



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 10



- [3 балла] При каком наименьшем натуральным n число $(n - 1)! + n! + (n + 1)!$ делится на 289?
- [3 балла] Из суммы квадратов семи последовательных натуральных чисел вычли число 28 и получили пятую степень натурального числа N , большего 8. Найдите наименьшее возможное значение N .
- [4 балла] Решите неравенство

$$\left| \sqrt{x^2 - x - 2} + 5 \right| \geq \left| \sqrt{x^2 - x - 2} + x - 1 \right| + |6 - x|.$$

- [5 баллов] На координатной плоскости рассматриваются ромбы с длиной стороны 5 такие, что абсциссы и ординаты всех четырёх вершин каждого ромба — целые числа из промежутка $[1; 45]$. Сколько существует таких ромбов? Напомним, что квадрат также является ромбом.
- [5 баллов] Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющих уравнению
$$23 \cdot 2^x + 2025 = y^2.$$
- [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при каждом из которых для множества точек плоскости Oxy , задаваемых уравнением $x^2 + y^2 = a^2$, наибольшее значение выражения $y^2 - 4y - a$ равно 6.
- [6 баллов] На сторонах AB и BC треугольника ABC выбраны точки M и N соответственно так, что $\angle MNB = \angle ANC = 70^\circ$. Найдите $\angle CAN$, если известно, что $BN \cdot MA = 2BM \cdot NC$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи **отдельно**.

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

1. Рассмотрим $x = (n-1)!$, тогда:

$$(n-1)! + n! + (n+1)! = x + x \cdot n + x \cdot n(n+1) = x(n^2 + 2n + 1) = x(n+1)^2 = (n-1)! \cdot (n+1)^2$$

Заметим, что при $n=16$, $(n-1)! \cdot (n+1)^2 : 17^2 = 289$.

Докажем, что $n=16$ - минимальное возможное натуральное число при котором $(n-1)! \cdot (n+1)^2 : 17^2$.

Так как для всех 17 - простое число, то в произведении $(n-1)! \cdot (n+1)^2$ либо $(n-1)! : 17$, либо $(n+1)^2 : 17$ должно делиться.

Если $n < 16$, то $(n-1) < 15$. А значит, что $(n-1)!$ не делится на 17 , так как при разложении на множители не делится число 17 . Также если $n < 16$, $(n+1)^2 \leq 16^2$. Для него, чтобы $(n+1)^2 : 17$ делится, нужно чтобы $(n+1) : 17$ (т.к. 17 - простое). Однако в диапазоне $[1; 16]$ нет натуральных чисел, делящихся на 17 .

Значит, при $n < 16$, $(n+1)^2 \neq 17^2$.

Так как $n=16$ так подходит и меньше быть не может, то 16 является ответом ($15! \cdot 17^2 : 17^2$)

Ответ: 16.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи **отдельно**.

- | | | | | | | |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

2. Пусть a - натуральное все шесть квадратов которых суммы множены. Пусть a - четвертое по счету. $a \in \mathbb{N}$.

Тогда:

$$(a-3)^2 + (a-2)^2 + (a-1)^2 + a^2 + (a+1)^2 + (a+2)^2 + (a+3)^2 - 28 = N^5$$

Раскрываем скобки и получаем:

$$7a^2 = N^5, N > 8. \Rightarrow N^5 : 7$$

Так как $N^5 : 7$, и N - натуральное, $N : 7$.

При $N=7$ не подходит, так как $7 < 8$.

$N=14$ и $N=21$ не подходит, так как в первом

случае $a = \sqrt{2^5 \cdot 7^4}$, а во втором $a = \sqrt{3^5 \cdot 7^4}$. Т.к. $a \in \mathbb{N}$

получаем противоречие.

при $N=28$ противоречия не возникает ($a = \sqrt{7^4 \cdot 2^{10}} = 7^2 \cdot 2^5$)

Ответ: $N=28$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

3. Определите, при каких значениях x выражение имеет смысл, то есть $x^2 - x - 2 \geq 0$.

Решим квадратное неравенство и получим, что $x \in (-\infty; -1] \cup [2; +\infty)$ (Изоте $x^2 - x - 2 < 0$ и выражение не имеет смысла).

Заметим, что при $x \in (-\infty; -1] \cup [2; +\infty)$, $|\sqrt{x^2 - x - 2} + 5| = \sqrt{x^2 - x - 2} + 5$ или как $\sqrt{x^2 - x - 2} \geq 0$.

I. Допустим, $x > 6$

тогда модуль справа раскроется следующим образом:

$$\sqrt{x^2 - x - 2} + x - 1 + x - 6 \quad (\text{т.к. } \sqrt{x^2 - x - 2} + x - 1 > 0 + 5 \text{ и } x > 6)$$

Значит:

$$\sqrt{x^2 - x - 2} + 5 \geq \sqrt{x^2 - x - 2} + 2x - 7 \iff$$

$$12 \geq 2x \iff x \leq 6$$

Однако по предположению $x > 6$. Не удовлетворяет условию задачи. Значит, при $x > 6$ решения нет.

II. Допустим, что $x \leq 6$ и $\sqrt{x^2 - x - 2} + x - 1 < 0$:

$$\sqrt{x^2 - x - 2} + 5 \geq 1 - x - \sqrt{x^2 - x - 2} + 6 - x \iff$$

$$2\sqrt{x^2 - x - 2} + 2x \geq 2 \quad | :2$$

$$\sqrt{x^2 - x - 2} + x \geq 1 \iff \sqrt{x^2 - x - 2} + x - 1 \geq 0. \text{ Не удовл. ус. задачи.}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Значит, при $x \leq 6$, таких что $\sqrt{x^2-x-2} + x - 1 < 0$ решений нет.

III. Тогда $x \leq 6$, $\sqrt{x^2-x-2} + x - 1 \geq 0$.

$$\sqrt{x^2-x-2} + 5 \geq \sqrt{x^2-x-2} + x - 1 + 6 - x \Leftrightarrow$$

$$5 \geq 5.$$

То есть при таких x , что $x \leq 6$ и $\sqrt{x^2-x-2} + x - 1 \geq 0$ решение всегда будет x .

1). Если $x > 0$ и $x \in (-\infty; -1] \cup [2; +\infty)$, $x \geq 2$:

Тогда $\sqrt{x^2-x-2} + x - 1 \geq 0$, т.к. $\sqrt{x^2-x-2} \geq 0$ и $x-1 \geq 0$.

Значит, все значение $x \in [2; 6]$ являются решениями неравенства.

2). Если $x < 0$ и $x \in (-\infty; -1] \cup [2; +\infty)$, $x \leq -1$

Для этого, чтобы $\sqrt{x^2-x-2} + x \geq 1$ надо чтобы

$x^2 - x - 2$ было не меньше $(1-x)^2$. Опровергнуто при $x < 0$ поскольку $x^2 - x - 2 - (1-x)^2 = -3 + x < 0$, т.к. $x < 0$.

Получаем, что при $x < 0$, $\sqrt{x^2-x-2} + x \leq 1$. Значит,

при $x < 0$ у неравенства нет решений.

Проверив в итоге все случаи, мы получили, что решения неравенства являются отрезок $[2; 6]$. Ответ: $x \in [2; 6]$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.



- 1 2 3 4 5 6 7

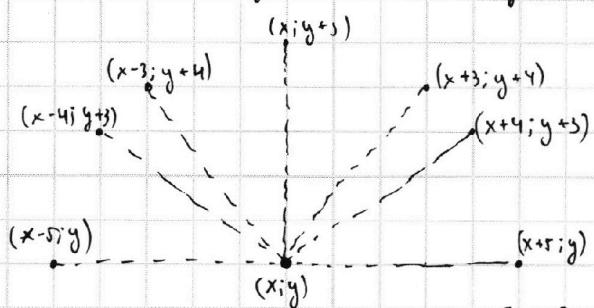
СТРАНИЦА
1 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

4. Рассмотрим произвольную точку на плоскости.

От неё вверх \downarrow можно провести 7 отрезков длиной

5 с концами в целых координатах:



Заметим, что если

провести \nearrow от любой

точки \nearrow какие-то два

таких отрезка, то их будем называть однозначными образами. Т.е. из одной точки можно будет

построить $C_7^2 - 1$ различных \nearrow или \nwarrow . (-1 т.к.

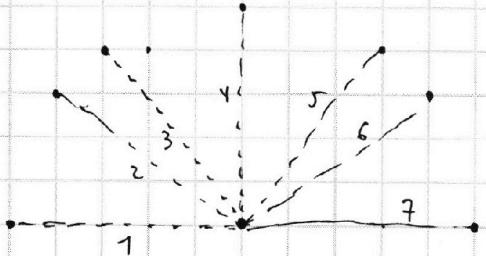
нельзя построить $(x-5; y)$, $(x; y)$ и $(x+5; y)$, а оставшиеся

можно). Посчитаем, сколько таких пар \nearrow получится

построив 8 нале $44 \cdot 44$.

$$C_7^2 - 1 = 20.$$

Для удобства продублируем отрезки:



Введём обозначение $a:b$,

которое \nearrow обозначает пару, содержащую

одинакий отрезки a и b из

какой-то точки

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

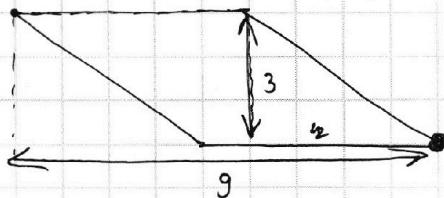
- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Для каждого возможного $a:b$ ($a \leq 7, b \leq 7$) подсчитайте, сколько таких $(x;y)$ находятся где проведение этих отрезков:

Пример рассуждение: где ровда ширина 1:2



Расстояние от края до края составляет:

- 1). по высоте: 3 см.
- 2). по длине: 9

Значит, в квадрат такой разбив можно провести из $(45 - 9)(45 - 3) = 36 \cdot 42$ таких.

По ходам рассуждения запишем таблицу:

ширина ровда	число способов выдрвать такие
1 : 2	36 · 42
1 : 3	37 · 41
1 : 5	37 · 41
1 : 6	36 · 42
2 : 3	38 · 38
2 : 4	37 · 41
2 : 5	38 · 38
2 : 6	37 · 39
3 : 5	39 · 37
3 : 4	36 · 42
1 : 4	40 · 40
4 : 7	40 · 40
4 : 5	36 · 42
3 : 6	38 · 38
4 : 6	37 · 41
5 : 6	38 · 38
2 : 7	36 · 42
3 : 7	37 · 41

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{array}{|c|c|} \hline & 37 \cdot 41 \\ \hline 3 : 7 & \\ \hline & 38 \cdot 42 \\ \hline 6 : 7 & \\ \hline \end{array}$$

Однако если считать все полученные числа, мы получим различные остатки, а именно те, которые содержат в себе либо отрезок 7, либо отрезок 1. (т.к. эти числа параллельны числом вида ..., а остаток "тысячного" тоже).

т.е. все ~~различные~~ с

$$\frac{4 \cdot 36 \cdot 42 + 4 \cdot 37 \cdot 41 + 2 \cdot 40 \cdot 40}{2} + 2 \cdot 36 \cdot 42 + 2 \cdot 37 \cdot 41 + 4 \cdot 38 \cdot 38 + 2 \cdot 37 \cdot 39 =$$

$\underbrace{\text{сумма кол-ва первых}}_{\text{типов}}$ $\underbrace{\text{сумма кол-во первых}}_{\text{типов}}$

1:2 ; 1:3 ; 1:4 ; 1:5 ; 1:6 ; 7:2 ; 7:3 ; 7:4 ; 7:5 ; 7:6 2:3 ; 2:4 ; 2:5 ; 2:6 ; 3:4 ; 3:5 ; 3:6 ; 4:5 ; 4:6 ;

$$= 4 \cdot 36 \cdot 42 + 4 \cdot 37 \cdot 41 + 4 \cdot 38 \cdot 38 + 2 \cdot 37 \cdot 39 + 40 \cdot 40$$

Ответ: $4 \cdot 36 \cdot 42 + 4 \cdot 37 \cdot 41 + 4 \cdot 38 \cdot 38 + 2 \cdot 37 \cdot 39 + 40 \cdot 40$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$5. 2^x \cdot 23 + 2025 = y^2 \Leftrightarrow 2^x \cdot 23 = y^2 - 2025 \Leftrightarrow$$

$$2^x \cdot 23 = (y-45)(y+45)$$

Пусть $y-45 = a$, тогда $2^x \cdot 23 = a \cdot (90+a) = a^2 + 90a$

Т.к. a - целое, $a^2 + 90a \vdots 23$

$$90 \equiv -2$$

Рассмотрим таблицу со всеми возможными остатками $a^2 + 90a$ при делении на 23.

a	a^2	$90a$	$90a + a^2$
0	0	0	0
1	1	21	22
2	4	19	0
3	9	17	3
4	16	15	8
5	2	13	15
6	13	11	1
7	3	9	12
8	18	7	2
9	12	5	14
10	8	3	11
11	6	1	4
12	6	22	7
13	8	20	5
14	12	18	7
15	18	16	11
16	3	14	17
17	13	12	2
18	2	10	12
19	16	8	2
20	9	6	15
21	4	4	8
22	1	2	3

Заметим, что $90a + a^2 \vdots 23$

только при $a \equiv 0 \pmod{23}$ и $a \equiv 2 \pmod{23}$

1). Если $a \equiv 2 \pmod{23}$ то все a будут

нечетными, кроме $a=2$.

при $a=2$, $x=3$, $y=47$ или

же $x=3$ и $y=-47$.

При нечетных a , $90a + a^2 \not\vdots 23$

являются нечетными, что противоречит условию решения равенства $2^x \cdot 23$.

(при $x=0$, а нулевымально).

2). Если $a \equiv 0 \pmod{23}$, $90a + a^2$ приобретет новые делители 23 и степеней двойки.

(ответ: $(3; 47); (3; -47)$)



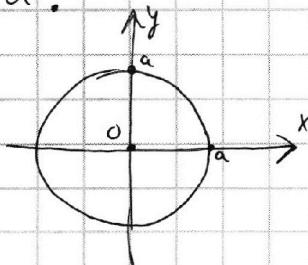
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input checked="" type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Мы можем помнить $x^2 + y^2 = a^2$ — это это окружность с центром в начале координат и радиусом a .



Тогда $y_1 \geq 0$ и $y_2 \leq 0$. $-y_1$

тогда $y_2^2 - 4y_2 - a > y_1^2 - 4y_1 - a$

$$\text{т.к. } y_1^2 - 4y_1 - a - y_2^2 + 4y_2 - a =$$

$$(y_2^2 - y_1^2) + 4(y_1 - y_2)$$

\Downarrow

\Downarrow

Т.е. для $0 < y \leq a$, $-y$ будет давать большее значение $y^2 - 4y - a$. Тогда максимальное значение

значение будем достигать в $y = -a$, т.к.

при $y_1 > y_2 \Rightarrow (y_1 < 0 \text{ и } y_2 < 0)$, $y_2^2 - 4y_2 - a > y_1^2 - 4y_1 - a$

$$\text{т.к. } y_2^2 - 4y_2 - a - y_1^2 + 4y_1 + a = (y_2^2 - y_1^2) + 4(y_1 - y_2)$$

\Downarrow

\Downarrow

Но минимальное значение y — это $-a$, т.к.

при $y < -a$, $x^2 < 0$, zero не может

$$\text{Значит: } a^2 + 4a - a = 6 \Leftrightarrow a^2 + 3a - 6 = 0$$

$$\text{Решаем уравнение и получаем } a_1 = \frac{-3 + \sqrt{33}}{2}$$

$$a_2 = \frac{-3 - \sqrt{33}}{2}$$

$$\text{Ответ: } \frac{-3 + \sqrt{33}}{2}; \frac{-3 - \sqrt{33}}{2}.$$

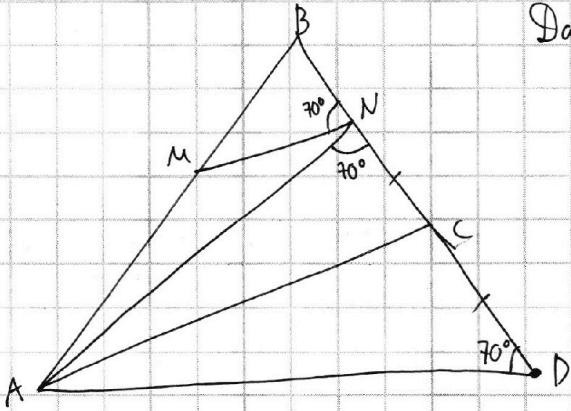
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Дано: $\angle MNB = \angle ANC = 70^\circ$

$$BN \cdot MA = 2BM \cdot NC$$

Найти: $\angle CAN$.

Решение: Продолжим

BC за точку C и

поставим точку D так,

$$\Rightarrow ND = 2NC$$

$$BN \cdot MA = 2BM \cdot NC \Rightarrow BN \cdot MA = BM \cdot ND$$

$$\Rightarrow \frac{BN}{ND} = \frac{BM}{MA} \quad \text{по т. Фалеса } MN \parallel AD \quad (\text{т.к. } \frac{BM}{AM} = \frac{BN}{ND}) \Rightarrow$$

$$\angle APB = \angle MNB = 70^\circ$$

$\triangle AND$ - равнобедренный, где AN и AD - дополнительные стороны (т.к. $\angle ANC = \angle APB = 70^\circ$)

значит AC - биссектриса $\angle NAD$ (т.к. AC - медиана и

$\triangle AND$ - равнобедренный).

$$\Rightarrow \angle CAN = \frac{\angle NAD}{2} = \frac{180^\circ - 70^\circ - 70^\circ}{2} = 20^\circ$$

Ответ: 20°



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{x^2 - x - 2} + x \geq 1$$

при $x \in (-1; 2)$ не имеет смысла

при $x \in [2; \infty) + \infty$, $\sqrt{x^2 - x - 2} > 0$, $x > 1 \Rightarrow \sqrt{x^2 - x - 2} + x \geq 1$

при $x \leq -1$:

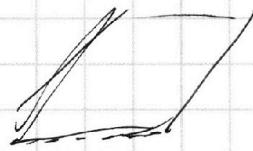
$$x^2 + 2x + 1 - x - 1 - 2 = x^2 + x - 2 \quad -x^2 + x + 2 = 2x$$

-1000

$$\sqrt{1000000 + 1000 - 2} - 1000$$

$$\sqrt{1000998} - 1000 \approx 1$$

$$(x+1)^2 = (x^2 + 2x + 1)$$



$$x^2 + x - 2 - x^2 - 2x - 1 = -x - 3 < 0$$

91

$$46^2 + 90 \cdot 46$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ .46 \\ \times 46 \\ \hline 276 \\ + 184 \\ \hline 2116 \\ \boxed{6256} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 6256 | 23 \\ -46 \\ \hline 165 \\ -161 \\ \hline 46 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 272 | 4 \\ -24 \\ \hline 32 \\ -32 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$a(a+90)$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА

из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.



- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$2\sqrt{x^2-x-2} + 2x \geq 2$$

$$7a^2 = N^5, N > 8$$

$$\sqrt{x^2-x-2} + x \geq 1 \quad \text{не угад. же. ауга.}$$

$$N = 7$$

$$x \geq 6, \sqrt{x^2-x-2} + x \geq 1$$

$$\begin{aligned} N = 7 & \quad a^2 = \frac{7^5}{7} = 7^4 \\ N = 14 & \quad a^2 = \frac{14^5}{7} = 7^4 \cdot 2^5 \\ N = 21 & \quad a^2 = 3 = \frac{21^5}{7} = 7^4 \cdot 3^5 \\ N = 28 & \quad a^2 = 4 = \frac{28^5}{7} = 7^4 \cdot 2^6 \\ & \quad 7^5 \cdot 2^6 = 7^2 \cdot 2^6 \end{aligned}$$

$$-7$$

$$(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$$

$$\sqrt{49+7-2} - 7 =$$

$$x^2 - x - 2 - x^2 + 2x - 1 = -3x - 3, \text{ при } x < -1 \text{ это } (0)$$

$$\sqrt{x^2-x-2} + 1$$

$$(x-1)^2 = x^2 + 1 - 2x = (4+1-4=1)$$

$$x^2 - x - 2 - x^2 - 1 + 2x = (-3)$$

$$\sqrt{9+1-2} - 1 \geq 1$$

$$x = -3$$

$$x$$

$$0 - 1 = -2$$

$$(1+3)^2 = 16$$

$$9+3-2 =$$

$$x \in [2; 6]$$

$$23 \cdot 2^x + 2025 = y^2$$

$$4646 =$$

$$46 \cdot 46 = (45+1)^2 = 2025 + 90 + 1 = 2146$$

$$(45+2)^2 = 2025 + \underline{\underline{180}} + 4 = 2209$$

$$\begin{array}{r} 184(2) \\ \underline{194} \quad 18 \\ \underline{6} \end{array}$$

$$2209 + 188 + 4 = 2401$$

$$192$$

$$47 \cdot 4$$

a	a^2	$90a$
0	0	0
1	1	-2
2	4	-8
3	9	-16
4	16	-24
5	25	-32
6	36	-40
7	49	-48
8	64	-56
9	81	-64
10	100	-72
11	121	-80
12	144	-88
13	169	-96
14	196	-104
15	225	-112
16	256	-120
17	289	-128
18	324	-136
19	361	-144
20	400	-152
21	441	-160
22	484	-168

$$81 + 12 =$$

$$\begin{array}{r} 2209 \\ 188 \\ \hline 329 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи **отдельно**.

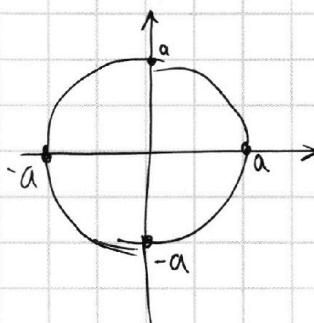
- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} & \textcircled{2} \cdot \underline{36 \cdot 42} + \textcircled{2} \cdot \underline{37 \cdot 41} + \textcircled{2} \cdot \underline{37 \cdot 41} + \textcircled{2} \cdot \underline{42 \cdot 36} + \textcircled{2} \cdot \underline{38 \cdot 38} + \textcircled{2} \cdot \underline{37 \cdot 41} + \textcircled{2} \cdot \underline{38 \cdot 38} + \textcircled{2} \cdot \underline{42 \cdot 36} + \\ & \textcircled{2} \cdot \underline{37 \cdot 39} \end{aligned}$$

$$6 \cdot 36 \cdot 42 + 6 \cdot 37 \cdot 41 + 4 \cdot 38 \cdot 38 + 2 \cdot 37 \cdot 39 + 2 \cdot 40 \cdot 40$$



$$\begin{aligned} & \sqrt{36-6-2} + 5 \geq \sqrt{26-6-2} + 6 - 1 + 0 \\ & \sqrt{28} + 5 \geq \sqrt{28} + 5 \\ & \sqrt{25-5-2} + 5 \geq \sqrt{25-5-2} + 5 - 1 + 1 \\ & 5 \geq 5 \\ & \sqrt{16-4-2} + 5 \geq \sqrt{16-4-2} + 4 - 1 + 2 \end{aligned}$$

$$\text{т.к. если } y_1 = -y_2, y_1 < 0, \text{ то } 5 > 5$$

$$\text{т.к. } y_1^2 - 4y_1 - a = y_2^2 + 4y_2 - a \geq y_2^2 - 4y_2 - a$$

$$\text{если } y_1 \text{ и } y_2 < 0, y_1 < y_2, \text{ то}$$

$$y_1^2 - 4y_1 - a = y_2^2 + 4y_2 + a = (y_1^2 - y_2^2) + 4(y_2 - y_1)$$

$$y^2 - 4y - a = 6$$

$$a^2 + 4a - a = 6$$

$$a^2 + 3a - 6 = 0$$

$$D = 9 + 24 = 33$$

$$a_1 = \frac{-3 + \sqrt{33}}{2}$$

$$a_2 = \frac{-3 - \sqrt{33}}{2}$$

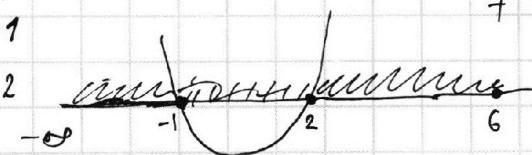
$$\sqrt{1-1-2} + 5 \geq \frac{7 \cdot 2^{10}}{7}$$

$$\sqrt{4-2-2}$$

$$D = 9 + 4 = 9$$

$$x_1 = -1$$

$$x_2 = 2$$



$$7 \cdot 2^{10}$$

$$x \geq 6 :$$

$$\sqrt{x^2 - x - 2} + 5 \geq 0, \sqrt{x^2 - x - 2} + x \geq 1, |6-x| < 0 \quad 6 - x \leq 0$$

$$\sqrt{x^2 - x - 2} + 5 \geq \sqrt{x^2 - x - 2} + x - 1 - 6 + x \quad \text{значит, } x \leq 6.$$

$$\text{если } x \in (-\infty; -1]$$

$$5 \geq 2x - 7$$

$$x \leq 6$$

$$\begin{aligned} & \sqrt{x^2 - x - 2} + 5 \geq \sqrt{x^2 - x - 2} + x - 1 + 6 - x \\ & \sqrt{x^2 - x - 2} + 5 \geq 1 - x - \sqrt{x^2 - x - 2} + 6 - x \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1

2:4 - 6:7
1:3 - 5:7
1:5 - 3:7
1:6 - 2:7
2:3 - 5:6
2:4 - 4:6
2:5 - 3:6
2:6 - 2:6
3:5 - 3:5 $\frac{45}{45}$
3:4 - 4:5
1:4 - 4:7

1:2:
5
3
4
5
5
4
5

1:2, 2:4, 3:7
1:3, 2:5, 4:5
1:4, 2:6, 5:6
1:5, 2:7, 7:7
1:6, 3:4, 5:6
1:7, 3:5, 5:7
2:3, 3:6, 6:7

45
42
1 11 45
11:42

$45-10=35$
~~45-10=35~~

(2.36.42)
(2.37.41)
2.35.4
2.

2.3 $C_5^2 = 10$
1:L
1:3
1:4
1:5
1:6
7:2
7:3
7:4
7:5
7:6

1:2
7:7
1:3;
(2.38.38)

2:4 8 на 4
(2.37.41)

5:5
2.40.40

2:5 3mo 7 на 7
2.38.38

2:6 3mo 8 на 6
2.37.39

3:5 3mo 6.8
37.39

3:4 3mo 9 на 3
2.42.36



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

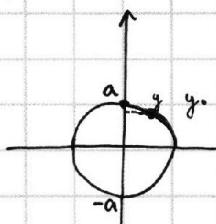
- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 + y^2 = a^2$$

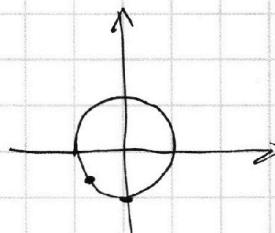
$$y^2 - 4y - a = 6$$



$$\begin{aligned} y_0^2 - 4y_0 - a &= 0 \\ y_1^2 - 4y_1 - a &= 0 \end{aligned}$$

$$(y_1 - y_0)(y_1 + y_0) - 4(y_1 - y_0) = (y_1 - y_0)(y_1 + y_0 - 4)$$

$f(y_1) > f(y_0)$ если $y_1 + y_0 > 4$



$$(-a)^2 + 4a - a = 6$$

$$a^2 + 3a - 6 = 0$$

$$\Delta = 9 + 36 - 24 = 33$$

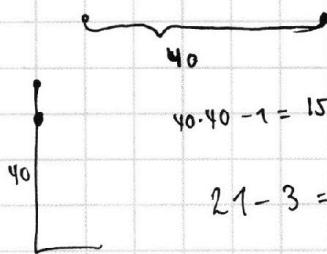
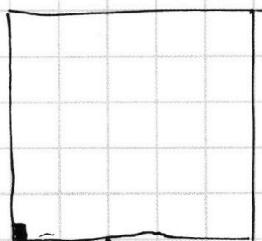
$$a_1 = \frac{-3 + \sqrt{33}}{2}$$

$$a_2 = \frac{-3 - \sqrt{33}}{2}$$

$$\begin{array}{r} 90 \\ 693 \\ \hline 21 \end{array}$$

$$C_{\frac{2}{7}} = \frac{7!}{5! \cdot 2!} = \frac{6 \cdot 7}{2} = 21 - 1 = 20$$

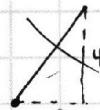
квадратов



$$40 \cdot 40 - 1 = 1599 \text{ квадратов}$$

$$21 - 3 = 18$$

$$C_5^2 = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$$



$$\sqrt{9 - 3 - 2} + 3 - 1 \geq 0$$

$$C_4^2 = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6$$

$$x^2 - x - 2 - 1 - x + 2x$$

$$1 + x^2 - 2x - x^2 + x + 2 = 3 - x - x$$

$$x - 3$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$BN \cdot MA = 2 BM \cdot NC$

$\angle CAN = ?$

$\frac{BN}{2NC} = \frac{BM}{MA}$

$\frac{BN}{BM} = \frac{NP}{AM}$

$NP = 2NC$

$\frac{BN}{NP} = \frac{BM}{MA}$

$\sqrt{36 - 6 - 2} + 6$

1	2	3	4	5	6	7
V	V	V	V	V	V	V

$|\sqrt{y} + 5| \geq |\sqrt{y} + x - 1| + |6 - x|$

$\sqrt{y} + x = 1$

$\sqrt{x^2 - x - 2} + x = 1$

$x^2 - x - 2 +$

$x^2 - x - 2 \geq 0$

$x^2 - x \geq 2$

$x(x-1) \geq 2$

$x_1 =$

$x_2 = \sqrt{x^2 - x - 2} + x \geq 1$

$D = 1 + 4 = 5$

$x_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$

$x_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$

$0,5 - \frac{\sqrt{5}}{2} < -1$

$5 \geq 2x - 7 \Rightarrow x \leq 6$

$2\sqrt{x^2 - x - 2} + 5 \geq 7 - 2x$

$2\sqrt{x^2 - x - 2} \geq 2 - 2x$

$\sqrt{x^2 - x - 2} \geq 1 - x$

$2\sqrt{x^2 - x - 2} \geq -5$

$2\sqrt{x^2 - x - 2} \geq 10$

$2\sqrt{x^2 - x - 2} \geq 10$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$n \\ (n-1)! + n! + (n+1)! \quad : 289 = 17^2$$

$$(n-1)! = x$$

$$x + x \cdot n + x(n+1)h = xn^2 + 2x \cdot h + x \quad : 17^2$$

$$23 \cdot 2^x = 90a + a^2$$

$$23 \cdot 2^{x+2} = 180b + b^2$$

$$a(90+a)$$

$$\begin{matrix} :2 & :2 \end{matrix}$$

$$15! + 15! \cdot 16 + 15! \cdot 16 \cdot 17 =$$

$$15! (1+16+16 \cdot 17) = 1+16+272 = 15! \cdot 289$$

$$289-17 = 272$$

$$\sum -28 = N^5 \quad (N > 8)$$

$$\boxed{3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5}$$

$$(a-3)^2 + (a-2)^2 + (a-1)^2 + a^2 + (a+1)^2 + (a+2)^2 + (a+3)^2$$

$$\underline{a^2} = \underline{-9} + \underline{a^2} + \underline{4} + \underline{a^2} + \underline{1} + \underline{a^2} + \underline{a^2} + \underline{1} + \underline{a^2} + \underline{4} + \underline{a^2} + \underline{9}$$

$$7a^2 + 28 = 28 = N^5$$

$$7a^2 = N^5 \quad \begin{matrix} 270-3=267 \\ 2 \rightarrow 1 \end{matrix} \quad \boxed{a \geq 4}$$

$$225-18 = 207 \quad \begin{matrix} 145 \\ 7 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 145 \\ 7 \end{matrix} = \frac{7 \cdot 2^5}{7} = 7^4 \cdot 2^5$$

$$\therefore \frac{7^5}{7} = 7^4$$

$$\boxed{\sqrt{x^2-x-2} + 5 \geq \sqrt{x^2-x-2} + x-1 + |6-x|}$$

$$x^2-x-2 = 0$$

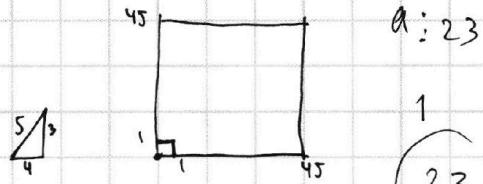
$$\sqrt{a} + 5 \geq \sqrt{a} + x-1 + |6-x|$$

$$\boxed{47a^2+3}$$

$$2^{x+2} \cdot 23 = (b-90)(b+90) \quad b(b+180)$$

$$\begin{matrix} 23 \\ 46 \\ 92 \\ 184 \end{matrix}$$

$$23 \cdot 2^{x+2} = b^2 + 180b$$



$$a : 23$$

$$\boxed{23}$$

$$(n-1)! \cdot (n+1)^2$$

$$\begin{matrix} h-1 \\ n < 16 \end{matrix} \quad \boxed{n=16}$$

$$\begin{matrix} (n-16)! : 17 \\ (n+1)^2 \leq 17 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 17 \\ 119 \\ 17 \end{matrix}$$

$$23 \cdot 2^x + 2025 = y^2$$

$$900 - 3 = 897 \quad \begin{matrix} 23 \\ 60 \\ 23 \end{matrix} \quad \boxed{39}$$

$$\frac{7^5 \cdot 2^{10}}{7} = 7^4 \cdot 2^{10} = (7^2 \cdot 2^3)^2 \quad \boxed{28}$$

$$23 \cdot 2^x + 2025 = 45^2 = y^2$$

$$23 \cdot 2^x = (y-45)(y+45)$$

$$23 \cdot 2^x = a \cdot (90+a)$$

$$a^2 + 90a - 23 \cdot 2^x = 0$$

$$\Delta = 8100 + 2^{x+2} \cdot 23$$

$$a = \frac{-90 \pm \sqrt{\Delta}}{2}$$

a - целое