



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



1. [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^7 3^{11} 5^{14}$ ,  $bc$  делится на  $2^{13} 3^{15} 5^{18}$ ,  $ac$  делится на  $2^{14} 3^{17} 5^{43}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник  $ABC$ . Окружность, касающаяся прямой  $AC$  в точке  $A$ , пересекает высоту  $CD$ , проведённую к гипотенузе, в точке  $E$ , а катет  $BC$  – в точке  $F$ . Известно, что  $AB \parallel EF$ ,  $AB : BD = 1,3$ . Найдите отношение площади треугольника  $ACD$  к площади треугольника  $CEF$ .
3. [4 балла] Решите уравнение  $5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$ .
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система уравнений

$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0, \\ (x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа  $x$  и  $y$  удовлетворяют равенствам

$$\log_7^4(6x) - 2 \log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4, \quad \text{и} \quad \log_7^4 y + 6 \log_y 7 = \log_{y^2} (7^5) - 4.$$

Найдите все возможные значения произведения  $xy$ .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0; 0)$ ,  $P(-17; 68)$ ,  $Q(2; 68)$  и  $R(19; 0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно на границе) и таких, что  $4x_2 - 4x_1 + y_2 - y_1 = 40$ .
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида  $SABC$ , медианы  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $M$ . Сфера  $\Omega$  касается ребра  $AS$  в точке  $L$  и касается плоскости основания пирамиды в точке  $K$ , лежащей на отрезке  $AM$ . Сфера  $\Omega$  пересекает отрезок  $SM$  в точках  $P$  и  $Q$ . Известно, что  $SP = MQ$ , площадь треугольника  $ABC$  равна 60,  $SA = BC = 10$ .
  - а) Найдите произведение длин медиан  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$ .
  - б) Найдите двугранный угол при ребре  $BC$  пирамиды, если дополнительно известно, что  $\Omega$  касается грани  $BCS$  в точке  $N$ ,  $SN = 3$ , а радиус сферы  $\Omega$  равен 4.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>					



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

1.1. Решение: 1. и.а. abc - кешш, но числа a, b, c не содержат множителей 2, 3 и 6.

⇒ число  $a_2$  - степень 2 в числе a,  $b_2$  - в числе b,  $c_2$  - в числе c. ⇒

$$\begin{cases} a_2 + b_2 \geq 7 \\ a_2 + c_2 \geq 14 \\ b_2 + c_2 \geq 13 \end{cases}$$

для нахождения миним. суммы приравняем:

$$\begin{cases} a_2 + b_2 = 7 \\ a_2 + c_2 = 14 \\ b_2 + c_2 = 13 \end{cases}$$

$$2(a_2 + b_2 + c_2) = 34$$

$$a_2 + b_2 + c_2 = 17$$

Это возможно при  $c_2 = 10, b_2 = 3, a_2 = 4$ . ⇒ abc содержит  $2^{17}$ -кешш. Возможная степень двойки. Возьмем алгоритм для степени 3 и 6:

$$\begin{cases} a_3 + b_3 = 11 \\ b_3 + c_3 = 16 \\ a_3 + c_3 = 17 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2(a_3 + b_3 + c_3) = 43 \\ a_3 + b_3 + c_3 = 21,5 - \text{невозможно, т.к. } a, b, c \in \mathbb{N}. \Rightarrow a_3, b_3, c_3 \in \mathbb{K}. \end{cases}$$

⇒ кешш,  $N \geq 21,5 = 22$ .

⇒  $a_3 + b_3 + c_3 = 22$  - возможно

при  $a_3 = 6, b_3 = 5, c_3 = 11$ .

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\Rightarrow$  Суммарные 1-ам, ~~2-ам~~ 3-ам, 4-ам, 5-ам, 6-ам, 7-ам

3-ам в abc - 22.

$$3. \begin{cases} a_5 + b_5 = 14 \\ b_5 + c_5 = 18 \\ a_5 + c_5 = 43 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2(a_5 + b_5 + c_5) \geq 78 \\ a_5 + b_5 + c_5 = 37,5 - \text{Стремление} \\ \text{минимизировать } 2, \Rightarrow a_5 + b_5 + c_5 = 38 - \end{cases}$$

Невозможно т.к.  $a_5 + c_5 = 43 > 38. \Rightarrow$

$a_5 + b_5 + c_5 \geq 43$ .  $a_5 + b_5 + c_5 = 43$  - возможно т.к.

$a_5 = 20, c_5 = 23 \Rightarrow 43$  - миним. Суммарно в abc.

$\Rightarrow abc = \begin{matrix} & 12 & 22 & 43 \\ 2 & 3 & 5 & \end{matrix}$  - миним. возможное abc.

Ответ:  $\begin{matrix} & 17 & 22 & 43 \\ 2 & 3 & 5 & \end{matrix}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

**ЛМОТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



N2. Решение:

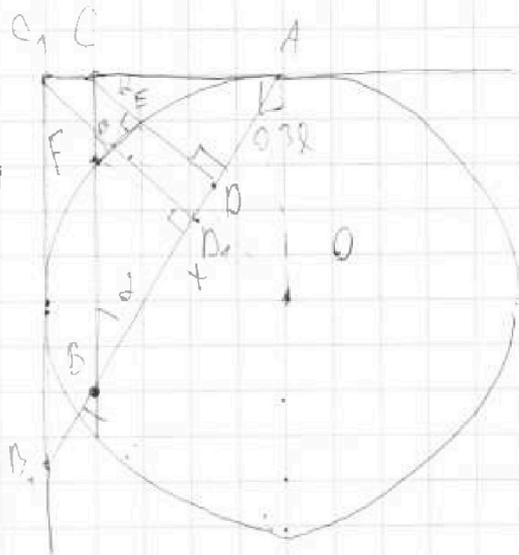
1.  $\triangle BCD \sim \triangle CPA \sim \triangle FEC$

по 3-м углам  $[90^\circ, d; 180^\circ - 90^\circ - d]$

2.  $AD = CB \cdot \cos \alpha$

$AD = AC \cdot \sin \alpha$

$\frac{AC}{BC} = \frac{AD}{CB} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \cot \alpha$



3.  $[AC], C_1 \in (CA), C_1B_1 \parallel BC, C_1B_1$  - диаметр

и т.д.,  $\angle C_1B_1A_1$  - диаметр  $\triangle B_1C_1A_1$  - диаметр

результат

и по т.д. получаем:  $B_1C_1 : C_1A_1 = B_1A_1 : C_1A_1$

в силу подобия  $\triangle B_1C_1A_1 \sim \triangle BCA \Rightarrow B_1C_1 : BC = C_1A_1 : CA$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{3} \cdot \sin \alpha \cos(\sin \beta) = \frac{3\sqrt{3}}{2} + 2$$

ОДЗ:  $0 < \alpha, \beta < \pi$

$$\arccos(\sin \beta) = \frac{3\sqrt{3} + 2}{2}$$

$$\Rightarrow \beta \in \mathbb{R}$$

$$\sin \cos(\cos(x - \frac{\pi}{2})) = \frac{3\sqrt{3} + 2}{2}$$

$$\Rightarrow \cos(x - \frac{\pi}{2}) = \frac{3\sqrt{3} + 2}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \quad | \cdot 5$$

$$\left[ x - \frac{\pi}{2} = -\frac{3\sqrt{3} + 2}{5} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \quad | \cdot 5 \right.$$

$$\left. \begin{aligned} 5x - \frac{5\pi}{2} &= \frac{3\sqrt{3} + 2}{2} + 10\pi k \\ 5x - \frac{6\pi}{2} &= -\frac{3\sqrt{3}}{2} - 2 + 10\pi k \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} 5x &= \frac{3\sqrt{3}}{2} + 10\pi k \quad | : 5 \\ 5x &= \frac{2\pi}{5} + 10\pi k \quad | : 5 \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} 4x &= \frac{3\sqrt{3}}{2} + 10\pi k \quad | : 4 \\ 6x &= \frac{2\pi}{5} + 10\pi k \quad | : 6 \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} 4x &= \frac{3\sqrt{3}}{2} + 10\pi k \quad | : 4 \\ 6x &= \frac{2\pi}{5} + 10\pi k \quad | : 6 \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{\sqrt{3}}{2} + 2,5\pi k \quad | \cdot 11 \\ x &= \frac{\pi}{6} + \frac{10\pi k}{6} \quad | \cdot 11 \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{\sqrt{3}}{2} + 2,5\pi k \quad | \cdot 11 \\ x &= \frac{\pi}{6} + \frac{10\pi k}{6} \quad | \cdot 11 \end{aligned} \right\}$$

Из условия определяем  $\arccos$ :  $\frac{3\sqrt{3} + 2}{2}$   
ОДЗ:  $0 \leq \frac{3\sqrt{3} + 2}{2} \leq \pi$

Одним корнем:

$$(1) \quad 0 \leq \frac{3\sqrt{3}}{2} + 2 \leq \pi \quad | \cdot 5$$

$$0 \leq \frac{3\sqrt{3}}{2} + 2 \leq \pi \quad \Rightarrow \quad 0 \leq \frac{3\sqrt{3}}{2} + 2 + 2,6\pi k \leq 6\pi \quad | \cdot 5$$

$$0 \leq \frac{3\sqrt{3}}{2} + 2 + 2,6\pi k \leq 6\pi \quad | : 2,6$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$0 \leq 1 + k \leq 2 \quad | -1$$

$$-1 \leq k \leq 1 \quad , \Rightarrow \quad k \in \{-1; 0; 1\}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = k - 2,6k = -1,6k; \\ y = k \end{cases}$$

$$y = k$$

$$x = k + 2,6k = 3,6k$$

$$(21) \quad 0 \leq \frac{3k}{2} + k \leq 5k :$$

$$0 \leq \frac{3k}{2} + \frac{k}{1} = \frac{10k}{2} \leq 10k \quad | :k$$

$$0 \leq 1,5 + 1 + 10k \leq 10 \quad | -6$$

$$0 \leq 6 + 1 + 10k \leq 30$$

$$-7 \leq 10k \leq 23 \quad | :10$$

$$-0,7 \leq k \leq 2,3 \quad , \Rightarrow \quad k \in \{0; 1; 2\}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{k}{6} \\ y = \frac{k}{6} \end{cases}$$

$$x = \frac{k}{6} = \frac{10k}{6} = \frac{11k}{6}$$

$$x = \frac{k}{6} = \frac{20k}{6} = \frac{21k}{6} = \frac{7k}{2} = 3,5k$$

$$\Rightarrow \text{Answer: } \underline{-\frac{9k}{2}; \frac{k}{6}; k; \frac{11k}{6}; 3,5k}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases}
 x + 3ay - 7b = 0 \\
 (x^2 + 14x + y^2 + 49)(x^2 + y^2 - 9) = 0 \quad (1)
 \end{cases}$$

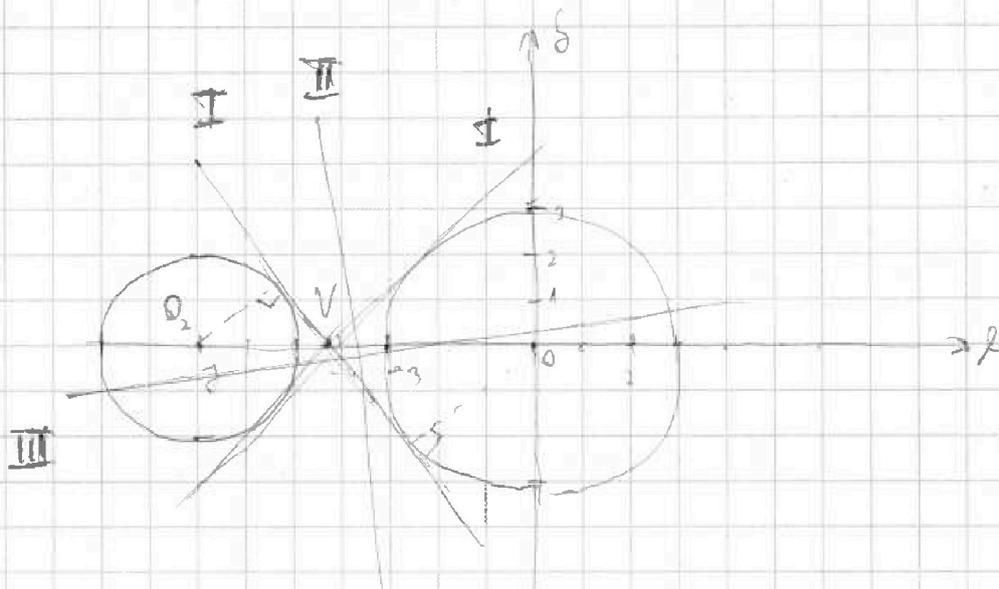
$$(1): \begin{cases}
 x^2 + 14x + y^2 + 49 = 0 \\
 x^2 + y^2 = 9
 \end{cases}$$

$$\begin{cases}
 x^2 + 14x + 49 + y^2 - 9 = 0 \\
 x^2 + y^2 = 9
 \end{cases}$$

$$(x + 7)^2 + y^2 = 2^2 \quad (1) \text{ - уравнение окружности.}$$

$$x^2 + y^2 = 3^2 \quad (2) \quad (O_1: (0; 7); r_1 = 2)$$

$$(O_2: (0; 0); r_2 = 3)$$



2.  $x + 3ay - 7b = 0$  - уравнение прямой. Углы между линиями 4 решения, исключено, углы ~~каждой~~ прямой пересекает каждую окружность дважды.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

если  $a = 0$ .  $x = 7b$  - берем произвольное значение,  $x = 7b$   
или  $a \neq 0$  или нечего  $b$ .

Если  $a \neq 0$ . Заменим произвольное значение:  $30x = 7b - 2$

$$y = \frac{-2}{30} + \frac{7b}{30}$$

и.д.  $b \in \mathbb{Z}$ , берем произвольное значение  $b$

Вектор  $Ox$  и вектор  $Oy$  не коллинеарны, вектор  $Oz$  или нулевой

$b$ . Проверим наличие с тем же условием  $k = \frac{-1}{30}$

$k = \frac{-1}{30}$ , что не удовлетворяет условию  $b$ .

На рисунке I - касательная к окружности

касательная. Минимальное количество точек касания, минимальное количество

касательных при  $n = 2$ . Если касательная к окружности

касательная к окружности, то касательная, касательная

в касательной.

I - касательная, касательная к окружности, касательная

касательная - 2.

II - касательная, касательная к окружности / касательная к окружности,

касательная к окружности. Это касательная к окружности.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Получим константы  $\alpha$ :  $U_2$  равен

$$Q_2 V_1 V_0 = V_2 : V_1 = 2:3.$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{3}{2} = \frac{21}{6}.$$

$$\Rightarrow V(\frac{21}{6}; \alpha).$$

Через  $g$  и  $h$  ищем:  $g = kx + b$  - константы:

$$0 = \frac{21}{6}k + b$$

$$b = -\frac{21}{6}k.$$

$$\Rightarrow g = kx - \frac{21}{6}k, \text{ пусть нам известно } g = kx + \frac{21}{6}k = 0$$

т.е.  $g = kx - \frac{21}{6}k$  - константы и структура, но

ее постоянство от  $g$ , с учетом  $(0;0)$  равно ее

$$\text{продерив: } V_1 = \frac{-k \cdot 0 \pm 0 + \frac{21}{6}k}{\sqrt{\frac{21^2}{6^2} + k^2}} = \frac{21}{6}.$$

$$\frac{21}{6}k = 3 \cdot \sqrt{\frac{21^2}{6^2} + k^2} \sqrt{1+k^2}$$

$$\frac{21}{6}k = \sqrt{1+k^2} \sqrt{1+k^2}$$

$$\frac{49}{26}k^2 = 1+k^2$$

$$\frac{49-26}{26}k^2 = 1 \Rightarrow \frac{23}{26}k^2 = 1; k^2 = \frac{26}{23} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k = \pm \frac{\sqrt{26}}{\sqrt{23}}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$\Rightarrow$  В первом случае (II):

$$-\frac{5}{2\sqrt{6}} \leq k \leq \frac{5}{2\sqrt{6}}$$

$$0 \leq k < \frac{5}{2\sqrt{6}}$$

$$-\frac{5}{2\sqrt{6}} \leq \frac{-1}{3a} \leq \frac{5}{2\sqrt{6}}$$

$$\text{или } -\frac{5}{2\sqrt{6}} < k \leq 0$$

$$\frac{15}{2\sqrt{6}} > \frac{1}{a} > \frac{-15}{2\sqrt{6}}$$

$$0 \leq \frac{-1}{3a} \leq \frac{5}{2\sqrt{6}} \quad | \cdot -9$$

$$\frac{2\sqrt{6}}{15} < a \leq \frac{2\sqrt{6}}{15}$$

$$-\frac{5}{2\sqrt{6}} < \frac{-1}{3a} \leq 0 \quad | \cdot -3$$

$$\left[ -\frac{15}{2\sqrt{6}} < \frac{1}{a} \leq 0 \Rightarrow -\frac{15}{2\sqrt{6}} < -\frac{15}{2\sqrt{6}} - \frac{2\sqrt{6}}{15} \right]$$

$$\left[ 0 \leq \frac{1}{a} < \frac{15}{2\sqrt{6}} \Rightarrow a > \frac{2\sqrt{6}}{15} \right]$$

$$\Rightarrow 0 \in \left( -\infty; \frac{-\frac{15}{2\sqrt{6}}}{\frac{2\sqrt{6}}{15}} \right) \cup \left( \frac{2\sqrt{6}}{15}; +\infty \right)$$

$$\text{Ответ: } a \in \left( -\infty; -\frac{15}{2\sqrt{6}} \right) \cup \left( \frac{2\sqrt{6}}{15}; +\infty \right)$$

$$\text{Ответ: } \left( -\infty; -\frac{2\sqrt{6}}{15} \right) \cup \left( \frac{2\sqrt{6}}{15}; +\infty \right)$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



15. Решено:

ОДЗ:

$$\begin{cases} \log_7^4(6x) - 2 \log_{6x} 7 = \log_{30x^2} 343 - 4 & (1) \\ \log_7^4 y + 6 \log_y 7 = \log_{y^2} (7^5) - 4 & (2) \end{cases}$$

$$x \neq \frac{1}{6}$$

$$y^2 \neq \frac{1}{36}$$

$$y > 0$$

$$x \neq 1$$

(1): на ОДЗ:

$$\log_7^4(6x) - 2 \log_{6x} 7 = \frac{3}{2} \log_{6x} 7 - 4$$

$$\log_7^4(6x) - \frac{4-3}{2} \log_{6x} 7 = -4$$

$$\log_7^4(6x) - 3,5 \log_{6x} 7 = -4 \quad | \cdot \log_{6x} 7$$

$$\log_7^5(6x) - 3,5 = -4 \log_7^2(6x)$$

$$\log_7^5(6x) + 4 \log_7^2(6x) = 3,5$$

(2): на ОДЗ:

$$\log_7^4 y + 6 \log_y 7 = \frac{5}{2} \log_y 7 - 4$$

$$\log_7^4 y + \frac{12-5}{2} \log_y 7 = -4 \quad | \cdot \log_y 7$$

$$\log_7^5 y + 3,5 = -4 \log_7^2 y$$

$$\log_7^5 y + 4 \log_7^2 y = -3,5 \quad \text{Вспомогательное уравнение}$$

$$\begin{cases} \log_7^5(6x) + 4 \log_7^2(6x) = 3,5 \\ \log_7^5 y + 4 \log_7^2 y = -3,5 \end{cases}$$

$$\log_7^5 y + \log_7^5(6x) + 4(\log_7^2(6x) + \log_7^2 y) \geq 0$$

$$\log_7^5(6x) + \log_7^5 y + 4(\log_7^2(6x) + \log_7^2 y) \geq 0$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$- \log_2 5 \cdot (\log_2^3 6x) + (\log_2^4 6x) + (\log_2^5 6xy) = 0$$
$$\Rightarrow \begin{cases} \log_2^4 6xy > 0, & (1) \\ \log_2^4 y - \log_2^3 5 \cdot \log_2^3 6x + \log_2^2 4 \cdot \log_2^2 6x - \log_2^4 5 \cdot (\log_2^3 6x) + \\ + \log_2^4 6x + 1 > 0, & (2) \end{cases}$$
$$(1): 6xy = 1$$

$$\boxed{xy = \frac{1}{6}}$$

$$(2) \quad \log_2^3 4y (\log_2^2 y - \log_2 6x) + \log_2 4 \cdot \log_2^2 6x (\log_2 5 - \log_2 6x) + \\ + \log_2^4 6x + 1 > 0$$
$$\log_2 = \frac{4}{6x} \cdot \log_2 4y (\log_2^2 5 + \log_2^2 6x) + \log_2^2 6x + 1 > 0 \quad | - 1 \quad \text{в } \emptyset$$

$$\Rightarrow \text{Ответ: } \frac{1}{6}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

16  
Решение:

1.  $OP \parallel PQ \parallel OQ$

2.  $OP \parallel OQ$  :  $y_2 = 0$

пересечение :  $y_2 = 0$

$$\begin{cases} 0 = 9 + 6 \\ 6y_2 = -12x + 6 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_2 = 4$$

3.  $4y_2 - 4x_1 + y_2 - y_1 = 40$

$4y_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 40$

$\Delta y + 6y_2 = 40$ , где  $\Delta y = y_2 - y_1$   $\Delta x = x_2 - x_1$

т.е.  $\Delta x \in \mathbb{Z}, \Delta y \in \mathbb{Z} \Rightarrow \Delta x, \Delta y \in \mathbb{Z}$ .

$4 \Delta y = 4 \Rightarrow \Delta y = 1 \Rightarrow$  возможные значения

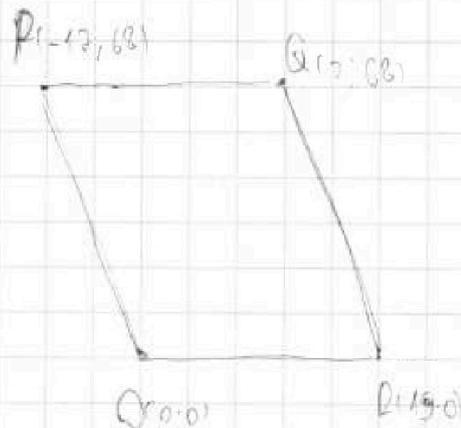
$\Delta x$  и  $\Delta y$ :

$\Delta x$  | -7 | -6 | -5 | -4 | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9

$\Delta y$  | 63 | 64 | 65 | 66 | 67 | 68 | 69 | 70 | 71 | 72 | 73 | 74 | 75 | 76 | 77 | 78 | 79

10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19

20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

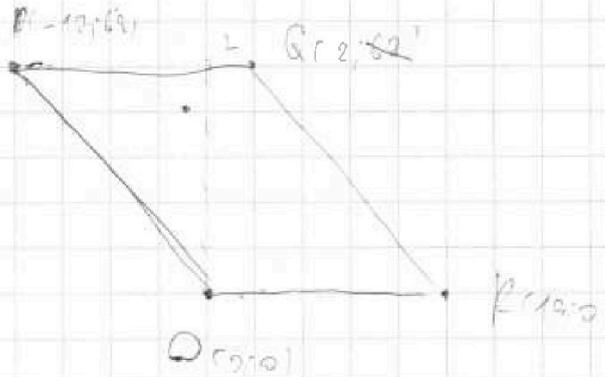
- 1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задание № 5:

$$O(0; 0) \quad P(2; 6) \quad Q(2; 2) \quad R(13; 0)$$



44

$$P(2; 6) \quad Q(2; 2)$$

$$4x_2 - 4x_1 + 6x_2 - 2x_1 = 40$$

$$4(x_2 - x_1) + 6(x_2 - x_1) \geq 40$$

$$\Delta x \leq 10 \Rightarrow 964 \in [4; 10]$$

$$65 \leq 63 \Rightarrow 56 \in [1; 63] \Rightarrow \Delta y \leq 4$$

$$\Delta x \in [0; 10] \Rightarrow \Delta y = [36; 32; 28; 24; 20; 16; 12; 8; 4]$$

$$\Delta x: 66 \quad 1 \div 9-4 \quad 2 \div 8-3 \quad 3 \div 7-2$$

$$\begin{array}{r} 63 \\ - 12 \\ \hline 23 \end{array}$$

$$y = 12 + 6$$

$$\begin{cases} 63 = -12x + 6 \\ 0 = 0 + 6 \Rightarrow 6 = 0 \end{cases}$$

$$63 = -12x \Rightarrow x = -4$$

$$\Rightarrow y = -42 \Rightarrow \Delta x = 4 \Delta y$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Уравнение

$$2) \log_7^4 y + 6 \log_7^3 z = \log_7^2 (7^x) - 4$$

$$\log_7^4 y + 6 \log_7^3 z = \frac{1}{2} \log_7^2 7 - 4$$

$$\log_7^4 y + \frac{17+5}{2} \log_7^3 z - 4 = 0$$

$$\log_7^4 y + 7.5 \log_7^3 z - 4 = 0$$

$$\log_7^4 y + 3.5 \log_7^3 z - 4 = 0$$

$$\log_7^4 y + 3.5 - 4 \log_7^2 z = 0$$

$$\log_7^4 y + 3.5 - 4 \log_7^2 z = 0$$

$$\log_7^4 y + \log_7^2 z + 2 - 4(\log_7^2 y + \log_7^2 z) = 0$$

$$(\log_7^4 y + \log_7^2 z) + 2 - 4(\log_7^2 y + \log_7^2 z) = 0$$

$$(\log_7^2 y)^2 + (\log_7^2 z)^2 + 2 - 4(\log_7^2 y + \log_7^2 z) = 0$$

$$(\log_7^2 y)^2 + (\log_7^2 z)^2 + 2 - 4(\log_7^2 y + \log_7^2 z) = 0$$

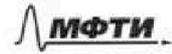
$$\log_7^2 y \cdot (\log_7^2 y - \log_7^2 z) + (\log_7^2 z)^2 + 2 - 4(\log_7^2 y + \log_7^2 z) = 0$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- |                                     |                                     |                                     |                                     |                                     |                                     |                                     |
|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| 1                                   | 2                                   | 3                                   | 4                                   | 5                                   | 6                                   | 7                                   |
| <input checked="" type="checkbox"/> |

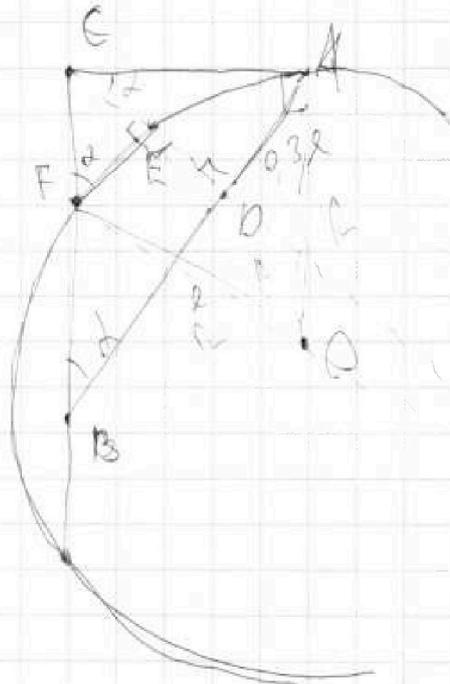
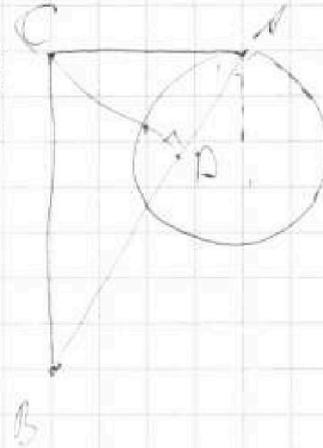
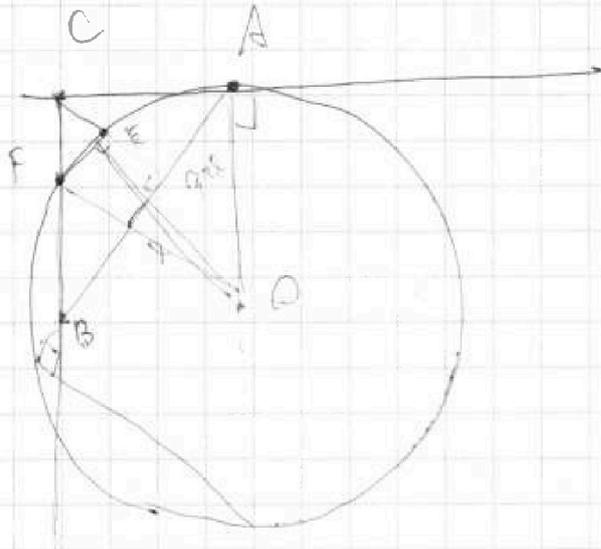
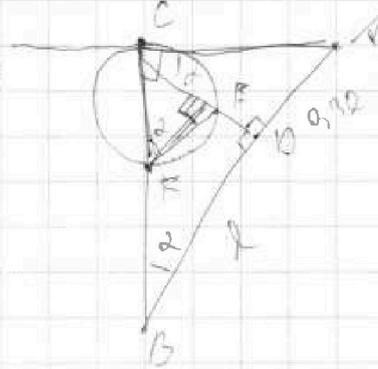


Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$AD \parallel EF$ ,  $AB:BD = 1:3$

$AB:BD = 1:3$

$S_{ACD} = S_{CDE}$





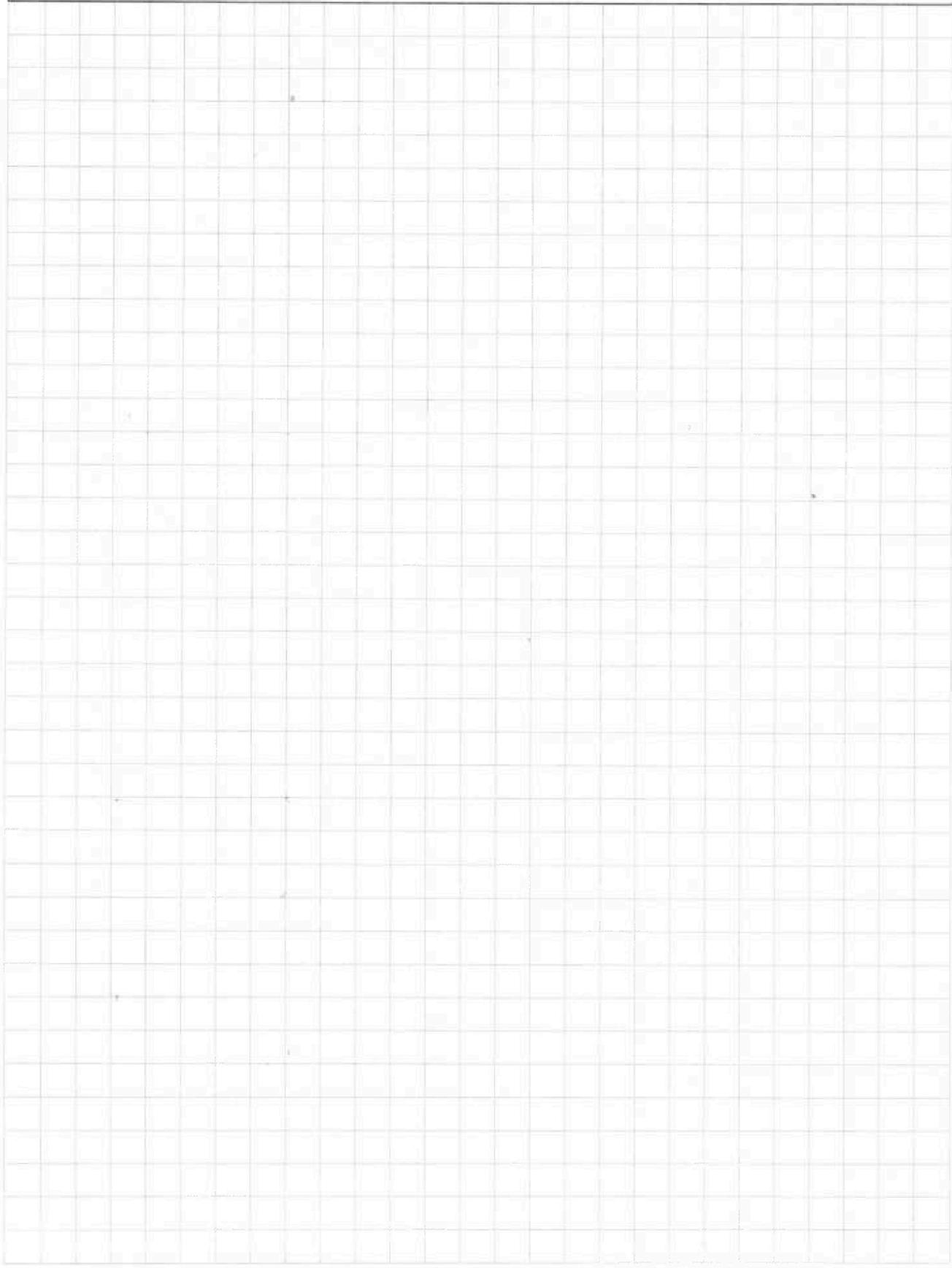
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>						



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

МФТИ

1  2  3  4  5  6  7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Решение

$$\begin{cases} \log_7^4(6x) - 2 \log_7^2 x = \log_7^2(3-4x) & (1) \\ \log_7^4 x + 6 \log_7 x = \log_7^2(7^x) - 4 \end{cases}$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} 6x > 0 \\ 6x < 0 \\ 6x \neq 1 \\ 6x^2 \neq 1 \\ x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases} \begin{cases} x > 0 \\ x \neq \frac{1}{6} \\ x^2 \neq \frac{1}{6} \\ x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$$

$$(1): \log_7^4(6x) - 2 \frac{\log_7^2 x}{\log_7 6x} = \frac{2 \log_7^2(3-4x)}{\log_7 6x} - 4$$

$$\log_7^4(6x) - \frac{2}{\log_7 6x} = \frac{2 \log_7^2(3-4x)}{\log_7 6x} - 4$$

$$\log_7^4(6x) - \frac{2 \log_7^2(3-4x)}{\log_7 6x} = \frac{2 \log_7^2(3-4x)}{\log_7 6x} - 4$$

$$\log_7^4(6x) - \frac{2 \log_7^2(3-4x)}{\log_7 6x} = -4$$

$$\log_7^4(6x) - \frac{2 \log_7^2(3-4x)}{\log_7 6x} = -4 \cdot \log_7 6x$$

$$\log_7^5(6x) - \frac{2}{\log_7 6x} = -4 \log_7 6x$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Крестик  $K^4$

$$4x = 6y + cz + d = 0$$

$$\begin{cases} x + 3ay - 2b = 0 \\ (x^2 + 14y^2 + z^2 + 45) - (x^2 + y^2 - 9) = 0 \end{cases}$$

$$y = 2x + 6 \quad 0x + 6y + cz = 0$$

$A(0; 0; 0)$

$$\begin{cases} x + 3ay - 2b = 0 \\ x^2 + 14y^2 + z^2 + 45 = 0 \end{cases}$$



$$S = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$= \frac{|0 + 0 + 3|}{\sqrt{0^2 + 6^2 + 0^2}}$$

$$= \frac{3}{\sqrt{36}} = \frac{3 \cdot \sqrt{2}}{2} = 1.5\sqrt{2}$$

$$(1) \quad x^2 + 14y^2 + z^2 + 45 = 0$$

$$x^2 + 14y^2 + z^2 - 4 = 0$$

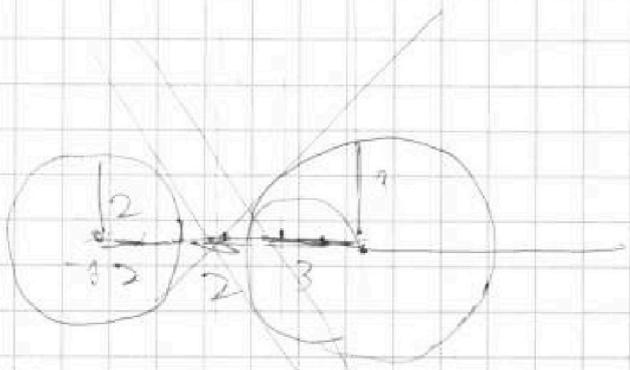
$$(x + 7)^2 + z^2 = 4$$

$$x^2 + z^2 = 9$$

$$x + 3ay - 2b = 0$$

$$3ay = 2b - x$$

$$y = \frac{2b - x}{3a}$$



$$S = \frac{|0 + 3a \cdot 0 - 2b|}{\sqrt{1 + 9a^2}} \quad \text{or} \quad \frac{2b}{\sqrt{1 + 9a^2}}$$

$$S = \frac{|-2b + 3a \cdot 0 - 2b|}{\sqrt{1 + 9a^2}} \quad \text{or} \quad \frac{2|6 + b|}{\sqrt{1 + 9a^2}}$$

$$\begin{cases} 6y^2 = 9 + 36a^2 = 2b^2 \Rightarrow \sqrt{1 + 9a^2} \quad (1) \\ 6y^2 = 9 + 36a^2 = 2b^2 + 12 \Rightarrow \sqrt{1 + 9a^2} \quad (2) \end{cases}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Справедливо

$$\cos \in \text{arccos} \cos \left( \frac{3\sqrt{3}}{2} + 2 \right)$$

$$\text{arccos} \cos \left( \frac{3\sqrt{3}}{2} + 2 \right) = \frac{3\sqrt{3}}{2} + 2$$

$$\Rightarrow \cos \left( \frac{3\sqrt{3}}{2} + 2 \right) = \cos \left( \frac{3\sqrt{3}}{2} + 2 \right)$$

$$\frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \quad \cos \left( \frac{3\sqrt{3}}{2} + 2 \right) = \cos \left( \frac{3\sqrt{3}}{2} + 2 \right)$$

$$\frac{2 \cdot 3\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \quad \cos \left( \frac{3\sqrt{3}}{2} + 2 \right) = \cos \left( \frac{3\sqrt{3}}{2} + 2 \right)$$

$$\Rightarrow \frac{3\sqrt{3}}{2} \in [-1; 1]$$

$$\cos \left( \frac{3\sqrt{3}}{2} + 2 \right) = \cos \left( \frac{3\sqrt{3}}{2} + 2 \right)$$

$$\cos \left( \frac{3\sqrt{3}}{2} + 2 \right) \in [-1; 1]$$

$$\frac{3\sqrt{3}}{2} + 2 \in [-1; 1] \quad \cos \left( \frac{3\sqrt{3}}{2} + 2 \right) = \cos \left( \frac{3\sqrt{3}}{2} + 2 \right)$$

$$\frac{3\sqrt{3}}{2} + 2 \in [-1; 1] \quad \cos \left( \frac{3\sqrt{3}}{2} + 2 \right) = \cos \left( \frac{3\sqrt{3}}{2} + 2 \right)$$

$$\frac{3\sqrt{3}}{2} + 2 \in [-1; 1] \quad \cos \left( \frac{3\sqrt{3}}{2} + 2 \right) = \cos \left( \frac{3\sqrt{3}}{2} + 2 \right)$$

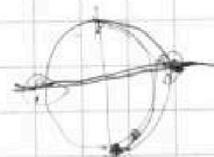
$$\frac{3\sqrt{3}}{2} + 2 \in [-1; 1] \quad \cos \left( \frac{3\sqrt{3}}{2} + 2 \right) = \cos \left( \frac{3\sqrt{3}}{2} + 2 \right)$$

$$\cos \left( \frac{3\sqrt{3}}{2} + 2 \right) = \cos \left( \frac{3\sqrt{3}}{2} + 2 \right)$$

$$\cos \left( \frac{3\sqrt{3}}{2} + 2 \right) = \cos \left( \frac{3\sqrt{3}}{2} + 2 \right)$$



$$\cos \left( \frac{3\sqrt{3}}{2} + 2 \right) = \cos \left( \frac{3\sqrt{3}}{2} + 2 \right)$$



$$\cos \left( \frac{3\sqrt{3}}{2} + 2 \right) = \cos \left( \frac{3\sqrt{3}}{2} + 2 \right)$$

$$\cos \left( \frac{3\sqrt{3}}{2} + 2 \right) = \cos \left( \frac{3\sqrt{3}}{2} + 2 \right)$$

$$\cos \left( \frac{3\sqrt{3}}{2} + 2 \right) = \cos \left( \frac{3\sqrt{3}}{2} + 2 \right)$$

$$\cos \left( \frac{3\sqrt{3}}{2} + 2 \right) = \cos \left( \frac{3\sqrt{3}}{2} + 2 \right)$$

$$\cos \left( \frac{3\sqrt{3}}{2} + 2 \right) = \cos \left( \frac{3\sqrt{3}}{2} + 2 \right)$$

$$\cos \left( \frac{3\sqrt{3}}{2} + 2 \right) = \cos \left( \frac{3\sqrt{3}}{2} + 2 \right)$$

$$\cos \left( \frac{3\sqrt{3}}{2} + 2 \right) = \cos \left( \frac{3\sqrt{3}}{2} + 2 \right)$$

$$\cos \left( \frac{3\sqrt{3}}{2} + 2 \right) = \cos \left( \frac{3\sqrt{3}}{2} + 2 \right)$$

$$\cos \left( \frac{3\sqrt{3}}{2} + 2 \right) = \cos \left( \frac{3\sqrt{3}}{2} + 2 \right)$$

$$\cos \left( \frac{3\sqrt{3}}{2} + 2 \right) = \cos \left( \frac{3\sqrt{3}}{2} + 2 \right)$$

$$\cos \left( \frac{3\sqrt{3}}{2} + 2 \right) = \cos \left( \frac{3\sqrt{3}}{2} + 2 \right)$$

$$\cos \left( \frac{3\sqrt{3}}{2} + 2 \right) = \cos \left( \frac{3\sqrt{3}}{2} + 2 \right)$$

$$\cos \left( \frac{3\sqrt{3}}{2} + 2 \right) = \cos \left( \frac{3\sqrt{3}}{2} + 2 \right)$$

$$\cos \left( \frac{3\sqrt{3}}{2} + 2 \right) = \cos \left( \frac{3\sqrt{3}}{2} + 2 \right)$$

$$\cos \left( \frac{3\sqrt{3}}{2} + 2 \right) = \cos \left( \frac{3\sqrt{3}}{2} + 2 \right)$$

$$\cos \left( \frac{3\sqrt{3}}{2} + 2 \right) = \cos \left( \frac{3\sqrt{3}}{2} + 2 \right)$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.  
 Отметьте крестиком номер задачи,  
 решение которой представлено на странице:

- 1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
 страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Уравнения:  $a_b: 2^7 3^{11} 5^{14}$      $b_c: 2^{13} 3^{15} 5^{13}$      $a_c: 2^{13} 3^{15} 5^{13}$

$a_b: 2^7$   
 $b_c: 3^{11}$   
 $a_c: 2^{13}$

$$\begin{cases} a+b \geq 12 \\ b+c \geq 13 \\ c+a \geq 13 \end{cases}$$

$$24 + 26 + 2c \geq 32 \quad | :2$$

пусть  $a+b+c = 17$   
 $c+c \geq 12$   
 $c \geq 6$

$b \geq 3$      $c \geq 3$   
 $10 + 3 + 4 = 17$  - верно

$a+b+c = 16,6 \Rightarrow c = 13$   
 $7+c = 16,6$   
 $c \geq 9,6$   
 $a+b = 13 = 16,6$   
 $c = 10,6$   
 $11+c \geq 22$   
 $c \geq 11$

$\arccos(\cos(\alpha - \frac{\pi}{2})) = \frac{3\pi}{2} + \alpha$   
 $\arccos(\cos(\alpha - \frac{\pi}{2})) = \frac{3\pi}{2} + \alpha$   
 $\arccos(\cos(\alpha - \frac{\pi}{2})) = \frac{3\pi}{2} + \alpha$

$\frac{32}{11} > \frac{43}{43}$   
 $11 > 43$

$\arccos(\cos(\alpha - \frac{\pi}{2})) = \frac{3\pi}{2} + \alpha$   
 $\arccos(\cos(\alpha - \frac{\pi}{2})) = \frac{3\pi}{2} + \alpha$   
 $\arccos(\cos(\alpha - \frac{\pi}{2})) = \frac{3\pi}{2} + \alpha$