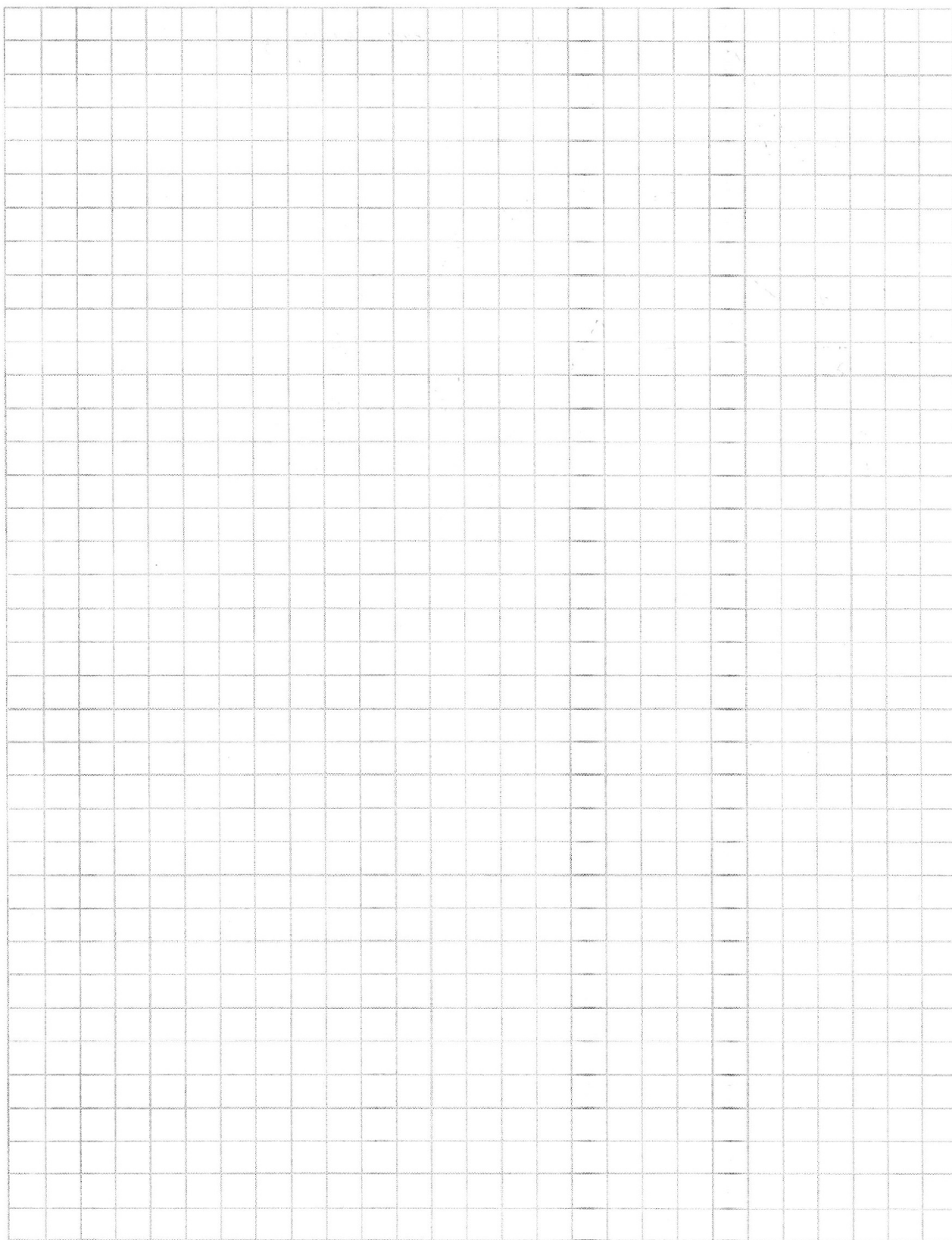
5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

целые числа 2

B

45=2

$$BN \cdot MA = 2 \cdot BM \cdot NC$$

$$\frac{5}{7} = \frac{25}{15} = \frac{50}{30}$$

46

$$y - 45 = 19$$

mm

$$y + 45 = 19$$

$$y = 7$$

$$y = 12$$

$$19 \cdot 4 + 2025 =$$

$$19 \cdot 16 + 2025$$

$$2025 + 19 \cdot 4 + 76 + 76 + 76$$

$$2025 + 76 \cdot k = y^2$$

$$76k = (y - 45)(y + 45)$$

$$19 \cdot 2^x + 2025 = y^2$$

$$-2^x \equiv y^2 \pmod{5}$$

x четное

y нечетное

y четный остаток по mod 5

< 90

mod 9:

$$2^x \equiv y^2 \pmod{9}$$

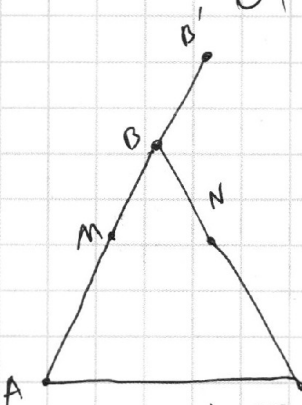
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	4	0	7	1	7	4	0	1

0	1	2
0	1	1

2	4	8
2	1	2

$$(y - 45)(y + 45)$$

$$y^2 = 45^2 + 19 \cdot (2^k)^2$$



$$\begin{array}{r} 46 \times 47 \\ 112 \\ 1329 \\ 188 \\ \hline 2209 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 45 \times 46 \\ 270 \\ 184 \\ \hline 2176 \\ -2025 \\ \hline 151 \end{array}$$

0	1	2	3	4	5	6	7
0	1	4	9	16	25	36	49

$$45 = (5 \cdot 9)^2$$



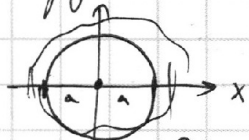
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Окружность с центром в O и радиусом a



$$x^2 - 6x + a \leq 8$$

$$x^2 - 6x + (a-8) \leq 0$$

$$D = 36 - 4(a-8) = 36 - 4a + 32 = 68 - 4a$$

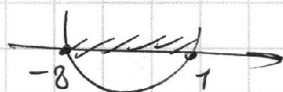
$$x \in (-a; 2a) \cap (2a; 4a) = 4(17-a)$$

$$x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{17-a}}{2} = 3 \pm \sqrt{17-a}$$

$$x \in [2a-a; a]$$

$$\begin{cases} 3 + \sqrt{17-a} \geq a \\ 3 - \sqrt{17-a} \leq -a \end{cases}$$

$$a = \frac{-7 \pm 9}{2} \Rightarrow a_1 = -8, a_2 = 1$$



$$[1; -8]$$

$$19 \cdot 2^x + 2025 = y^2$$

$$(y-45)(y+45) = 19 \cdot 2^x$$

$$34 - 2a \geq 2a^2 + 18$$

$$34 - a \geq a^2 + 18$$

$$a^2 + a - 16 \leq 0$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 1 - 1$$

$$x^2 - 6x$$

$$19 \cdot 2^x = y^2 - 45^2$$

$$19 \cdot 2^x + 2025 = y^2 \Rightarrow (y-45)(y+45) = 19 \cdot 2^x$$

$$1) y - 45 \div 19 \Rightarrow y = 19k + 45 \Rightarrow y \equiv 7 \pmod{19}$$

$$y_1 = 26, y_2 = 47, y_3 = 66, y_4 = 85, y_5 = 104, y_6 = 123, y_7 = 142, y_8 = 161, y_9 = 180, y_{10} = 199$$

$$19 \cdot 2^x$$

$$19 \cdot 2^x$$

$$19 \cdot 2^x$$

$$19 \cdot 2^x$$

$$19 \cdot 2^x$$

$$y \in 2, y \in 4, y \in 5$$

$$19 \cdot 2^x$$

$$19 \cdot 2^x$$

$$19 \cdot 2^x$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$36! = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15 \cdot 16 \cdot 17 \cdot 18 \cdot 19 \cdot 20 \cdot 21 \cdot 22 \cdot 23 \cdot 24 \cdot 25 \cdot 26 \cdot 27 \cdot 28 \cdot 29 \cdot 30 \cdot 31 \cdot 32 \cdot 33 \cdot 34 \cdot 35 \cdot 36$
 $36! / 5 = 71 \dots$
 $36! / 11 = 31 \dots$
 $36! / 13 = 27 \dots$
 $36! / 17 = 21 \dots$
 $36! / 19 = 19 \dots$
 $36! / 23 = 15 \dots$
 $36! / 29 = 12 \dots$
 $36! / 31 = 11 \dots$
 $36! / 33 = 10 \dots$
 $36! / 35 = 10 \dots$

$36! = 19^2 \cdot 19$ — простое число
 $n! + (n+1)! + (n+2)! : 19^2$ или $n : 19 \Rightarrow \checkmark$
 $19(n! : 19 + (n+1)! : 19 + (n+2)! : 19)$
 $19 \cdot (1 + n+1 + (n+1)(n+2)) = 19 \cdot (1 + n+1 + n^2 + n+2n+2) = 19 \cdot (n^2 + 4n + 4) = 19 \cdot (n+2)^2 = 19 \cdot (n+2)(n+2)$

Необходимы и достаточно простые 2 простых
 1) $n! : 19$ и $(n+2) : 19 \Rightarrow \min : n=19$ и $n=17 \Rightarrow n=19$
 2) $(n+2) : 19$ и $(n+2) : 19 \Rightarrow \min : n=17 \Rightarrow n=17$

наименьший $\min n=17$: $n! \cdot (n+2)^2$ при $n=19$:
 $17! + 18! + 19! = 17! (1 + 18 + 18 \cdot 19) = 17! (19 + 18 \cdot 19) = 17! \cdot 19 \cdot 19$

2) $(m-2)^2 + (m-1)^2 + m^2 + (m+1)^2 + (m+2)^2 =$
 $= m^2 - 4m + 4 + m^2 - 2m + 1 + m^2 + m^2 + 2m + 1 + m^2 + 4m + 4 =$
 $= 5m^2 + 10 = 5m^2$ — делится на 10: $N^2 = 5m^2$. Очевидно, что $\min$
 N при $m=5$, но это противоречит условию. Т.е. взять 5,
 то $N : 5 \Rightarrow$ в m есть 25. Далее для удобства в m вводим
 куб $\Rightarrow \min 2^3 \Rightarrow N^2 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 2^3 \Rightarrow N = 10 \sim \min N$

$\sqrt{x^2 - 2x - 3} + 6 \geq |\sqrt{x^2 - 2x - 3} + 2x - 1| + |7 - 2x|$
 Пусть: $x^2 - 2x - 3 = 0$: $D = 4 + 12 = 16 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{2 \pm 4}{2} = 1 \pm 2 : x_1 = -1, x_2 = 3$
 отб. $x^2 - 2x - 3 \geq 0 \Rightarrow x \in (-\infty; -1] \cup [3; +\infty)$

$\sqrt{x^2 - 2x - 3} + 6 \geq |\sqrt{x^2 - 2x - 3} + 2x - 1| + |7 - 2x|$
 x и $\sqrt{x^2 - 2x - 3}$ — $2x \geq 1 \Rightarrow x \geq 0,5 \Rightarrow x \geq 3$, но $\Rightarrow -2x \Rightarrow$
 $\sqrt{x^2 - 2x - 3} + 6 \geq \sqrt{x^2 - 2x - 3} + 2x - 1 + 7 - 2x$
 $6 \geq 6$ — верно
 2) x и $\sqrt{x^2 - 2x - 3}$ — $2x < 1 \Rightarrow x < 0,5 \Rightarrow x < -1$, но $\Rightarrow -2x \Rightarrow$
 $\sqrt{x^2 - 2x - 3} + 6 \geq -\sqrt{x^2 - 2x - 3} - 2x + 1 + 7 - 2x$
 $2\sqrt{x^2 - 2x - 3} \geq 2 - 4x$
 $4x^2 - 4x - 6 \geq (2 - 4x)^2 \Rightarrow \dots$

3) $(3,5; +\infty)$: $6 \geq 2x - 1 + 7 - 2x \Rightarrow 6 \geq 6$ — верно
 $4x \geq 4x \Rightarrow 7 \geq 2x \Rightarrow 3,5 \geq x$ — противоречие — не берем



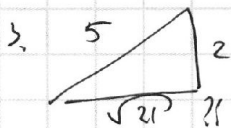
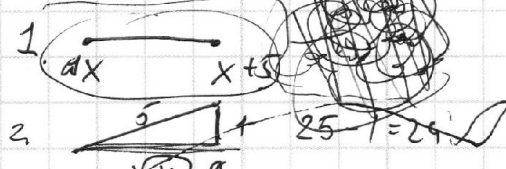
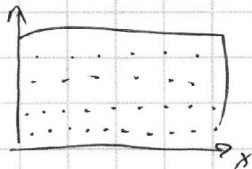
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

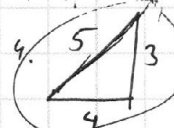
СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

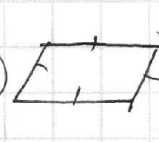
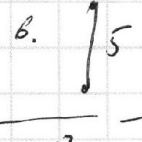
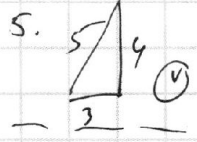
$\sqrt{x^2-2x-3} + 2x-1 < 0 \Rightarrow \sqrt{x^2-2x-3} < 1-2x$ $\text{или } 1-2x \geq 0 \Rightarrow 1 \geq 2x \Rightarrow x \leq 0.5$
 $x^2-2x-3 < 1-4x+4x^2 \Rightarrow 3x^2-2x+4 > 0$ $D = 4-4 \cdot 3 \cdot 4 < 0$, знаком не нулем
пусть и $a > 1 \rightarrow$ стандартно больше 0 $\text{или } x \leq 0.5$



$25-4=21$

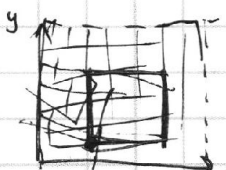


$25-9=16$



$19 \cdot 2^x + 2025 = y^2 \Rightarrow (y-45)(y+45) = 19 \cdot 2^x$

$x:2$



квадраты: $\text{крайнее левое: } [1; 15]$
Вариантов тогда: $45^2 = 2025$

левое $\text{или правое: } [41; \text{по } O_x: [5; 45], O_y: [1; 47]$

Вариантов: $41 \cdot 47$

$O_x: [1; 41], O_y: [1; 47]$

Вариантов: $41 \cdot 47$

$2 \cdot 41 \cdot 47$

Вариантов: $O_x: [1; 42], O_y: [1; 46]$

Вариантов: $2 \cdot 42 \cdot 46$

