



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 10



1. [3 балла] При каком наименьшем натуральном n число $(n-1)! + n! + (n+1)!$ делится на 289?
2. [3 балла] Из суммы квадратов семи последовательных натуральных чисел вычли число 28 и получили пятую степень натурального числа N , большего 8. Найдите наименьшее возможное значение N .
3. [4 балла] Решите неравенство

$$\left| \sqrt{x^2 - x - 2} + 5 \right| \geq \left| \sqrt{x^2 - x - 2} + x - 1 \right| + |6 - x|.$$

4. [5 баллов] На координатной плоскости рассматриваются ромбы с длиной стороны 5 такие, что абсциссы и ординаты всех четырёх вершин каждого ромба — целые числа из промежутка $[1; 45]$. Сколько существует таких ромбов? Напомним, что квадрат также является ромбом.
5. [5 баллов] Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющих уравнению

$$23 \cdot 2^x + 2025 = y^2.$$

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при каждом из которых для множества точек плоскости Oxy , задаваемых уравнением $x^2 + y^2 = a^2$, наибольшее значение выражения $y^2 - 4y - a$ равно 6.
7. [6 баллов] На сторонах AB и BC треугольника ABC выбраны точки M и N соответственно так, что $\angle MNB = \angle ANC = 70^\circ$. Найдите $\angle CAN$, если известно, что $BN \cdot MA = 2BM \cdot NC$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1. Пусть $x = (n-1)!$, тогда:

$$(n-1)! + n! + (n+1)! = x + x \cdot n + x \cdot n(n+1) = x n^2 + 2xn + x =$$

$$x(n^2 + 2n + 1) = x(n+1)^2 = (n-1)! \cdot (n+1)^2$$

Заметим, что при $n=16$, $(n-1)! \cdot (n+1)^2 : 17^2 = 289$.

Докажем, что $n=16$ - минимальное возможное натуральное число при котором $(n-1)! \cdot (n+1)^2 : 17^2$.

Так как для ~~данных~~ 17 - простое число, то в произведении либо $(n-1)! : 17$, либо $(n+1)^2 : 17$ ~~должны выполняться~~ ~~делится~~

Если $n < 16$, то $(n-1) < 15$. А значит, что $(n-1)!$ не будет делиться на 17 , так как при разложении факториала на множители не будет числа 17 . Также если $n < 16$, $(n+1)^2 \leq 16^2$. Для того, чтобы $(n+1)^2 : 17$ нужно чтобы $(n+1) : 17$ (т.к. 17 - ^{простое} ~~не квадрат~~). Однако в ^{опреде-} ~~диап-~~ $[1; 16]$ нет натуральных чисел, делящихся на 17 .

Значит, при $n < 16$, $(n+1)^2 \not: 17$.

Так как $n=16$ нам подходит и меньше быть не может, ~~то~~ 16 является ответом ($15! \cdot 17^2 : 17^2$)

Ответ: 16.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

2. Пусть а - Упорядочим все числа, квадраты которых
были отмечены. Пусть а - четвертое по счету. $a \in \mathbb{N}$.

Тогда:

$$(a-3)^2 + (a-2)^2 + (a-1)^2 + a^2 + (a+1)^2 + (a+2)^2 + (a+3)^2 - 28 = N^5$$

Раскрываем скобки и получаем:

$$7a^2 = N^5, \quad N > 8. \Rightarrow N^5 : 7$$

Так как $N^5 : 7$, и N - натуральное, $N : 7$.

Для $N=7$ не подходит, так как $7 < 8$.

$N=14$ и $N=21$ не подходят, так как в первом

случае $a = \sqrt{2^5 \cdot 7^4}$, а во втором $a = \sqrt{3^5 \cdot 7^4}$. Т.к. $a \in \mathbb{N}$

получаем противоречие.

при $N=28$ противоречия не возникает ($a = \sqrt{7^4 \cdot 2^{10}} = 7^2 \cdot 2^5$)

Ответ: $N=28$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

3. Определим, при каких значениях x выражение имеет смысл, то-есть $x^2 - x - 2 \geq 0$.

Решим квадратное неравенство и получим, что $x \in (-\infty; -1] \cup [2; +\infty)$ (Иначе $x^2 - x - 2 < 0$ и выражение не имеет смысла).

Заметим, что при $x \in (-\infty; -1] \cup [2; +\infty)$, $|\sqrt{x^2 - x - 2} + 5| = \sqrt{x^2 - x - 2} + 5$ или как $\sqrt{x^2 - x - 2} \geq 0$.

I. Допустим, $x > 6$

тогда модуль справа раскроем следующим образом:

$$\sqrt{x^2 - x - 2} + x - 1 + x - 6 \quad (\text{т.к. } \sqrt{x^2 - x - 2} + x - 1 > 0 + 5 \text{ и } x > 6)$$

Значит:

$$\sqrt{x^2 - x - 2} + 5 \geq \sqrt{x^2 - x - 2} + 2x - 7 \Leftrightarrow$$

$$12 \geq 2x \Leftrightarrow x \leq 6$$

Однако по предположению $x > 6$. Не удовлетворяет условию случая. Значит, при $x > 6$ решений нет.

II. Допустим, что $x \leq 6$ и $\sqrt{x^2 - x - 2} + x - 1 < 0$:

$$\sqrt{x^2 - x - 2} + 5 \geq 1 - x - \sqrt{x^2 - x - 2} + 6 - x \Leftrightarrow$$

$$2\sqrt{x^2 - x - 2} + 2x \geq 2 \quad | :2$$

$$\sqrt{x^2 - x - 2} + x \geq 1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - x - 2} + x - 1 \geq 0 \text{ Не удовл. усл. случая.}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Значит, при $x \leq 6$, таких что $\sqrt{x^2 - x - 2} + x - 1 < 0$ решений нет.

III. Пусть $x \leq 6$, $\sqrt{x^2 - x - 2} + x - 1 \geq 0$:

$$\sqrt{x^2 - x - 2} + 5 \geq \sqrt{x^2 - x - 2} + x - 1 + 6 - x \Leftrightarrow$$

$$5 \geq 5.$$

То-есть при таких x , что $x \leq 6$ и $\sqrt{x^2 - x - 2} + x - 1 \geq 0$ решение всегда будет x .

1). Если $x > 0$ и $x \in (-\infty; -1] \cup [2; +\infty)$, $x \geq 2$:

Тогда $\sqrt{x^2 - x - 2} + x - 1 \geq 0$, т.к. $\sqrt{x^2 - x - 2} \geq 0$ и $x - 1 \geq 0$.

Значит, все значения $x \in [2; 6]$ явл. решениями неравенства.

2). Если $x < 0$ и $x \in (-\infty; -1] \cup [2; +\infty)$, $x \leq -1$

Для того, чтобы $\sqrt{x^2 - x - 2} + x \geq 1$ надо чтобы $x^2 - x - 2$ было не меньше $(1 - x)^2$. Однако при $x < 0$ разности $x^2 - x - 2 - (1 - x)^2 = -3 + x < 0$, т.к. $x < 0$.

Получается, что при $x < 0$, $\sqrt{x^2 - x - 2} + x < 1$. Значит, при $x < 0$ у неравенства нет решений.

Проверив в итоге все случаи, мы получили, что решением неравенства является отрезок $[2; 6]$ Ответ: $x \in [2; 6]$.



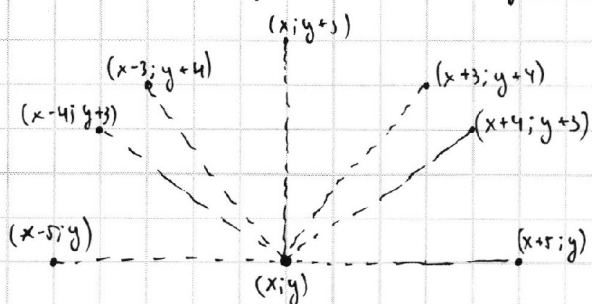
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

4. Рассмотрим произвольную точку на плоскости.
От нее ^{или вверх} ~~вверх~~ можно провести ~~7~~ отрезков длиной 5 с концами в целых координатах.

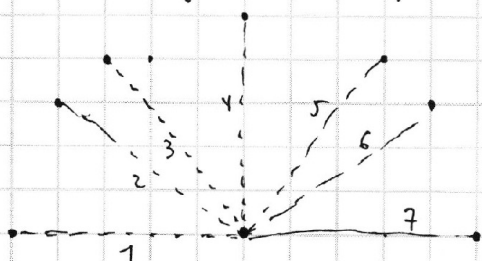


Заметим, что если провести из одной точки какие-то два

таких отрезка, то будет получаться однозначный образ. Т.е. из одной точки можно будет построить $C_7^2 - 1$ ромбов вверх или вниз. (-1 т.к. нельзя выбрать $(x-5; y)$, $(x; y)$ и $(x+5; y)$, а остальные можно). Получаем, только таких ромбов получится построить в поле $44 - 44$.

$$C_7^2 - 1 = 20.$$

Для удобства пронумеруем отрезки:



Введем обозначение вида $a:b$,
которые и обозначаем ромб, содержащий
эти отрезки a и b из
какой-то точки



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

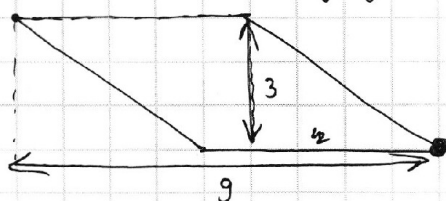
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Для каждого возможного $a:b$ ($a \leq 7, b \leq 7$) подсчитаем, сколько точек $(x;y)$ подходит для проведения этих отрезков:

Пример рассуждения: для рабда типа 1:2



Расстояния от края до края составляют:

- 1). по высоте: 3
- 2). по длине: 9

Значит, в каждой такой рабда можно провести из $(45-9)(45-3) = 36 \cdot 42$ точек.

По схожей рассуждению заполняем таблицу:

тип рабда	ко-во способов выбрать точку
1:2	36 · 42
1:3	37 · 41
1:5	37 · 41
1:6	36 · 42
2:3	38 · 38
2:4	37 · 41
2:5	38 · 38
2:6	37 · 39
3:5	39 · 37
3:4	36 · 42
1:4	40 · 40
4:7	40 · 40
4:5	36 · 42
3:6	38 · 38
4:6	37 · 41
5:6	38 · 38
2:7	36 · 42
3:7	37 · 41



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

5:7	<u>37·41</u>
6:7	<u>38·42</u>

Однако если считать все возможные числа, мы некоторые пары посчитаем дважды, а именно те, которые содержат в себе либо отрезок 7, либо отрезок 1. (т.к. эти пары ~~параллельны~~ имеют не две, а одну «целевую» точку).

Т.е. все результаты с

$$\frac{4 \cdot 36 \cdot 42 + 4 \cdot 37 \cdot 41 + 2 \cdot 40 \cdot 40}{2} + 2 \cdot 36 \cdot 42 + 2 \cdot 37 \cdot 41 + 4 \cdot 38 \cdot 38 + 2 \cdot 37 \cdot 39 =$$

сумма кол-ва паров типов
сумма кол-ва паров типов

1:2 ; 1:3 ; 1:4 ; 1:5 ; 1:6 ; 7:2 ; 7:3 ; 7:4 ; 7:5 ; 7:6

2:3 ; 2:4 ; 2:5 ; 2:6 ; 3:4 ; 3:5 ; 3:6 ; 4:5 ; 4:6 ; 5:6

$$= 4 \cdot 36 \cdot 42 + 4 \cdot 37 \cdot 41 + 4 \cdot 38 \cdot 38 + 2 \cdot 37 \cdot 39 + 40 \cdot 40$$

Ответ: $4 \cdot 36 \cdot 42 + 4 \cdot 37 \cdot 41 + 4 \cdot 38 \cdot 38 + 2 \cdot 37 \cdot 39 + 40 \cdot 40$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$5. 2^x \cdot 23 + 2025 = y^2 \Leftrightarrow 2^x \cdot 23 = y^2 - 2025 \Leftrightarrow$$

$$2^x \cdot 23 = (y - 45)(y + 45)$$

Пусть $y - 45 = a$, тогда $2^x \cdot 23 = a \cdot (90 + a) = a^2 + 90a$

Т.к. a - целое, $a^2 + 90a \div 23$

$$90 \equiv -2 \pmod{23}$$

Рассмотрим таблицу со всеми возможными остатками $a^2 + 90a$ при делении на 23.

a	a^2	$90a$	$90a + a^2$
0	0	0	0
1	1	21	22
2	4	19	0
3	9	17	3
4	16	15	8
5	2	13	15
6	13	11	1
7	3	9	12
8	18	7	2
9	12	5	14
10	8	3	11
11	6	1	7
12	6	22	7
13	8	20	5
14	12	18	7
15	18	16	11
16	3	14	17
17	13	12	2
18	2	10	12
19	16	8	1
20	9	6	15
21	4	4	8
22	1	2	3

Заметим, что $90a + a^2 \div 23$

только при $a \equiv 0 \pmod{23}$ и $a \equiv 2 \pmod{23}$

1). Если $a \equiv 2 \pmod{23}$ то все a будут

перечислены, кроме $a = 2$.

при $a = 2$, $x = 3$, $y = 47$ или

или $x = 3$ и $y = -47$.

При перечисленных a , $90a + a^2$

является четным, что противоречит условию равенства $2^x \cdot 23$.

(при $x = 0$, а урассматривалось).

2). Если $a \equiv 0 \pmod{23}$, $90a + a^2$ приобретает новые делители, только 23 и степени двойки.

Ответ: $(3; 47)$; $(3; -47)$

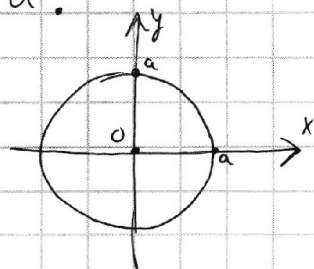


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☐3
☐4
☐5
☐6
☒7
☐СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Имеем уравнение $x^2 + y^2 = a^2$ — это окружность с центром в начале координат и радиусом a .



Пусть $y_1 \geq 0$ и $y_2 \leq -y_1$.

$$\text{тогда } y_2^2 - 4y_2 - a > y_1^2 - 4y_1 - a$$

$$\text{т.к. } y_2^2 - 4y_2 - a - y_1^2 + 4y_1 + a =$$

$$(y_2^2 - y_1^2) + 4(y_1 - y_2)$$

Т.е. для $\forall 0 < y \leq a$, $-y$ будет давать большее

значение $y^2 - 4y - a$. Тогда максимальное значение будет достигаться в $y = -a$, т.к.

при $y_1 \geq y_2$ и $(y_1 < 0$ и $y_2 < 0)$, $y_2^2 - 4y_2 - a > y_1^2 - 4y_1 - a$

$$\text{т.к. } y_2^2 - 4y_2 - a - y_1^2 + 4y_1 + a = (y_2^2 - y_1^2) + 4(y_1 - y_2)$$

Но минимальное значение y — это $-a$, т.к.

при $y < -a$, $x^2 < 0$, чего быть не может.

$$\text{Значит: } a^2 + 4a - a = 6 \Leftrightarrow a^2 + 3a - 6 = 0$$

$$\text{Решим уравнение и получим } a_1 = \frac{-3 + \sqrt{33}}{2}$$

$$a_2 = \frac{-3 - \sqrt{33}}{2}$$

$$\text{Ответ: } \frac{-3 + \sqrt{33}}{2}; \frac{-3 - \sqrt{33}}{2}$$



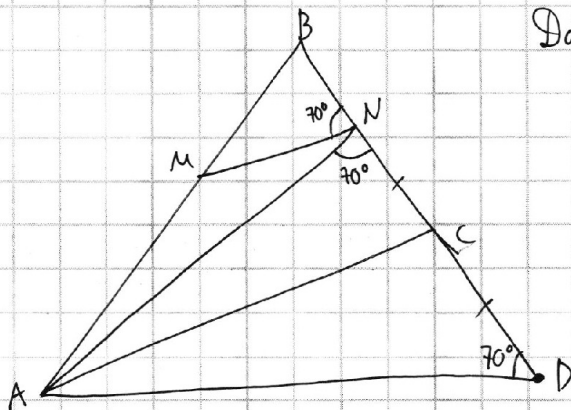
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Дано: $\angle MNB = \angle ANC = 70^\circ$

$$BN \cdot MA = 2BM \cdot NC$$

Найти: $\angle CAN$.

Решение: Продолжим

BC за точку C и

поставим точку D так,

$$\text{так } ND = 2NC.$$

$$BN \cdot MA = 2BM \cdot NC \Rightarrow BN \cdot MA = BM \cdot ND$$

$$\Rightarrow \frac{BN}{ND} = \frac{BM}{MA} \quad \text{по т. Фалеса} \quad MN \parallel AD \quad (\text{т.к. } \frac{BM}{AM} = \frac{BN}{ND}) \Rightarrow$$

$$\angle APB = \angle MNB = 70^\circ$$

$\triangle AND$ - равнобедренный, где AN и AD - равные стороны (т.к. $\angle ANC = \angle APB = 70^\circ$)

Значит, AC - бис-са $\angle NAD$ (т.к. AC - медиана и

$\triangle AND$ - равнобедренный).

$$\Rightarrow \angle CAN = \frac{\angle NAD}{2} = \frac{180^\circ - 70^\circ - 70^\circ}{2} = 20^\circ$$

Ответ: 20°



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{x^2 - x - 2} + x \geq 1$$

при $x \in (-1; 2)$ не имеет смысла

при $x \in [2; +\infty)$, $\sqrt{x^2 - x - 2} > 0$, $x > 1 \Rightarrow \sqrt{x^2 - x - 2} + x \geq 1$

при $x \leq -1$:

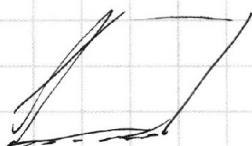
$$x^2 + 2x + 1 - x - 1 - 2 = x^2 + x - 2 \quad -x^2 + x + 2 = 2x$$

-1000

$$\sqrt{1000000 + 1000 - 2} - 1000$$

$$\sqrt{1000998} - 1000 \geq 1$$

$$(x+1)^2 = (x^2 + 2x + 1)$$



$$x^2 + x - 2 - x^2 - 2x - 1 = -x - 3 < 0$$

91

$$46^2 + 90 \cdot 46$$

$$\begin{array}{r} 46 \\ \cdot 46 \\ \hline 276 \\ 184 \\ \hline 2116 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 46 \\ - 90 \\ \hline 4140 \\ 2116 \\ \hline 6256 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 6256 \overline{) 23} \\ \underline{-46} \\ 165 \\ \underline{-161} \\ 46 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 272 \overline{) 4} \\ \underline{-24} \\ 32 \\ \underline{-32} \\ 0 \end{array} \quad \frac{272}{168} = 17.4$$

$$a(a+90)$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

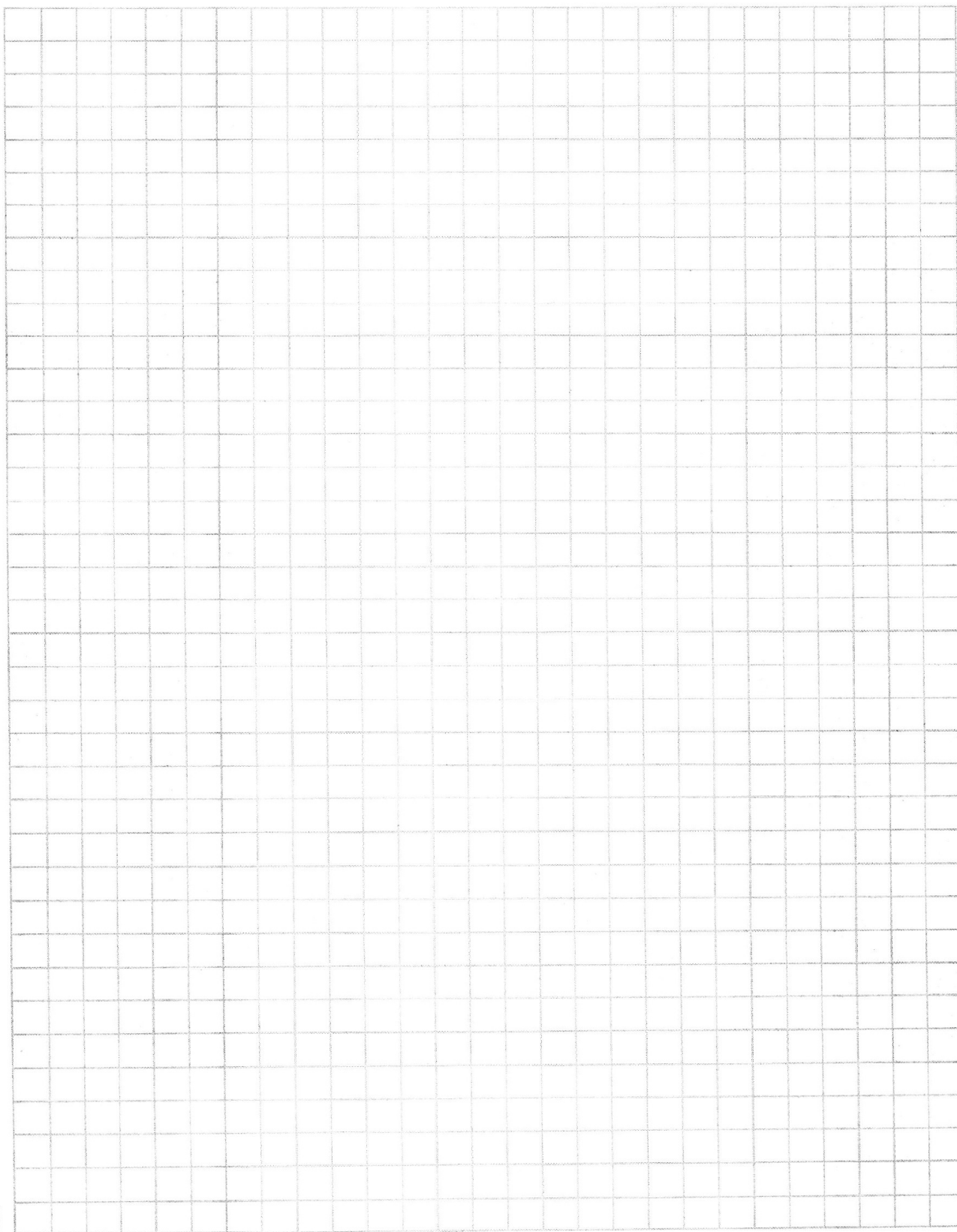
5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 _ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$2\sqrt{x^2-x-2} + 2x \geq 2$$

$$7a^2 = N^5, N > 8$$

$$\sqrt{x^2-x-2} + x \geq 1 \quad \text{не удовл. усл. задачи.}$$

$$N \div 7$$

$$x \geq 6, \quad \sqrt{x^2-x-2} + x \geq 1$$

$$\begin{aligned} N=7 & \quad a^2 = \frac{7^5}{7} = 7^4 \\ N=14 & \quad a^2 = \frac{14^5}{7} = 7^4 \cdot 2^5 \\ N=21 & \quad a^2 = \frac{21^5}{7} = 7^4 \cdot 3^5 \\ N=28 & \quad a^2 = \frac{28^5}{7} = 7^4 \cdot 2^4 \cdot 4^5 \end{aligned}$$

$$\frac{-7}{\sqrt{49+7-2}} - 7 =$$

$$(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$$

$$x^2 - x - 2 - x^2 + 2x - 1 = -3x - 3$$

$$\text{при } x < -1 \text{ имеем } (> 0)$$

$$\sqrt{x^2-x-2} + 1$$

$$(2-x)^2 = x^2 + 1 - 2x = (4+1-4)=1$$

$$x^2 - x - 2 - x^2 + 1 + 2x = (x-3)$$

$$x = -3$$

$$(1+3)^2 = 16$$

$$9+3-2 =$$

$$x$$

$$0 - 1 = -1$$

$$\sqrt{}$$

14	12	-28
15	18	-30
16	3	-32
17	13	-34
18	2	-36
19	16	-38
20	9	-40
21	4	-42
22	1	-44

a	a^2	90a
0	0	0
1	1	-2
2	4	-4
3	9	-6
4	16	-8
5	25	-10
6	36	-12
7	49	-14
8	64	-16
9	81	-18
10	100	-20
11	121	-22
12	144	-24
13	169	-26

$$x \in [2; 6]$$

$$23 \cdot 2^x + 2025 = y^2$$

$$462 =$$

$$46 \cdot 46 = (45+1)^2 = 2025 + 90 + 1 = 2116$$

$$(45+2)^2 = 2025 + 180 + 4 = 2209$$

$$\begin{array}{r} 184 \overline{) 2209} \\ 184 \\ \hline 369 \\ 360 \\ \hline 9 \end{array}$$

$$2209 + 188 + 4 = 2401$$

$$47 \cdot 4$$

$$\begin{array}{r} 2209 \\ 188 \\ \hline 2401 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 121 \\ 138 \\ \hline 259 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 144 \overline{) 23} \\ 138 \\ \hline 8 \end{array}$$

$$x=3$$

$$x=3$$

$$y=47$$

$$y=47$$

$$45^2 + 23 \cdot 2^x = (45+a)^2$$

$$23 \cdot 2^x = 90a + a^2$$

Если

a - нечет., то

не можем найти

$$a \equiv 2 \pmod{23}$$

$$90a + a^2 - \text{нечет.}$$

либо a=2, либо a - нечет.

$$90 \equiv 23 \pmod{23} \quad (-2)$$

$$\begin{array}{r} 90 \overline{) 23} \\ 69 \\ \hline 21 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 0 \\ -23 \\ \hline -46 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 121 \overline{) 23} \\ 115 \\ \hline 6 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 189 \overline{) 23} \\ 161 \\ \hline 8 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

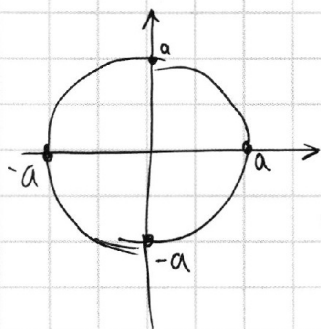
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} & \textcircled{2} \cdot 36 \cdot 42 + \textcircled{2} \cdot 37 \cdot 41 + \textcircled{2} \cdot 37 \cdot 41 + \textcircled{2} \cdot 42 \cdot 36 + \textcircled{2} \cdot 38 \cdot 38 + \textcircled{2} \cdot 37 \cdot 41 + \textcircled{2} \cdot 38 \cdot 38 + \textcircled{2} \cdot 42 \cdot 36 + \\ & \textcircled{2} \cdot 37 \cdot 39 \end{aligned}$$

$$6 \cdot 36 \cdot 42 + 6 \cdot 37 \cdot 41 + 4 \cdot 38 \cdot 38 + 2 \cdot 37 \cdot 39 + 2 \cdot 40 \cdot 40$$



$$\begin{aligned} & \sqrt{36-6-2} + 5 \geq \sqrt{36-6-2} + 6 - 1 + 0 \\ & \sqrt{28} + 5 \geq \sqrt{28} + 5 \\ & y^2 - 4y - a - \max \text{ при } y = -a \quad 5 \geq 0 \\ & \sqrt{16-4-2} + 5 \geq \sqrt{16-4-2} + 4 - 1 + 2 \end{aligned}$$

Т.к. если $y_1 = -y_2$, $y_1 < 0$, то

$$4y_1 \quad y_1^2 - 4y_1 - a = y_2^2 + 4y_2 - a \geq y_2^2 - 4y_2 - a$$

если y_1 и $y_2 < 0$, $y_1 < y_2$, то

$$y_1^2 - 4y_1 - a - y_2^2 + 4y_2 + a = (y_1^2 - y_2^2) + 4(y_2 - y_1)$$

$$y^2 - 4y - a = 6$$

$$a^2 + 4a - a = 6$$

$$a^2 + 3a - 6 = 0$$

$$D = 9 + 24 = 33$$

$$a_1 = \frac{-3 + \sqrt{33}}{2}$$

$$a_2 = \frac{-3 - \sqrt{33}}{2}$$

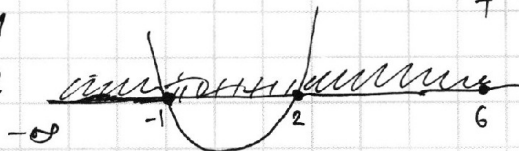
$$\sqrt{1-1-2} + 5 \geq$$

$$\sqrt{4-2-2}$$

$$D = 4 + 4 = 8$$

$$x_1 = -1$$

$$x_2 = 2$$



$$x \geq 6 :$$

$$\sqrt{x^2 - x - 2} + 5 \geq 0, \sqrt{x^2 - x - 2} + x \geq 1, |6 - x| < 0 \quad 6 - x = 0$$

$$\sqrt{x^2 - x - 2} + 5 \geq \sqrt{x^2 - x - 2} + x - 1 - 6 + x$$

Значит, $x \leq 6$.

Если $x \in (-\infty; -1]$

$$5 \geq 2x - 7$$

$$x \leq 6$$

$$\begin{aligned} & \sqrt{x^2 - x - 2} + 5 \geq \sqrt{x^2 - x - 2} + x - 1 + 6 - x \\ & \sqrt{x^2 - x - 2} + 5 \geq 1 - x - \sqrt{x^2 - x - 2} + 6 - x \end{aligned}$$

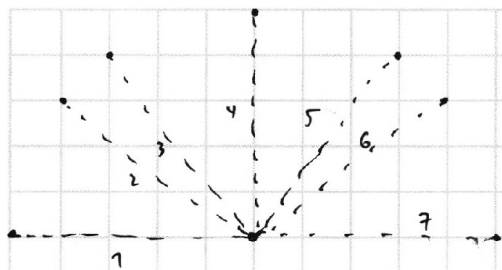


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



~~1:2~~, ~~2:4~~ ~~3:7~~
~~1:3~~ ~~2:5~~ ~~4:5~~
~~1:4~~ ~~2:6~~ ~~4:6~~
~~1:5~~ ~~2:7~~ ~~4:7~~
~~1:6~~ ~~3:4~~ ~~5:6~~
~~1:7~~ ~~3:5~~ ~~5:7~~
~~2:3~~ ~~3:6~~ ~~6:7~~

1:2 - 6:7
1:3 - 5:7
1:5 - 3:7
1:6 - 2:7

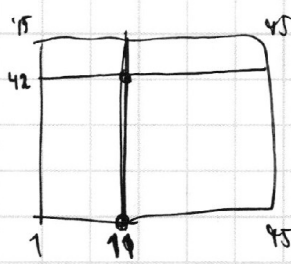
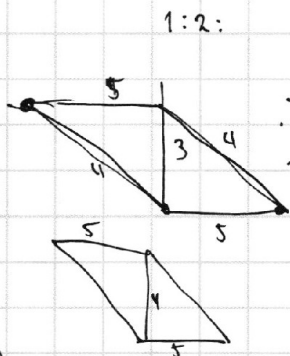
2:3 - 5:6
2:4 - 4:6

2:5 - 3:6
2:6 - 2:6

3:5 - 2:5

3:4 - 4:5

1:4 - 4:7



11:42

~~45-10=35~~
~~45-10=35~~

2.36.42

2.37.48

2.38.44

2.39.40

2.40.36

2:3 $C_5^2 = 10$

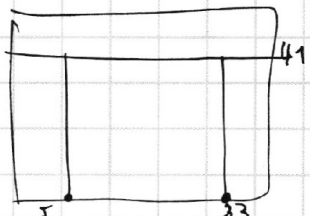
7:7 1:2

2.38.38

2:4 8 на 4

2.37.41

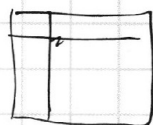
1:2
1:3
1:4
1:5
1:6
7:2
7:3
7:4
7:5
7:6



1...5
43...95

2.41.37

5:5



2.40.40

2:5 7 на 7

2.38.38

2:6 8 на 6

2.37.39

3:5 6 на 6

37.39

3:4 9 на 3

2.42.36



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

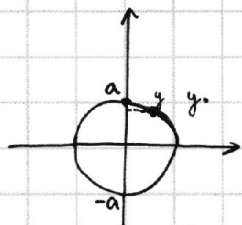
СТРАНИЦА
 _ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 + y^2 = a^2$$

$$y^2 - 4y - a = 6$$

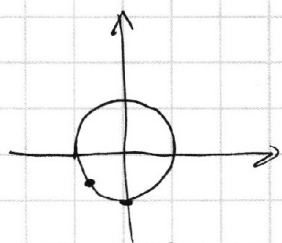
$$(45 \times 45) - 6$$



$$\begin{aligned} y_0^2 - 4y_0 - a &= 0 \\ y_1^2 - 4y_1 - a &= 0 \end{aligned}$$

$$(y_1 - y_0)(y_1 + y_0) - 4(y_1 - y_0) = (y_1 - y_0)(y_1 + y_0 - 4)$$

$$f(y_1) > f(y_0) \text{ если } y_1 + y_0 > 4$$



$$(-a)^2 + 4a - a = 6$$

$$a^2 + 3a - 6 = 0$$

$$D = 9 + 36 \cdot 24 = 33$$

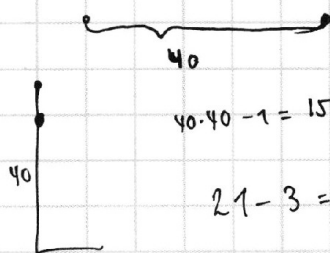
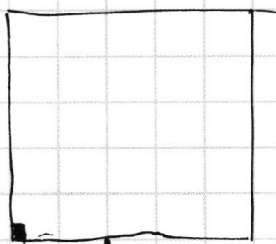
$$a_1 = \frac{-3 + \sqrt{33}}{2}$$

$$a_2 = \frac{-3 - \sqrt{33}}{2}$$

$$\frac{90 \cdot 23}{693} = 21$$

$$C_7^2 = \frac{7!}{5! \cdot 2!} = \frac{6 \cdot 7}{2} = 21 - 1 = 20$$

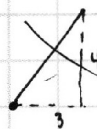
квадрат



$$40 \cdot 40 - 1 = 1599 \text{ квадратов}$$

$$21 - 3 = 18$$

$$C_5^2 = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$$



$$\sqrt{9 - 3 - 2} + 3 - 1 \geq 0$$

$$C_4^2 = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6$$

$$x^2 - x - 2 - 1 - x + 2x$$

$$1 + x^2 - 2x - x^2 + x + 2 = 3 - x$$

$$x - 3$$

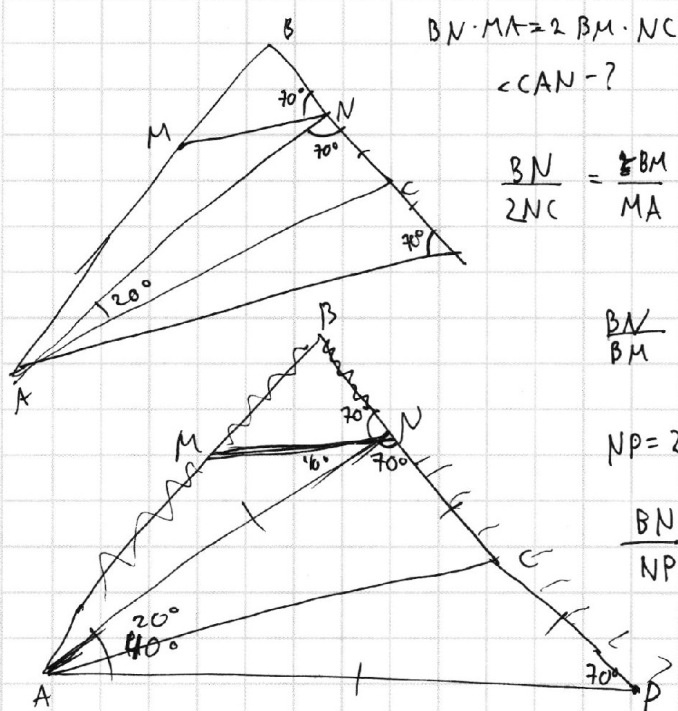


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!



$$BN \cdot MA = 2 BM \cdot NC$$

$$\angle CAN = ?$$

$$\frac{BN}{2NC} = \frac{BM}{MA}$$

$$\frac{BA}{BM} = \frac{NP}{AM}$$

$$NP = 2NC$$

$$\frac{BN}{NP} = \frac{BM}{MA}$$

$$x \leq 6$$

$$\sqrt{x^2 - x - 2} + x \geq 1$$

$$x \leq 6$$

$$\sqrt{x^2 - x - 2} + x \leq 1$$

$$x \geq 6$$

$$\sqrt{x^2 - x - 2} + x \leq 1$$

$$\sqrt{36 - 6 - 2} + 6$$

1	2	3	4	5	6	7
✓	✓	✗	✗	✓	?	✓

$$|\sqrt{y} + 5| \geq |\sqrt{y} + x - 1| + |6 - x|$$

$$\sqrt{y} + x = 1$$

$$\sqrt{x^2 - x - 2} + x = 1$$

$$x^2 - x - 2 +$$

$$x^2 - x - 2 \geq 0$$

$$x^2 - x \geq 2$$

$$x(x-1) \geq 2$$

$$x_1 =$$

$$x_2 =$$

$$D = 1 + 4 = 5$$

$$x_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$x_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

$$0,5 - \frac{\sqrt{5}}{2} < -1$$

$$5 \geq 5$$

$$5 \geq 2x - 7 \Rightarrow x \leq 6$$

$$2\sqrt{x^2 - x - 2} + 5 \geq -5$$

$$2\sqrt{x^2 - x - 2} + 5 \geq 7 - 2x$$

$$2\sqrt{x^2 - x - 2} \geq 2 - 2x$$

$$\sqrt{x^2 - x - 2} \geq 1 - x$$

$$2\sqrt{x^2 - x - 2} \geq 0$$

$$\sqrt{x^2 - x - 2} + 5 \geq \sqrt{x^2 - x - 2} + x - 1 + 6 - x$$

$$\geq \sqrt{x^2 - x - 2} + x - 1 - 6 + x$$

$$\sqrt{x^2 - x - 2} + 5 \geq 1 - x - \sqrt{x^2 - x - 2} + 6 - x$$

$$\geq 1 - x - \sqrt{x^2 - x - 2} - 6 + x$$

$$2\sqrt{x^2 - x - 2} + 5 \geq -5$$

$$2\sqrt{x^2 - x - 2} \geq -10$$

$$2 - x$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

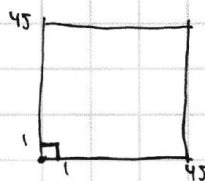
СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$n$$

$$(n-1)! + n! + (n+1)! = 289 = 17^2$$

$$(n-1)! = x$$



$$a:23$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 23 \end{pmatrix}$$

$$x + x \cdot n + x(n+1)n = xn^2 + 2x \cdot n + x = 17^2$$

$$23 \cdot 2^x = 90a + a^2$$

$$23 \cdot 2^{x+2} = 180a + a^2$$

$$\begin{matrix} a(90+a) \\ :2 & :2 \end{matrix}$$

$$x(n^2 + 2n + 1) = x(n+1)^2 : 17^2$$

$$15! + 15! \cdot 16 + 15! \cdot 16 \cdot 17 =$$

$$15! (1 + 16 + 16 \cdot 17) = 1 + 16 + 272 = 15! \cdot 289$$

$$289 - 17 = 272$$

$$(n-1)! (n+1)^2$$

$$n-1!$$

$$n=16$$

$$n < 16:$$

$$(n-1)! \neq 17$$

$$(n+1)^2 < 17$$

$$\sum -28 = N^5 \quad (N > 8)$$

$$3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5$$

$$(a-3)^2 + (a-2)^2 + (a-1)^2 + a^2 + (a+1)^2 + (a+2)^2 + (a+3)^2$$

$$a^2 - 6a + 9 + a^2 - 4a + 4 + a^2 - 2a + 1 + a^2 + a^2 + 2a + 4 + a^2 + 4a + 9$$

$$\begin{array}{r} 17 \\ -17 \\ \hline 119 \\ -119 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$7a^2 + 28 - 28 = N^5$$

$$23 \cdot 2^x + 2025 = y^2$$

$$7a^2 = N^5$$

$$900 - 3 = \frac{897}{3} = 299$$

$$N^5 : 7$$

$$\frac{7^5 \cdot 2^{10}}{7} = 7^4 \cdot 2^{10} = (7^2 \cdot 2^5)^2$$

$$7 \cdot 4 = 28$$

$$225 - 18 = 207 \frac{21}{3} = \frac{14^5}{7} = \frac{7^5 \cdot 2^5}{7} = 7^4 \cdot 2^5$$

$$\frac{7^5}{7} = 7^4$$

$$\frac{49}{7} = \frac{7^{16}}{7}$$

$$23 \cdot 2^x + 2025 = 45^2 = y^2$$

$$23 \cdot 2^x = (y-45)(y+45)$$

$$23 \cdot 2^x = a \cdot (90+a)$$

$$|\sqrt{x^2 - x - 2} + 5| \geq |\sqrt{x^2 - x - 2} + x - 1| + |6 - x|$$

$$\sqrt{x^2 - x - 2} = a$$

$$\sqrt{a} + 5 \geq |\sqrt{a} + x - 1| + |6 - x|$$

$$|\sqrt{a} + 5|$$

$$\sqrt{8100 + 2^{x+2} \cdot 23} \in \mathbb{Z}$$

$$2^{x+2} \cdot 23 = (b-90)(b+90) = b \cdot (b+180)$$

$$23 \cdot 2^{x+2} = b^2 + 180b$$

$$\begin{matrix} 23 \\ 46 \\ 92 \\ 184 \end{matrix}$$

$$a^2 + 90a - 23 \cdot 2^x = 0$$

$$\Delta = 8100 + 2^{x+2} \cdot 23$$

$$a = \frac{-90 \pm \sqrt{\Delta}}{2}$$

$$a = \text{zero}$$