



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ  
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ



11 КЛАСС. Вариант 1

- ⊕ 1. [4 балла] Натуральные числа  $a, b$ , с таковы, что  $ab$  делится на  $2^9 3^{10} 5^{10}$ ,  $bc$  делится на  $2^{14} 3^{13} 5^{13}$ ,  $ac$  делится на  $2^{19} 3^{18} 5^{30}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник  $ABC$ . Окружность, касающаяся прямой  $BC$  в точке  $B$ , пересекает высоту  $CD$ , проведённую к гипотенузе, в точке  $F$ , а катет  $AC$  – в точке  $E$ . Известно, что  $AB \parallel EF$ ,  $AD : DB = 3 : 1$ . Найдите отношение площади треугольника  $ABC$  к площади треугольника  $CEF$ .
- ⊕ 3. [4 балла] Решите уравнение  $5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$ .
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

- ⊕ 5. [5 баллов] Некоторые числа  $x$  и  $y$  удовлетворяют равенствам
- $$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2}(3^{11}) - 8.$$
- Найдите все возможные значения произведения  $xy$ .
6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0;0)$ ,  $P(-14;42)$ ,  $Q(6;42)$  и  $R(20;0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$ .
7. [6 баллов] Дано треугольная пирамида  $SABC$ , медианы  $AA_1, BB_1$  и  $CC_1$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $M$ . Сфера  $\Omega$  касается ребра  $AS$  в точке  $L$  и касается плоскости основания пирамиды в точке  $K$ , лежащей на отрезке  $AM$ . Сфера  $\Omega$  пересекает отрезок  $SM$  в точках  $P$  и  $Q$ . Известно, что  $SP = MQ$ , площадь треугольника  $ABC$  равна 90,  $SA = BC = 12$ .
- а) Найдите произведение длин медиан  $AA_1, BB_1$  и  $CC_1$ .
- б) Найдите двугранный угол при ребре  $BC$  пирамиды, если дополнительно известно, что  $\Omega$  касается грани  $BCS$  в точке  $N$ ,  $SN = 4$ , а радиус сферы  $\Omega$  равен 5.



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                                   | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 1.

Пусть  $a_2; a_3; a_5$  - числа двоек, трех и пятерок в разложении на простые числа  $a$ ; аналогично введен

 $b_2; b_3; b_5$ ;  $c_2; c_3; c_5$ 

$$\left. \begin{array}{l} 1) ab : 2^9 \Rightarrow a_2 + b_2 \geq 9 \\ bc : 2^{14} \Rightarrow b_2 + c_2 \geq 14 \\ ac : 2^{19} \Rightarrow a_2 + c_2 \geq 19 \end{array} \right\} +$$

$$2(a_2 + b_2 + c_2) \geq 42$$

$$a_2 + b_2 + c_2 \geq 21$$

$$\left. \begin{array}{l} 2) ab : 3^{10} \Rightarrow a_3 + b_3 \geq 10 \\ bc : 3^{13} \Rightarrow b_3 + c_3 \geq 13 \\ ac : 3^{18} \Rightarrow a_3 + c_3 \geq 18 \end{array} \right\} +$$

$$2(a_3 + b_3 + c_3) \geq 41$$

$$a_3 + b_3 + c_3 \geq 21$$

$$\left. \begin{array}{l} 3) ab : 5^{10} \Rightarrow a_5 + b_5 \geq 10 \\ bc : 5^{13} \Rightarrow b_5 + c_5 \geq 13 \\ ac : 5^{18} \Rightarrow a_5 + c_5 \geq 18 \end{array} \right\} +$$

$$2(a_5 + b_5 + c_5) \geq 53$$

$$a_5 + b_5 + c_5 \geq 27$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                                   | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Тогда где числа  $abc$  такие

$$abc \geq 2^4 \cdot 3^{21} \cdot 5^{27}$$

$$\text{но } ac : 5^{30} \Rightarrow abc : 5^{30} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow abc \geq 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$$

Пример из  $abe = 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$

$$\text{Число } a = 2^7 \cdot 3^8 \cdot 5^{15}$$

$$b = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^0$$

$$c = 2^{12} \cdot 3^{11} \cdot 5^{15}$$

$$abc = 2^4 \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$$

$$ab = (2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{15}) : 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10}$$

$$bc = (2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{15}) : 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13}$$

$$ac = (2^{19} \cdot 3^{19} \cdot 5^{30}) : 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30}$$

$$\text{Ответ: } 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



- |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                                   | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

### Задача 3

$$5 \arcsin(\sin x) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$5 \arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - x)) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin t \leq \frac{\pi}{2} \quad \forall t \Rightarrow -\frac{5\pi}{2} \leq 5 \arcsin t \leq \frac{5\pi}{2}$$

$$\forall t \Rightarrow -\frac{5\pi}{2} \leq x + \frac{\pi}{2} \leq \frac{5\pi}{2}$$

$$-3\pi \leq x \leq 2\pi$$

1)  $\sin(\frac{\pi}{2} - x) \in \text{I}$  или  $\text{IV}$  четверти, то  
найдите число  $k \in \mathbb{Z}$ , что

$$5\left(\frac{\pi}{2} - x + 2\pi k\right) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{5\pi}{2} - 5x + 10\pi k = x + \frac{\pi}{2}$$

$$2\pi + 10\pi k = 6x$$

$$x = \frac{\pi}{3} + \frac{5\pi k}{3}$$

$$-3\pi \leq \frac{\pi}{3} + \frac{5\pi k}{3} \leq 2\pi$$

$$-9 \leq 1 + 5k \leq 6$$

$$-10 \leq 5k \leq 5$$

$$-2 \leq k \leq 1$$

• Если  $k = -2$      $x = \frac{\pi}{3} - \frac{10\pi}{3}$

$$x = -3\pi \quad \text{ЧИСЛО}$$

• Число  $x = -2\pi \frac{2}{3} \frac{5\pi}{3} \frac{10\pi}{3}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



- |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                                   | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{\pi}{2} - x = \frac{\pi}{2} + 3\pi = \frac{7\pi}{2} \in \text{области определения}$$

арккосуса. Проверка:  $5 \arccos \cos \frac{-3\pi}{2} = \cancel{\frac{5\pi}{2}} + \frac{\pi}{2}$

$$5 \arccos \frac{-1}{2} = 4\pi - \frac{5\pi}{2}$$

~~проверка~~  $-\frac{5\pi}{2} = -\frac{5\pi}{2}$

• Если  $k=-1$   $x = \frac{\pi}{3} - \frac{5\pi}{3}$

$$x = -\frac{4\pi}{3}$$

$$\frac{\pi}{2} - x = \frac{\pi}{2} + \frac{8\pi}{3} = \frac{11\pi}{6} \in \text{IV четв.}$$

Проверка:  $5 \arccos \cos -\frac{4\pi}{3} = \cancel{\frac{5\pi}{2}} - \frac{4\pi}{3} + \frac{\pi}{2}$

$$5 \arccos \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{5\pi}{6}$$

$$5 \cdot \left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{5\pi}{6}$$

верно

• Если  $k=0$   $x = \frac{\pi}{3}$  (В цепочке не указано временно, проверка не проводится, ~~затем~~)

$$5 \arccos \cos \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}$$
  $\text{т.к. } \frac{\pi}{2} - x \in \text{I четв.}$

$$5 \cdot \arccos \frac{1}{2} = \frac{5\pi}{6}$$

$$\frac{5\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$$

верно

(II четв.)

• Если  $k=1$   $x = 2\pi$

$$5 \arccos (\cos 2\pi) = 2\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$5 \arccos (1) = \frac{5\pi}{2}$$

$$\frac{5\pi}{2} = \frac{5\pi}{2}$$

верно



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                                   | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порядок QR-кода ведонустима!

2) Wenn  $(\frac{\pi}{2} - x) \in \text{II}$  oder  $\text{III}$  rechts begr., so

ungefüllt verhindert  $n \in \mathbb{Z}$ , wo

$$5 \cdot \left( -\left( \pi + \left( \frac{\pi}{2} - x \right) \right) \right)^{2m} = x + \frac{\pi}{2}$$

$$5 \cdot \left( -\left( \frac{3\pi}{2} - x \right) \right)^{+2\pi n} = x + \frac{\pi}{2}$$

$$-\frac{15\pi}{2} + 5x = x + \frac{\pi}{2}$$

$$4x = 8\pi + 2\pi h$$

$$R = 2\pi + \frac{\pi n}{2}$$

$$-\frac{5\pi}{2} \leq 2\pi + \frac{j\pi}{2} \leq \frac{5\pi}{2}$$

$$-405 \leq 4n + n \leq 5$$

$$-9 \leq h \leq 1$$

$$\bullet \quad h = -g \quad x = 2\pi - \frac{g\tau}{z}$$

$$x = -\frac{5\pi}{2}$$

$$5 \arcsin \left( \cos \left( -\frac{5\pi}{2} \right) \right) = -\frac{5\pi}{2} + \frac{\pi}{2}$$

$$5 \arcsin 0 = -2\pi$$

$$\theta = -2\pi$$

nebulae

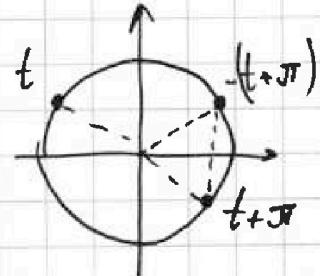
$$\bullet n = -8 \quad x = 2\pi - 4\pi$$

$$\ell = -2\pi$$

$$5 \text{ arc sm } \cos(-2\pi) = -2\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$5 \operatorname{arcsec} m 1 = -\frac{3\pi}{7}$$

$$\frac{5\pi}{2} = -\frac{3\pi}{2} \text{ - не верно}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



- |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\bullet n = -7 \quad x = 2\pi - \frac{7\pi}{2}; \quad x = -\frac{3\pi}{2}$$

$$5 \arccos \cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}$$

$$\cancel{5} \quad 0 = -\pi$$

неверно

$$\bullet n = -6 \quad x = 2\pi - 3\pi; \quad x = -\pi$$

$$5 \arccos \cos(-\pi) = -\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$5 \arccos(-1) = -\frac{\pi}{2}$$

$$-\frac{5\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}$$

неверно

$$\bullet n = -5 \quad x = 2\pi - \frac{5\pi}{2}; \quad x = -\frac{\pi}{2}$$

$$5 \arccos \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}$$

$$5 \arccos 0 = 0$$

$$\frac{0=0}{\text{верно}}$$

$$\bullet n = -4 \quad x = 2\pi - 2\pi; \quad x = 0$$

$$5 \arccos \cos 0 = \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{5\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

неверно

$$\bullet n = -3 \quad x = 2\pi - \frac{3\pi}{2}; \quad x = \frac{\pi}{2}$$

$$5 \arccos \cos \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{0=\pi}{\text{неверно}}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                            |                            |                                       |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

•  $n = -2 \quad x = 2\pi - \pi; \quad x = \pi$

$$5 \arccos \cos \pi = \pi + \frac{\pi}{2}$$

$$-\frac{5\pi}{2} = \cancel{-\frac{5\pi}{4}} \frac{3\pi}{2}$$

неверно

•  $n = -1 \quad x = 2\pi - \frac{\pi}{2}; \quad x = \frac{3\pi}{2}$

$$5 \arccos \cos \frac{3\pi}{2} = \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{2}$$

$$0 = 2\pi$$

неверно

•  $n = 0 \quad x = 2\pi$

$$5 \arccos \cos 2\pi = 2\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{5\pi}{2} = \frac{5\pi}{2}$$

верно

•  $n = 1 \quad x = 2\pi + \frac{\pi}{2}; \quad x = \frac{5\pi}{2}$

$$5 \arccos \cos \frac{5\pi}{2} = \frac{5\pi}{2} + \frac{\pi}{2}$$

$$0 = 3\pi$$

неверно

Ошибки:  $\sqrt[5]{2}, \sqrt[5]{3}, \sqrt[5]{5}$

Ответы:  $\left\{ -3\pi, -\frac{4\pi}{3}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, 2\pi \right\}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                            |                            |                            |                                       |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input checked="" type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ

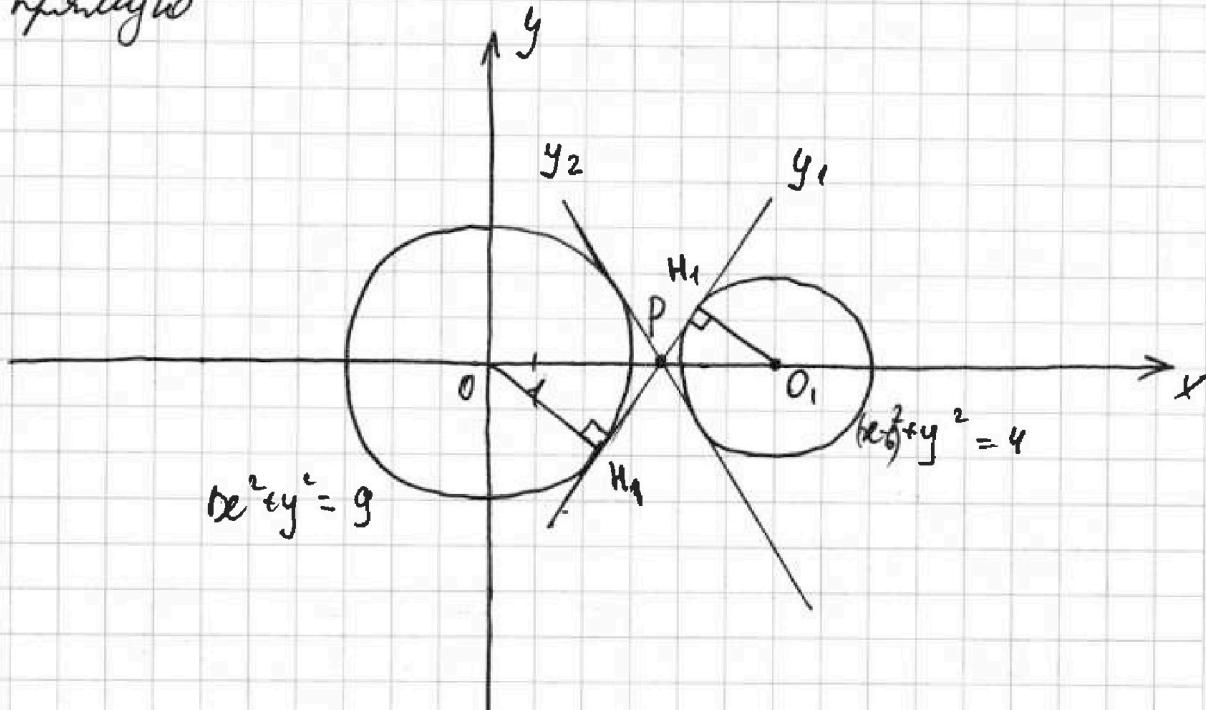
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

### Задача 4

$$\begin{cases} ax + by - 3b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \\ y = -\frac{a}{2}x + \frac{3}{2}b \quad (1) \\ x^2 + y^2 = 9 \quad (2) \\ (x-6)^2 + y^2 = 4 \quad (3) \end{cases}$$

В плоскости  $Oxy$  уравнение 2 и 3  
задают окружности; 1 - прямую

принимая



Две окружности имеют 4 общих  
точки, чтобы система имела 4 решения  
на прямой должны пересекать обе окружности.  
Заметим, что всякая прямая координатная

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                                   | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ.

нашими хин у прямых  $y_1$  и  $y_2$  имеем  
изображенные хинами меньшего  $k_2$  и  
большего  $k_1$  чисел не более двух  
пересечений с ограницами.

Для оставшихся же прямых чиние  
подбрасываем свободные числа, что  
будет и так.

Найдём  $k_1$  и  $k_2$ . Проведём радиусы  
 $OH \perp y_1$ ;  $OH_1 \perp y_1$ ; пусть  $y_1 \cap O_x = P$   
 $\triangle OPN \sim \triangle O_1PH_1 \Rightarrow \frac{OP}{O_1P} = \frac{ON}{O_1H_1} = \frac{3}{2}$   
но  $OO_1 = 6 \Rightarrow OP = \frac{3}{5} \cdot 6; O_1P = \frac{2}{5} \cdot 6 = \frac{12}{5}$

$$H_1P = \sqrt{O_1P^2 - O_1H_1^2} = \sqrt{\frac{12^2}{5^2} - 2^2} =$$
$$= \frac{1}{5} \sqrt{12^2 - 10^2} = \frac{1}{5} \sqrt{2 \cdot 22} = \frac{2\sqrt{11}}{5}$$

$$k_1 = \frac{O_1H_1}{H_1P} = \frac{2}{\frac{2\sqrt{11}}{5}} = \frac{5}{\sqrt{11}} = \frac{5\sqrt{11}}{11}$$

аналогично  $k_2 = -\frac{5\sqrt{11}}{11}$

Причём условие задачи уточнено, что

число  $a$  то

$$-\frac{5\sqrt{11}}{11} < -\frac{a}{2} < \frac{5\sqrt{11}}{11}$$

$$-\frac{10\sqrt{11}}{11} < -a < \frac{10\sqrt{11}}{11}$$

$$a \in \left(-\frac{10\sqrt{11}}{11}; \frac{10\sqrt{11}}{11}\right) \text{ Ответ: } \left(-\frac{10\sqrt{11}}{11}; \frac{10\sqrt{11}}{11}\right)$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                            |                            |                            |                            |                                       |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input checked="" type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 5

$$\bullet \log_3^4 x + 6 \log_3 x = \log_3 x^2 - 243 - 8$$

ОДЗ:  $x > 0; x \neq 1$

$$\log_3^4 x + \frac{6}{\log_3 x} = \frac{1}{\log_3^5 x^2} - 8$$

$$\log_3^4 x + \frac{6}{\log_3 x} = \frac{1}{\frac{2}{5} \log_3 x} - 8$$

$$\log_3 x = t$$

$$t^4 + \frac{6}{t} = \frac{5}{2t} - 8 \quad | \cdot 2t \neq 0$$

~~$$2t^5 + 12 = 5 - 16t$$~~

$$2t^5 + 16t = -7$$

$$\bullet \log_3^4 (5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2} (3^4) - 8$$

ОДЗ:  $y > 0; y \neq \frac{1}{5}$

$$\log_3^4 (5y) + \frac{2}{\log_3 (5y)} = \frac{1}{\frac{2}{11} \log_3 (5y)} - 8$$

$$\log_3 (5y) = z$$

$$z^4 + \frac{2}{z} = \frac{11}{2z} - 8 \quad | \cdot 2z \neq 0$$

$$2z^5 + 16z = 7$$

$$\bullet \text{Итоги} \quad 2t^5 + 16t + 2z^5 + 16z = 0$$

$$t^5 + z^5 + 8(t+z) = 0$$

$$(t+z) P(\frac{t+z}{8}) + 8(t+z) = 0$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                                   | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

**МФТИ**

нде  $p(t, z)$  - неотрицат. функция

4-й степенни  $> 0$  при  $t \neq t, z$

Тогда +.к.  $p(t, z) + 8 > 0$  и

$t+z=0$  - единств. решение

$$\log_3 x + \log_3 5y = 0$$

$$\log_3 5xy = 0$$

$$5xy = 1$$

$$xy = \frac{1}{5}$$

$$\text{Одн.р.: } \frac{1}{5}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                                     |                                     |                                     |                                     |                                     |                                     |                          |
|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1                                   | 2                                   | 3                                   | 4                                   | 5                                   | 6                                   | 7                        |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

*Задача 1*

$$ab = k \cdot 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10}; \quad bc = m \cdot 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13},$$

$$ac = p \cdot 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30}, \text{ где } k, m, p \in N$$

$$\frac{ab \cdot bc}{ac} = \frac{k \cdot 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10} \cdot m \cdot 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13}}{p \cdot 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30}}$$

$$b^2 = \frac{km}{p} \cdot 2^4 \cdot 3^5 \cdot 5^{-7}$$

~~Все эти числа должны делить 3~~

$$\frac{bc \cdot ac}{ab} = \frac{m \cdot 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13} \cdot p \cdot 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30}}{k \cdot 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10}}$$

$$c^2 = \frac{mp}{k} \cdot 2^{24} \cdot 3^{21} \cdot 5^{33}$$

$$\frac{ab \cdot ac}{bc} = \frac{k \cdot 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10} \cdot p \cdot 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30}}{m \cdot 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13}}$$

$$a^2 = \frac{kp}{m} \cdot 2^{14} \cdot 3^{15} \cdot 5^{27}$$

$$a^2 b^2 c^2 = \frac{kp}{m} \cdot 2^{14} \cdot 3^{15} \cdot 5^{27} \cdot \frac{km}{p} \cdot 2^4 \cdot 3^5 \cdot 5^{-7} \cdot \frac{mp}{k} \cdot 2^{24} \cdot 3^{21} \cdot 5^{33}$$

$$a^2 b^2 c^2 = mpk \cdot 2^{42} \cdot 3^{41} \cdot 5^{53}$$

$$abc \in N \Rightarrow (mpk)_{\text{намн}} = 3 \cdot 5 \quad \text{и решена}$$

$$abc \geq 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{27}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                                     |                                     |                                     |                                     |                          |                          |                          |
|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                                   | 2                                   | 3                                   | 4                                   | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается честовиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

~~Зададим, таким, что степень  
каждого множителя не может быть  
меньше чем  $b, ab, bc, ac$~~

~~Почему  $(abc)_{\text{наим}} = 2^u \cdot 3^v \cdot 5^w$~~

~~Приведём пример:~~

~~пусть  $a = 2^7 \cdot 3^4 \cdot 5^{15}$~~

~~$b = 2^2 \cdot 3^0 \cdot 5^{10}$~~

~~$c = 2^{12} \cdot 3^{14} \cdot 5^{15}$~~

~~Почему  $a \cdot b \cdot c = 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$~~

~~$a \cdot b = 2^9 \cdot 3^9 \cdot 5^{15}$~~

~~Почему~~ ~~зададим, что~~



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

5

6

7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

5

6

7

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$3(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 33$$

$$(y_2 - y_1) : 3$$

$$y_2 - y_1 = 3$$

$$x_2 - x_1 = 10$$

$$y_2 - y_1 = 6$$

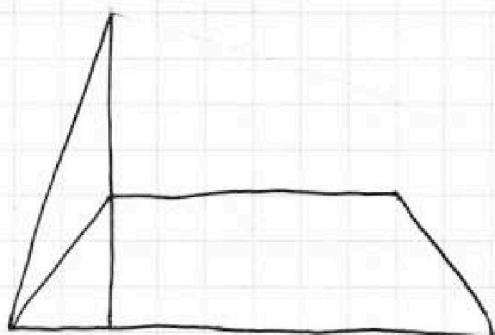
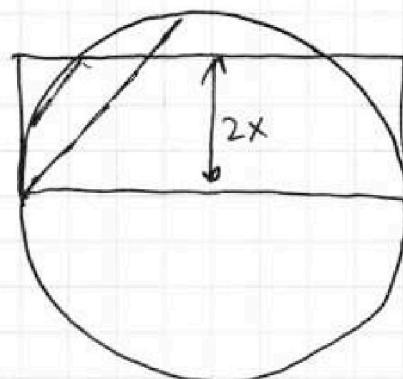
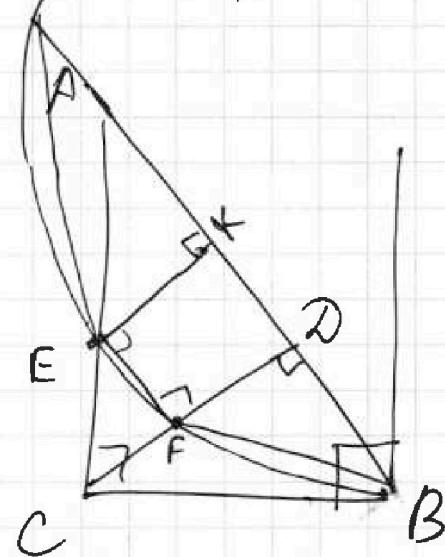
$$x_2 - x_1 = 9$$

$$y_2 - y_1 = 9$$

$$x_2 - x_1 =$$

$$-19 \quad -8$$

$$-8 - (-19)$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                            |                            |                            |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ

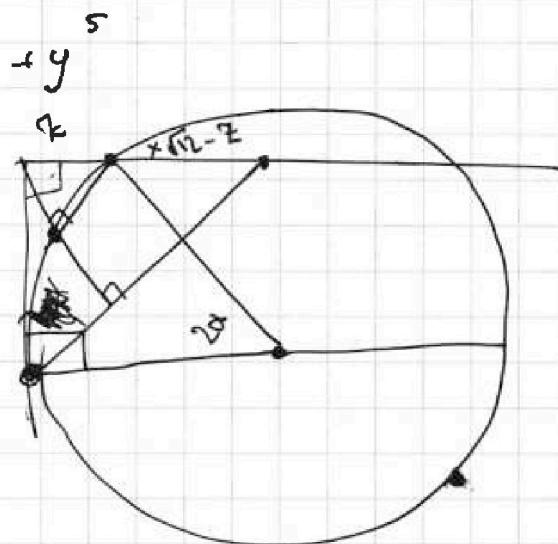
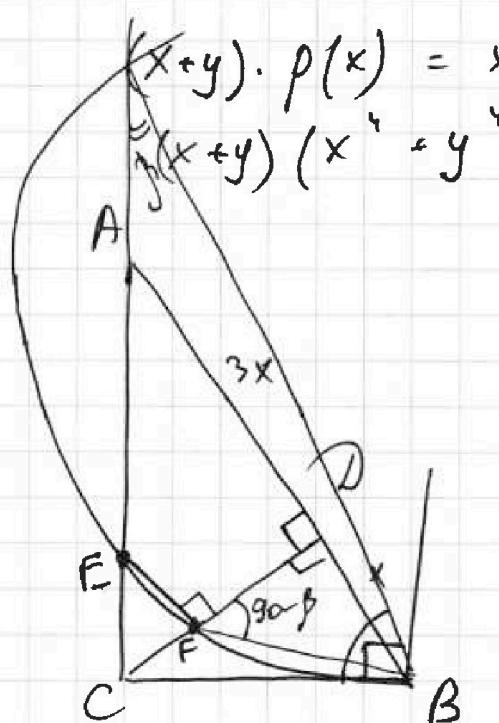
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Черт.

$$x^5 + y^5 + 8(xy) = 0$$

реш

$$x^5 + y^5 = 0$$



$$CD = x\sqrt{3}$$

$$BE = \sqrt{x^2 + 3x^2} = 2x$$

$$AC = \sqrt{9x^2 + 3x^2} = x\sqrt{12}$$

$$\begin{aligned} 10 &= 10 + 0 &= 9 + 1 &= 8 + 2 \\ 21 \rightarrow 13 &= 0 + 13 &= 1 + 12 &= 2 + 1 \end{aligned}$$

$$\rightarrow 18 = 10$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

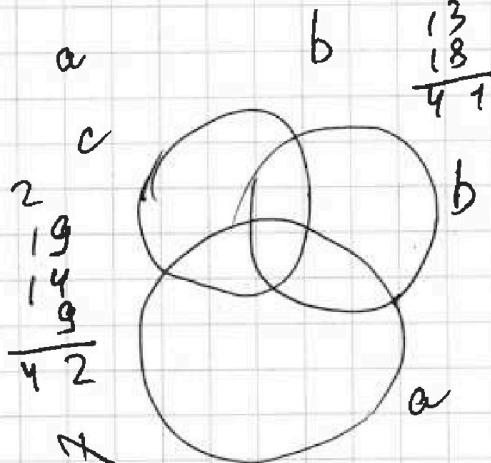
Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Использование QR-кода недопустимо!

$$2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30} = ab \cdot c$$



$$25 - 19 = 6$$

$$10 + 13 - 18 = 5$$

$$10 + 13 - 30 = -7$$

$$\frac{ab \cdot bc}{ac} = b^2$$

$$\frac{2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10} \cdot 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13}}{2^{10} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30}} =$$

$$b^2 = \frac{k \cdot 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13} \cdot 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30}}{2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10}} = 2^{24} \cdot 3^{22} \cdot 5^{36}$$

$$b^2 : 2^{24} \cdot 3^{21} \cdot 5^{36}$$

$$b : (2^{12} \cdot 3^{11} \cdot 5^{18})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -3\pi \\ \pi/3 \\ \pi/2 \\ 2\pi \end{array} \right|$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



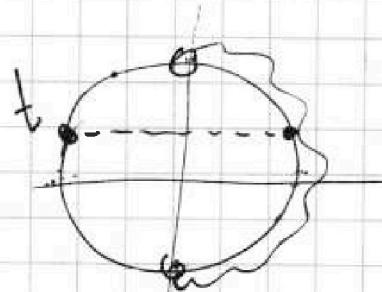
- |                            |                            |                            |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$5 \arccos(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$5 \arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - x)) = x + \frac{\pi}{2}$$



$$5(\frac{\pi}{2} - x) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$\arcsin t \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5 \arcsin t \in [-\frac{5\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}]$$

$$\arccos(\cos(-\frac{5\pi}{6})) =$$

$$= \arccos(-\frac{1}{2})$$

$$-\frac{5\pi}{2} \leq x + \frac{\pi}{2} \leq \frac{5\pi}{2}$$

$$-3\pi \leq x \leq 2\pi$$

$k \in \mathbb{Z}$ , если  $\frac{\pi}{2} - x \in \text{I или IV четверти}$ , то

$$5(\frac{\pi}{2} - x + 2\pi k) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{5\pi}{2} - 5x + 10\pi k = x + \frac{\pi}{2}$$

$$10\pi k + 2\pi = 6x$$

$$x = \frac{5\pi k}{3} + \frac{\pi}{3}$$

$$-3\pi <$$

$\Sigma_m^n$

если  $\frac{\pi}{2} - x \in \text{II или III четверти}$ , то

$$\pi + (\frac{\pi}{2} - x) + 2\pi n$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи.

решение которой представлено на странице:



 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима.

$$\begin{array}{c|ccccc} & \text{S} & \text{G} & \text{S} & \text{G} & \text{S} \\ \text{S} & \text{S} & \text{S} & \text{S} & \text{S} & \text{S} \\ \text{G} & \text{G} & \text{G} & \text{G} & \text{G} & \text{G} \\ \text{S} & \text{S} & \text{S} & \text{S} & \text{S} & \text{S} \\ \text{G} & \text{G} & \text{G} & \text{G} & \text{G} & \text{G} \\ \text{S} & \text{S} & \text{S} & \text{S} & \text{S} & \text{S} \end{array}$$

$$C = (S_f + S_Z)z + (f + Z)g$$

$$z_1 \oplus_s z_2 = f(z_1 +_s f(z_2))$$

$$\log \varepsilon \log f = f + g$$

$$s^+ - s^- = \pm 91 + s \pm 2$$

$$2x^5 + 4 = 11 - 16$$

$$f(x) = \frac{x^2 - 10}{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}$$

$$Z = \log_{\frac{1}{2}} x$$

$$8 - \frac{hs \log Z}{11} = \frac{hs \log}{R} + f(hs)$$

$$g - \frac{^2 h s ^2 " \log}{r} = \frac{h s \log}{r} + (h s) \frac{\log}{r}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

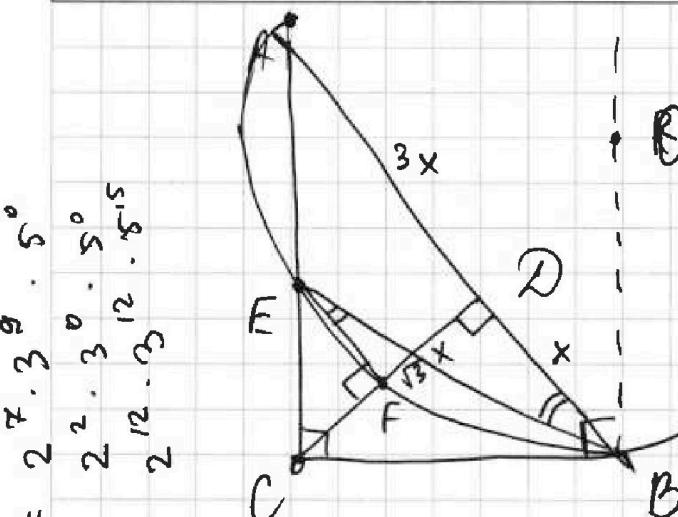


- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} 2^{21} \rightarrow 2^9 = 2^8 \cdot 2^1 &= 2^7 \cdot 2^2 \\ 2^{14} = 2^1 \cdot 2^{13} &= 2^2 \cdot 2^{12} \\ C = 2^{12} \cdot 3^{12} \cdot 5^{15} & \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} 3^{10} &= 3^8 \cdot 3^2 \\ 3^{13} &= 3^4 \cdot 3^8 \\ 3^{18} & \end{aligned}$$

$$C = 2^2 + 3^2 + 5^2 + 13$$

$$C_2 = 2^1 + 3^1 + 5^2 + 24$$

$$\frac{BC \cdot AC}{AB} = \frac{15 \cdot 24}{15 \cdot 24} = 1$$

$$B:2$$

$$B_2:2$$

затем

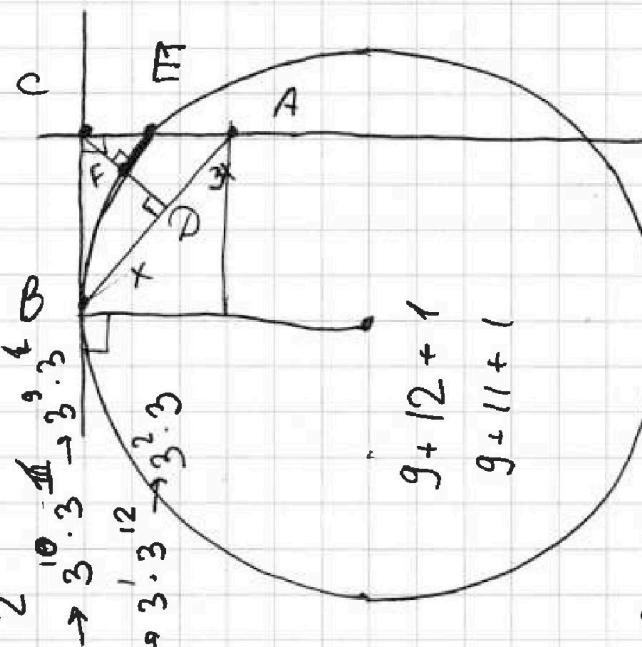
$$ac = \frac{ab \cdot bc}{ab} = \frac{15 \cdot 24}{15 \cdot 24} = 1$$

$$ac = p \cdot 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30}$$

$$bc = n \cdot 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13}$$

$$a, 5 \cdot 3^{10}, 2 \cdot 7 = q^n$$

$$g+12+1 \\ g+11+1$$



$$\begin{aligned} 2^{21} \rightarrow 2^9 &= 2^8 \cdot 2^1 = 2^7 \cdot 2^2 \\ 2^{10} \rightarrow 3^10 &\rightarrow 3^10 \rightarrow 3^9 \cdot 3^4 \\ 2^2 \cdot 3^2 \cdot 3^2 &= 2^2 \cdot 3^2 \cdot 3^2 \cdot 3^2 \cdot 3^2 \\ &= \frac{a^2 \cdot b^2}{c^2} \end{aligned}$$

$$a^2 = \frac{\log_a b}{\log_a c}$$