



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^7 3^{11} 5^{14}$, bc делится на $2^{13} 3^{15} 5^{18}$, ac делится на $2^{14} 3^{17} 5^{43}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой AC в точке A , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке E , а катет BC – в точке F . Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1,3$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF .
3. [4 балла] Решите уравнение $5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$.
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0, \\ (x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_7^4(6x) - 2 \log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4, \quad \text{и} \quad \log_7^4 y + 6 \log_y 7 = \log_{y^2} (7^5) - 4.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-17; 68)$, $Q(2; 68)$ и $R(19; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно на границе) и таких, что $4x_2 - 4x_1 + y_2 - y_1 = 40$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 60, $SA = BC = 10$.
 - а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .
 - б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 3$, а радиус сферы Ω равен 4.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

1. Решение: 1. и.а. abc - келим, но число a, b, c не содержат множителей 2, 3 и 6.

\Rightarrow число a_2 - степень 2 в числе a

b_2 - в числе b , c_2 - в числе c . \Rightarrow

$$\begin{cases} a_2 + b_2 \geq 7 \\ a_2 + c_2 \geq 14 \\ b_2 + c_2 \geq 13 \end{cases}$$

для наименьшей келим суммы

приравняем:

$$\begin{cases} a_2 + b_2 = 7 \\ a_2 + c_2 = 14 \\ b_2 + c_2 = 13 \end{cases}$$

$$2(a_2 + b_2 + c_2) = 34$$

$$a_2 + b_2 + c_2 = 17$$

это возможно при $c_2 = 10, b_2 = 3, a_2 = 4$. $\Rightarrow abc$ содержат 2^{17} - келим, возмозможная степень двойки. Возмозможна

аналогично для степеней 3 и 5:

$$\begin{cases} a_3 + b_3 = 11 \\ b_3 + c_3 = 16 \\ a_3 + c_3 = 17 \end{cases}$$

\Rightarrow

$$2(a_3 + b_3 + c_3) = 43$$

$$a_3 + b_3 + c_3 = 21,5 - \text{невозможное}$$

и.а. $a, b, c \in \mathbb{N}$. $\Rightarrow a_3, b_3, c_3 \in \mathbb{N}$.

\Rightarrow келим, $N \geq 21,5 = 22$.

$\Rightarrow a_3 + b_3 + c_3 = 22$ - возможно

при $a_3 = 6, b_3 = 5, c_3 = 11$.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

\Rightarrow Суммарные 1-амы, ~~2-амы~~ 3-амы, 4-амы, 5-амы

3 или 6 abc = 22.

$$3. \begin{cases} a_5 + b_5 = 14 \\ b_5 + c_5 = 18 \\ a_5 + c_5 = 43 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2(a_5 + b_5 + c_5) \geq 78 \\ a_5 + b_5 + c_5 = 37,5 - \text{Странно} \\ \text{нужны } 2, \Rightarrow a_5 + b_5 + c_5 = 38 - \end{cases}$$

Невозможно т.к. $a_5 + c_5 = 43 > 38. \Rightarrow$

$a_5 + b_5 + c_5 \geq 43$. $a_5 + b_5 + c_5 = 43$ - возможно т.к.

$a_5 = 20, c_5 = 23 \Rightarrow 43$ - миним. Сумма 6 в abc.

$\Rightarrow abc = \begin{matrix} & 12 & 22 & 43 \\ 2 & 3 & 5 & \end{matrix}$ - миним. возможное abc.

Ответ: $\begin{matrix} & 17 & 22 & 43 \\ 2 & 3 & 5 & \end{matrix}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\sqrt{3} \cdot \sin \alpha \cos(\sin \beta) = \frac{3\sqrt{3}}{2} + 2$$

ОДЗ: $\alpha \in [0, \pi/2]$

$$\arccos(\sin \beta) = \frac{\frac{3\sqrt{3}}{2} + 2}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \beta \in \mathbb{R}$$

$$\sin \cos(\cos(x - \frac{\pi}{2})) = \frac{\frac{3\sqrt{3}}{2} + 2}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \cos(x - \frac{\pi}{2}) = \frac{\frac{3\sqrt{3}}{2} + 2}{\sqrt{3}} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \quad | \cdot 5$$

$$\left\{ \begin{aligned} x - \frac{\pi}{2} &= -\frac{\frac{3\sqrt{3}}{2} + 2}{\sqrt{3}} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \quad | \cdot 5 \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} 5x - \frac{5\pi}{2} &= \frac{3\sqrt{3}}{2} + 2 + 10\pi k \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} 5x - \frac{6\pi}{2} &= -\frac{3\sqrt{3}}{2} - 2 + 10\pi n \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} 4x &= \frac{9\sqrt{3}}{2} + 10\pi k \quad | :4 \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} 6x &= \frac{2\sqrt{3}}{2} + 10\pi n \quad | :6 \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} x &= \frac{\sqrt{3}}{2} + 2,5\pi k \quad | (1) \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} x &= \frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{10\pi n}{6} \quad | (2) \end{aligned} \right.$$

Из условия определяем \arccos : $\frac{3\sqrt{3}}{2} + 2$
 $0 \leq \frac{\frac{3\sqrt{3}}{2} + 2}{\sqrt{3}} \leq \pi$

Определяем корни:

$$(1) \quad 0 \leq \frac{\frac{3\sqrt{3}}{2} + 2}{\sqrt{3}} \leq \pi \quad | \cdot \sqrt{3}$$

$$0 \leq \frac{3\sqrt{3}}{2} + 2 \leq \sqrt{3} \pi \quad | \cdot 2 \Rightarrow 0 \leq \frac{3\sqrt{3}}{2} + 2 \leq 2,6\pi k \leq 6\pi \quad | \cdot \sqrt{3}$$

$$0 \leq \frac{3\sqrt{3}}{2} + 2 \leq 2,6\pi k \leq 6\pi \quad | :2,6$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$0 \leq 1 + k \leq 2 \quad | \cdot 1$$

$$-1 \leq k \leq 1 \quad \Rightarrow \quad k \in \{-1, 0, 1\}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} k = 1, & x = 1 - 2, & y = -1, & z = 0 \\ k = 0, & x = 0, & y = 0, & z = 0 \\ k = -1, & x = -1, & y = 1, & z = 0 \end{cases}$$

$$y = 0$$

$$x = 5 + 2,6y = 3,6y$$

$$(21) \quad 0 \leq \frac{3x}{2} + y \leq 9z$$

$$0 \leq \frac{3x}{2} + \frac{x}{6} = \frac{10x}{6} \leq 6z \quad | \cdot 6$$

$$0 \leq 1,6x + \frac{10x}{6} \leq 6z \quad | \cdot 6$$

$$0 \leq 6 + 1 + 10z \leq 30$$

$$-7 \leq 10z \leq 23 \quad | : 10$$

$$-0,7 \leq z \leq 2,3 \quad \Rightarrow \quad z \in \{0, 1, 2\}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z = 0 \\ z = 1 \\ z = 2 \end{cases}$$

$$z = 0 \Rightarrow \frac{10x}{6} \leq 0 \Rightarrow x = 0$$

$$z = 1 \Rightarrow \frac{10x}{6} \leq 6 \Rightarrow x \leq \frac{36}{10} = 3,6$$

$$\Rightarrow \text{Ответ: } -\frac{9x}{2}; \frac{10}{6}; 0; \frac{11}{6}; 3,6x.$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases}
 x + 3ay - 7b = 0 \\
 (x^2 + 14x + y^2 + 49)(x^2 + y^2 - 9) = 0 \quad (1)
 \end{cases}$$

$$(1): \begin{cases}
 x^2 + 14x + y^2 + 49 = 0 \\
 x^2 + y^2 = 9
 \end{cases}$$

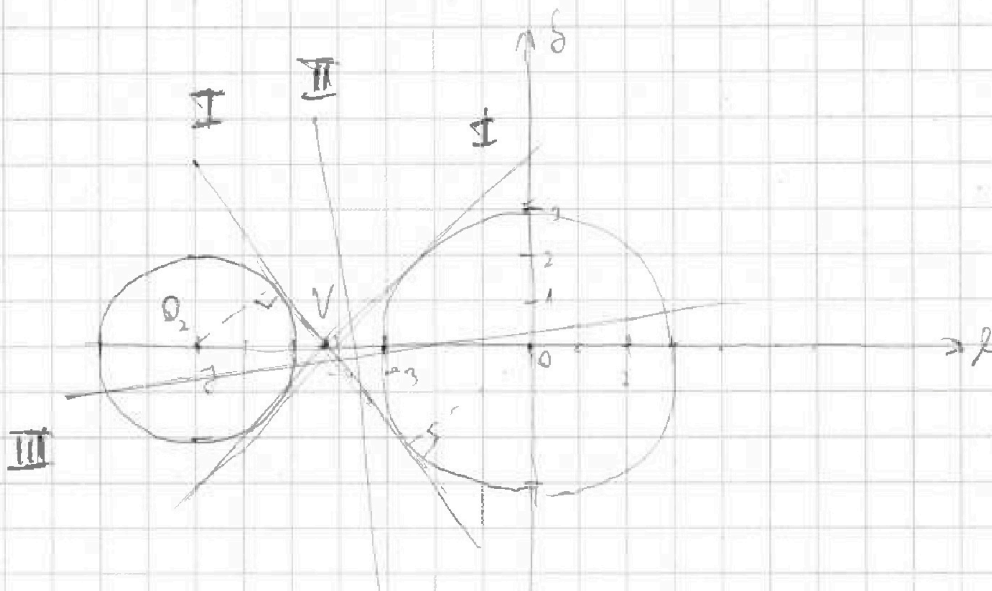
$$x^2 + 14x + 49 + y^2 - 9 = 0$$

$$x^2 + y^2 = 9$$

$$(x + 7)^2 + y^2 = 2^2 \quad (1) \text{ - уравнение окружности.}$$

$$x^2 + y^2 = 3^2 \quad (2) \quad (O_1: (-7; 0); r_1 = 2)$$

$$(O_2: (0; 0); r_2 = 3)$$



2. $x + 3ay - 7b = 0$ - уравнение прямой. Углы между
линиями 4 решения, внешнее, внутреннее касание
пересекает каждую окружность дважды.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

если $a = 0$. $x = 7b$ - берем произвольное значение, $x = 7b$
или $a \neq 0$ или нечего b .

Если $a \neq 0$. Заменим произвольное значение: $30x = 7b - 2$

$$y = \frac{-2}{30} + \frac{7b}{30}$$

и.д. $b \in \mathbb{Z}$, берем произвольное значение b

Возьмем $0 \leq b < 30$ или любое значение b .

Возьмем произвольное значение b и найдем x и y .

$k = \frac{-1}{30}$, что не существует значения b .

На рисунке I - касательная к окружности.

касательная. Минимальное значение k - в точке касания, минимальное значение

касательной при $k = 2$. Если касательная касается

окружности, то касательная к окружности, касательная, касательная

в точке.

I - касательная, касательная касательная касательная

касательная - 2.

II - касательная, касательная / касательная касательная,

касательная касательная. Это касательная касательная.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Получим константы α : U_2 постоянна

$$Q_2 V_1 V_0 = V_2 : V_1 = 2 : 3.$$

$$\Rightarrow Q_2 = \frac{3}{2} \cdot \frac{21}{6} = \frac{21}{4}.$$

$$\Rightarrow V_1 \left(\frac{21}{6}; 0 \right).$$

Через g и h уравнения: $g = kx + b$ - константы:

$$0 = \frac{21}{6}k + b$$

$$0 = -\frac{21}{6}k + b$$

$$\Rightarrow g = kx - \frac{21}{6}k, \text{ так как } g \text{ и } h \text{ уравнения } g = kx + \frac{21}{6}k = 0$$

т.к. $g = kx - \frac{21}{6}k$ - константы и постоянны, то

ее постоянство от h , с уравнением $g = 0$ равно ее

$$\text{продеривировать: } V_1 = \frac{-k \cdot 0 \pm 0 + \frac{21}{6}k}{\sqrt{\frac{21^2}{36}k^2 + k^2}} = \frac{21}{6}$$

$$\frac{21}{6}k = 3 \cdot \sqrt{\frac{21^2}{36}k^2 + k^2}$$

$$\frac{21}{6}k = \sqrt{1 + k^2} \quad | \cdot 2$$

$$\frac{42}{6}k^2 = 1 + k^2$$

$$\frac{42 - 26}{26}k^2 = 1 \Rightarrow \frac{26}{26}k^2 = 1; \quad V^2 = \frac{26}{24} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k = \pm \frac{5}{2\sqrt{6}}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



\Rightarrow В первом случае (II):

$$-\frac{5}{2\sqrt{6}} \leq k \leq \frac{5}{2\sqrt{6}}$$

$$0 \leq k < \frac{5}{2\sqrt{6}}$$

$$-\frac{5}{2\sqrt{6}} \leq \frac{-1}{3a} \leq \frac{5}{2\sqrt{6}}$$

$$\text{или } -\frac{5}{2\sqrt{6}} < k \leq 0$$

$$\frac{15}{2\sqrt{6}} > \frac{1}{a} > \frac{-15}{2\sqrt{6}}$$

$$0 \leq \frac{-1}{3a} < \frac{5}{2\sqrt{6}} \quad | \cdot -9$$

$$\frac{2\sqrt{6}}{15} < a \leq \frac{2\sqrt{6}}{15}$$

$$-\frac{5}{2\sqrt{6}} < \frac{-1}{3a} \leq 0 \quad | \cdot -3$$

$$\left[-\frac{15}{2\sqrt{6}} < \frac{1}{a} \leq 0 \Rightarrow -\frac{15}{2\sqrt{6}} < -\frac{15}{2\sqrt{6}} - \frac{2\sqrt{6}}{15} \right]$$

$$\left[0 \leq \frac{1}{a} < \frac{15}{2\sqrt{6}} \Rightarrow a > \frac{2\sqrt{6}}{15} \right]$$

$$\Rightarrow 0 \in \left(-\infty; \frac{-\frac{15}{2\sqrt{6}}}{\frac{2\sqrt{6}}{15}} \right) \cup \left(\frac{2\sqrt{6}}{15}; +\infty \right)$$

$$\text{Ответ: } a \in \left(-\infty; -\frac{15}{2\sqrt{6}} \right) \cup \left(\frac{2\sqrt{6}}{15}; +\infty \right)$$

$$\text{Ответ: } \left(-\infty; -\frac{2\sqrt{6}}{15} \right) \cup \left(\frac{2\sqrt{6}}{15}; +\infty \right)$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



15. Решение:

ОДЗ:

$$\begin{cases} \log_7^4(6x) - 2 \log_{6x} 7 = \log_{30x^2} 343 - 4 & (1) \\ \log_7^4 y + 6 \log_y 7 = \log_{y^2} (7^5) - 4 & (2) \end{cases}$$

$$x \neq \frac{1}{6}$$

$$y^2 \neq \frac{1}{36}$$

$$y > 0$$

$$x \neq 1$$

(1): на ОДЗ:

$$\log_7^4(6x) - 2 \log_{6x} 7 = \frac{3}{2} \log_{6x} 7 - 4$$

$$\log_7^4(6x) - \frac{4-3}{2} \log_{6x} 7 = -4$$

$$\log_7^4(6x) - 3,5 \log_{6x} 7 = -4 \quad | \cdot \log_{6x}^2(6x)$$

$$\log_7^5(6x) - 3,5 = -4 \log_7^2(6x)$$

$$\log_7^5(6x) + 4 \log_7^2(6x) = 3,5$$

(2): на ОДЗ:

$$\log_7^4 y + 6 \log_y 7 = \frac{5}{2} \log_y 7 - 4$$

$$\log_7^4 y + \frac{12-5}{2} \log_y 7 = -4 \quad | \cdot \log_{7y}^2 y$$

$$\log_7^5 y + 3,5 = -4 \log_7^2 y$$

$$\log_7^5 y + 4 \log_7^2 y = -3,5 \quad \text{Перенесем в левую часть}$$

$$\begin{cases} \log_7^5(6x) + 4 \log_7^2(6x) = 3,5 \\ \log_7^5 y + 4 \log_7^2 y = -3,5 \end{cases}$$

$$\log_7^5 y + \log_7^5(6x) + 4(\log_7^2(6x) + \log_7^2 y) \geq 0$$

$$\log_7^5(6x) + \log_7^5 y + 4(\log_7^2(6x) + \log_7^2 y) \geq 0$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$- \log_2 5 \cdot (\log_2^3 6x) + (\log_2^4 6x) + (\log_2^5 6xy) = 0$$
$$\Rightarrow \begin{cases} \log_2^4 6xy > 0, & (1) \\ \log_2^4 y - \log_2^3 5 \cdot \log_2^3 6x + \log_2^2 4 \cdot \log_2^2 6x - \log_2^4 5 \cdot (\log_2^3 6x) + \\ + \log_2^4 6x + 1 > 0, & (2) \end{cases}$$
$$(1): 6xy = 1$$

$$\boxed{xy = \frac{1}{6}}$$

$$(2) \quad \log_2^3 y (\log_2 y - \log_2 6x) + \log_2 4 \cdot \log_2^2 6x (\log_2 5 - \log_2 6x) +$$
$$+ \log_2^4 6x + 1 > 0$$
$$\log_2 = \frac{4}{6x} \cdot \log_2 y (\log_2^2 5 + \log_2^2 6x) + \log_2^2 6x + 1 > 0 \quad | -1 \quad \text{в } \emptyset$$

$$\Rightarrow \text{Ответ: } \frac{1}{6}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

16
Решение:

1. $OP \parallel PQ \parallel OQ$

2. $OP \parallel OQ$: xy и yz

четырехугольник : $OP \parallel OQ$

$$\begin{cases} 0 = 9 + 6 \\ 6x_2 = -12x_1 + 6 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_2 = -4$$

3. $4y_2 - 4x_1 + 6y_2 - 6x_1 = 40$

$4y_2 - 2x_1 + 6y_2 - 6x_1 = 40$

$4x_1 + 6y_2 = 40$, где $4x_1 = 4x_1 - 2x_1$ $6y_2 = 6y_2 - 6x_1$

и.и. $x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{Z} \Rightarrow 4x, 6y \in \mathbb{Z}$

$4x = 4 \Rightarrow 6y = 4 \Rightarrow$ xy и yz

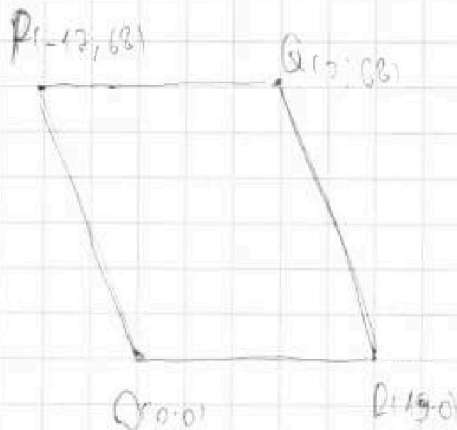
$4x$ $6y$

$4x$	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
------	----	----	----	----	----	----	----	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

$6y$	6	4	0	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	66	72	78	84
------	---	---	---	---	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

10 11 12 13 14 15 16 17 18 19

20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

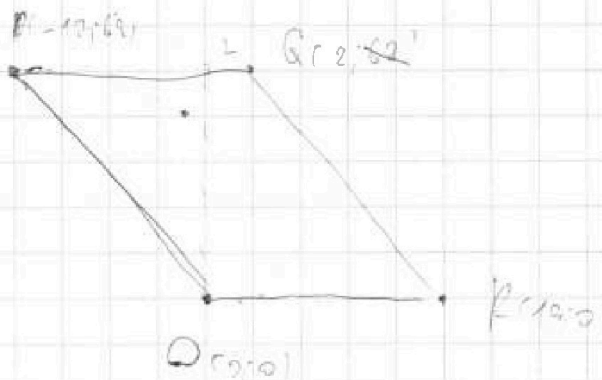
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задание № 5:

$O(0; 0)$, $P(12; 68)$, $Q(2; 28)$, $R(13; 0)$



xy

$xy_1 + x_2y_2 = 12 \cdot 28 + 2 \cdot 68 = 400$

$$4x_2 - 4x_1 + x_2^2 - x_1^2 = 400$$

$$4(x_2 - x_1) + (x_2^2 - x_1^2) \geq 400$$

$$\Delta x \leq 13 \Rightarrow 964 \in [4; 169]$$

$$65 \leq 63 \Rightarrow 45 \in [1; 63] \Rightarrow \Delta y \leq 4$$

$$\Delta x \in [0; 13] \Rightarrow \Delta y = [36; 32; 28; 24; 20; 16; 12; 8; 4]$$

$$x \cdot y = 68: 1 \div 9-4; 2 \div 8-3; 3 \div 7-2; 4 \div 6-1$$

$$\begin{array}{r} 68 \overline{) 400} \\ \underline{68} \\ 32 \\ \underline{32} \\ 0 \end{array}$$

$$y = 12 + 6$$

$$\begin{cases} 63 = -12x + 6 \\ 0 = 0 + 6 \Rightarrow 6 = 0 \end{cases}$$

$$63 = -12x \Rightarrow x = -4$$

$$\Rightarrow y = -42 \Rightarrow \Delta x = 12 - 4 = 4$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Уравнение

$$2) \log_7^4 y + 6 \log_7^3 y = \log_7^2 (7^x) - 4$$

$$\log_7^4 y + 6 \log_7^3 y = \frac{1}{2} (\log_7^2 y - 4)$$

$$\log_7^4 y + \frac{12-6}{2} \log_7^3 y - 4 = 0$$

$$\log_7^4 y + 3 \log_7^3 y - 4 = 0$$

$$\log_7^4 y + 3 \log_7^3 y - 4 = 0$$

$$\left\{ \begin{aligned} \log_7^6 y + 3,6 - 4 \log_7^5 y &= 0 \\ \log_7^5 y + 3,6 - 4 \log_7^4 y &= 0 \end{aligned} \right.$$

$$\log_7^5 y + 3,6 - 4 \log_7^4 y = 0$$

$$(\log_7^5 y + \log_7^5 y) + 3,6 - 4(\log_7^4 y + \log_7^4 y) = 0$$

$$2 \log_7^5 y + 3,6 - 8 \log_7^4 y = 0$$

$$2 \log_7^5 y + 3,6 - 8 \log_7^4 y = 0$$

$$2 \log_7^5 y + 3,6 - 8 \log_7^4 y = 0$$

$$\log_7^5 y + \left(\log_7^4 y - \log_7^3 y \cdot \log_7^2 y + \log_7^3 y \cdot \log_7^2 y - \log_7^2 y \cdot \log_7^3 y + \log_7^4 y - 4 \right) + 3,6 = 0$$

$$x > 0$$

$$x \neq \frac{1}{6}$$

$$x^2 \neq \frac{1}{6}$$

$$x > 0$$

$$x \neq 1$$



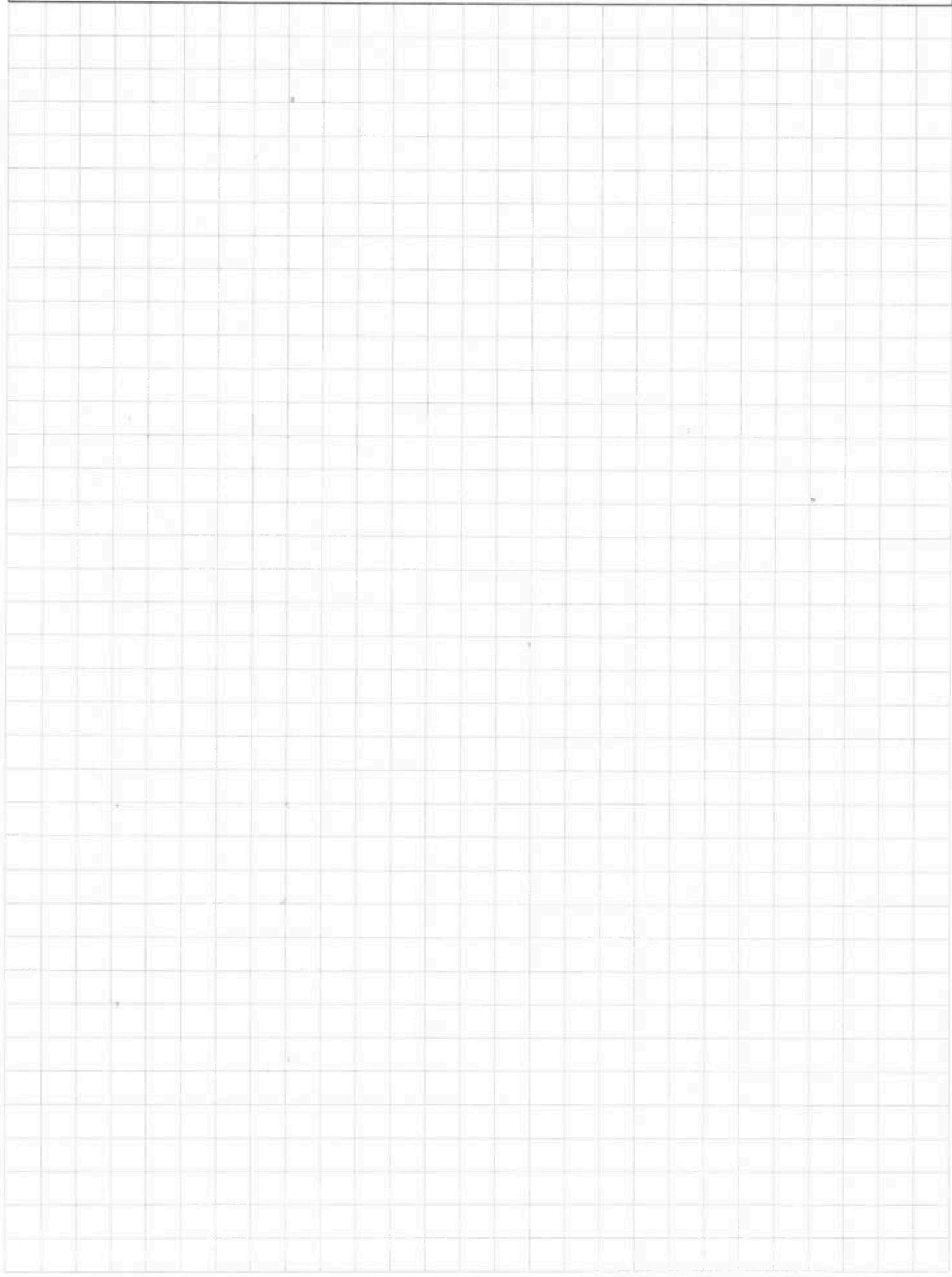
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Решение

$$\begin{cases} \log_7^4(6x) - 2 \log_7^2 x = \log_7^2(3-4x) & (1) \\ \log_7^4 x + 6 \log_7 x = \log_7^2(7^x) - 4 \end{cases}$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} 6x > 0 \\ 6x < 0 \\ 6x \neq 1 \\ 6x^2 \neq 1 \\ x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases} \begin{cases} x > 0 \\ x \neq \frac{1}{6} \\ x^2 \neq \frac{1}{6} \\ x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$$

$$(1): \log_7^4(6x) - 2 \frac{\log_7^2 x}{\log_7 6x} = \frac{2 \log_7^2(3-4x)}{\log_7 6x}$$

$$\log_7^4(6x) - \frac{2}{\log_7 6x} = \frac{2 \log_7^2(3-4x)}{\log_7 6x} - 4$$

$$\log_7^4(6x) - \frac{2 \log_7^2(3-4x)}{\log_7 6x} = \frac{2 \log_7^2(3-4x)}{\log_7 6x} - 4$$

$$\log_7^4(6x) - \frac{2}{\log_7 6x} = -4$$

$$\log_7^4(6x) - \frac{2}{\log_7 6x} = -4 \cdot \log_7 6x$$

$$\log_7^5(6x) - \frac{2}{\log_7 6x} = -4 \log_7 6x$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Крестик K^4

$$4a + 6b + c + d = 0$$

$$\begin{cases} a + 3a_0 - 2b = 0 \\ (a^2 + 14a + a^2 + 4b) + (a^2 + b^2 - 9) = 0 \end{cases}$$

$$b = 4a + 6 \quad a^2 + 6a + c = 0$$

$A(0; 0)$

$$\begin{cases} x + 3ay - 2b = 0 \\ x^2 + 14x + y^2 + 4b = 0 \\ x^2 + y^2 - 9 = 0 \end{cases}$$



$$S = \frac{|a \cdot 4 + b \cdot 0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$= \frac{0 + 0 + 3}{\sqrt{2}} = \frac{3 \cdot \sqrt{2}}{2} = 1.5\sqrt{2}$$

$$(1) \quad x^2 + 14x + y^2 + 4b = 0$$

$$x^2 + 14x + 4b + y^2 - 4 = 0$$

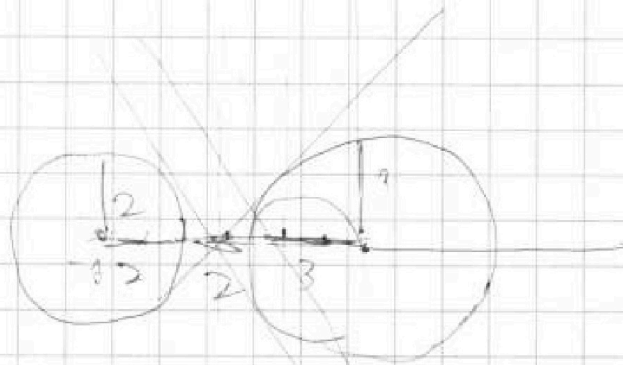
$$(x + 7)^2 + y^2 = 4$$

$$x^2 + y^2 = 9$$

$$x + 3ay - 2b = 0$$

$$3a_0 = 2b - 4$$

$$y = \frac{2b - 4}{3a} - \frac{x}{3a}$$



$$S = \frac{0 + 3a \cdot 0 - 2b}{\sqrt{1 + 9a^2}} < 1$$

$$\frac{-2b}{\sqrt{1 + 9a^2}} < 1$$

$$S = \frac{-2 + 3a \cdot 0 - 2b}{\sqrt{1 + 9a^2}} < 2$$

$$\frac{-2(6 + 1)}{\sqrt{1 + 9a^2}} < 2$$

$$\begin{cases} 6a^2 = 9 + 3a^2 & -2b = 2\sqrt{1 + 9a^2} & (1) \\ 6a^2 = 9 + 3a^2 & -2(6 + 1) = 2\sqrt{1 + 9a^2} & (2) \end{cases}$$

$$6a^2 = 9 + 3a^2 \Rightarrow 3a^2 = 9 \Rightarrow a^2 = 3 \Rightarrow a = \pm\sqrt{3}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Справедливо

$$\cos \left(\cos^{-1} \left(\frac{3\sqrt{2}}{5} \right) \right) = \frac{3\sqrt{2}}{5} + 2$$

$$\cos \left(\cos^{-1} \left(\frac{3\sqrt{2}}{5} \right) \right) = \frac{3\sqrt{2}}{5}$$

$$\Rightarrow \cos \left(\frac{\cos^{-1} \left(\frac{3\sqrt{2}}{5} \right) + 2}{5} \right) = \frac{3\sqrt{2}}{5}$$

$$\frac{3\sqrt{2}}{5} = \frac{3\sqrt{2}}{5} \quad \cos \left(\frac{\cos^{-1} \left(\frac{3\sqrt{2}}{5} \right) + 2}{5} \right) = \frac{3\sqrt{2}}{5}$$

$$\frac{2 \cdot \frac{3\sqrt{2}}{5} = \frac{6\sqrt{2}}{5} = \frac{6\sqrt{2}}{5} \quad \cos \left(\cos^{-1} \left(\frac{3\sqrt{2}}{5} \right) \right) = \cos \left(\cos^{-1} \left(\frac{3\sqrt{2}}{5} \right) + 2 \right)$$

$$\Rightarrow \frac{3\sqrt{2}}{5}$$

$$\cos \in [-1; 1]$$

$$\cos \left(\cos^{-1} \left(\frac{3\sqrt{2}}{5} \right) + 2 \right) = \frac{3\sqrt{2}}{5}$$

$$\cos \left(\cos^{-1} \left(\frac{3\sqrt{2}}{5} \right) \right) = \frac{3\sqrt{2}}{5}$$

$$\frac{3\sqrt{2}}{5} = \frac{3\sqrt{2}}{5} = \frac{6\sqrt{2}}{5}$$

$$\frac{3\sqrt{2}}{5} = \frac{6\sqrt{2}}{5}$$

$$\frac{3\sqrt{2}}{5} = \frac{6\sqrt{2}}{5}$$

$$\left| \cos^{-1} \left(\frac{3\sqrt{2}}{5} \right) + 2 \right| = \frac{3\sqrt{2}}{5} + 1$$

$$\left| \cos^{-1} \left(\frac{3\sqrt{2}}{5} \right) + 2 \right| = \frac{3\sqrt{2}}{5} + 1$$

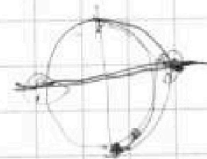
$$\cos^{-1} \left(\frac{3\sqrt{2}}{5} \right) = \frac{3\sqrt{2}}{5} - 1$$

$$\cos \left(\cos^{-1} \left(\frac{3\sqrt{2}}{5} \right) - \frac{3\sqrt{2}}{5} \right) = \frac{3\sqrt{2}}{5} + 1$$



$$\cos \left(\cos^{-1} \left(\frac{3\sqrt{2}}{5} \right) - \frac{3\sqrt{2}}{5} \right) = 0$$

$$\cos^{-1} \left(\frac{3\sqrt{2}}{5} \right) = \frac{3\sqrt{2}}{5}$$



$$\cos \left(\frac{\cos^{-1} \left(\frac{3\sqrt{2}}{5} \right) + 2}{5} \right) = \frac{3\sqrt{2}}{5}$$

$$\cos^{-1} \left(\frac{3\sqrt{2}}{5} \right) = 2$$

$$\cos \in [-1; 1]$$

$$\left| \cos^{-1} \left(\frac{3\sqrt{2}}{5} \right) + 2 \right| = \frac{3\sqrt{2}}{5} + 1$$

$$\cos^{-1} \left(\frac{3\sqrt{2}}{5} \right) = \frac{3\sqrt{2}}{5} - 1$$

$$\cos \left(\cos^{-1} \left(\frac{3\sqrt{2}}{5} \right) - \frac{3\sqrt{2}}{5} \right) = \frac{3\sqrt{2}}{5} + 1$$

$$-\frac{3\sqrt{2}}{5} \leq \frac{3\sqrt{2}}{5} + 1 \leq \frac{3\sqrt{2}}{5}$$

$$-\frac{3\sqrt{2}}{5} + 1 \leq \frac{3\sqrt{2}}{5} - 1$$

$$-1.65 \leq \frac{3\sqrt{2}}{5} - 2.65 \leq -0.65$$

$$-1.65 + 2.65 \leq -0.65 + 2.65$$

$$-3 \leq 2 - 5 \leq -1 - 2$$

$$-5 \leq -5 \leq -3 \leq -5$$

$$-5 \leq -5 \leq -3 \leq -5$$

$$-5 \leq -5 \leq -3 \leq -5$$

$$\Rightarrow 2 = 2 - 2.65 = -0.65$$

$$\Rightarrow \frac{3\sqrt{2}}{5} = 2$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Уравнения: $a_b: 2^7 3^{11} 5^{14}$, $b_c: 2^{13} 3^{15} 5^{13}$, $a_c: 2^{13} 3^{15} 5^{13}$

$$\begin{cases} a+b \geq 1 \\ b+c \geq 13 \\ c+a \geq 13 \end{cases}$$

$$24 + 26 + 2c \geq 32 \quad | :2$$

$$14 + 13c \geq 24 \quad | :13$$

$$\frac{14}{13} + c \geq \frac{24}{13} \quad | \cdot 13$$

$$14 + 13c \geq 24 \quad | -14$$

$$13c \geq 10 \quad | :13$$

$$c \geq \frac{10}{13}$$

или $a+b+c = 17$

$c+c \geq 12$

$c \geq 6$, $c \geq 10$

$b \geq 3$, $c \geq 3$

$10 + 3 + 4 = 17$ - верно

$a+b+c = 16,6$

$c \geq 13$

$c+c \geq 16,6$

$c \geq 8,3$

$a+b+c = 13$

$9,5 \geq c$

$9,5 + 6 = 15,5$

$c \geq 9,5$

$11 + c \geq 22$

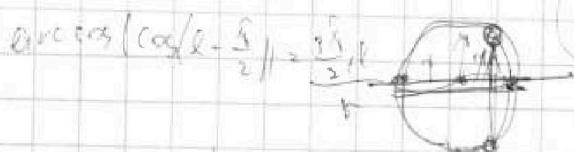
$c \geq 11$

$a \geq 6$

$b \geq 6$

$\cos \arccos(\cos \frac{10}{2}) = \frac{10}{2} + \pi$

$\cos \arccos(\cos |x - \frac{10}{2}|) = \frac{10}{2} + \pi$



$\cos \arccos(\cos \frac{10}{2}) = \frac{10}{2} + \pi$

$\cos \arccos(\cos |x - \frac{10}{2}|) = \frac{10}{2} + \pi$

$x - \frac{10}{2} = \frac{10}{2} + \pi$

$x = 10 + \pi$

$\cos(x - \frac{10}{2}) = \frac{10}{2} + \pi$

$\cos \arccos(\cos |x - \frac{10}{2}|) = \frac{10}{2} + \pi$

$= \frac{10}{2} + \pi$

$-\frac{10}{2} + \pi$

$\frac{10}{2} + \pi$

$-\frac{10}{2} + \pi$

$\frac{10}{2} + \pi$

$-\frac{10}{2} + \pi$

$\frac{10}{2} + \pi$

$-\frac{10}{2} + \pi$