



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 10



1. [3 балла] При каком наименьшем натуральном n число $(n-1)! + n! + (n+1)!$ делится на 289?
2. [3 балла] Из суммы квадратов семи последовательных натуральных чисел вычли число 28 и получили пятую степень натурального числа N , большего 8. Найдите наименьшее возможное значение N .
3. [4 балла] Решите неравенство

$$\left| \sqrt{x^2 - x - 2} + 5 \right| \geq \left| \sqrt{x^2 - x - 2} + x - 1 \right| + |6 - x|.$$

4. [5 баллов] На координатной плоскости рассматриваются ромбы с длиной стороны 5 такие, что абсциссы и ординаты всех четырёх вершин каждого ромба — целые числа из промежутка $[1; 45]$. Сколько существует таких ромбов? Напомним, что квадрат также является ромбом.
5. [5 баллов] Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющих уравнению

$$23 \cdot 2^x + 2025 = y^2.$$

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при каждом из которых для множества точек плоскости Oxy , задаваемых уравнением $x^2 + y^2 = a^2$, наибольшее значение выражения $y^2 - 4y - a$ равно 6.
7. [6 баллов] На сторонах AB и BC треугольника ABC выбраны точки M и N соответственно так, что $\angle MNB = \angle ANC = 70^\circ$. Найдите $\angle CAN$, если известно, что $BN \cdot MA = 2BM \cdot NC$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} 1) \quad (n-1)! + n! + (n+1)! &= \frac{n!}{n} + n! + n!(n+1) = n! \left(n+1 + 1 + \frac{1}{n} \right) = \\ &= n! \left(\frac{n^2 + 2n + 1}{n} \right) = \frac{n! (n^2 + 2n + 1)}{n} = \frac{n! (n+1)^2}{n} \end{aligned}$$

$$289 = 17^2$$

$$\frac{n! (n+1)^2}{n} : 17^2$$

если $n \leq 16$, тогда $n.k$ 17 простое

$n! \not\vdots 17$ т.к. 17 простое и $n < 17$

$(n+1)^2 \not\vdots 17$ т.к. $n+1 < 17$ и 17 простое
 $\downarrow$

$$n! (n+1)^2 \not\vdots 17^2 \quad \therefore \quad \frac{n! (n+1)^2}{n} : 17^2$$

если $n = 16$, тогда

$$\frac{16! (16+1)^2}{16} = 15! \cdot 17^2 \quad \text{т.к. } 17^2 : 17^2, \text{ то}$$

$$15! \cdot 17^2 : 17^2$$

$$15! \cdot 17^{\frac{11}{2}} : 289$$

$$n = 16$$

Ответ: $n = 16$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$2) \quad x^2 + (x+1)^2 + \dots + (x+6)^2 = N^5, \quad N > 8$$

$$x^2 + x^2 + 2x + 1 + \dots + x^2 + 12x + 36 = N^5$$

$$7x^2 + 2(1+2+3+4+5+6)x + (1+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2) - 28 - N^5 = 0$$

$$7x^2 + 42x + 91 - 28 - N^5 = 0$$

$$D = 42^2 - 4 \cdot 7 \cdot (63 - N^5) = 1764 - 28(63 - N^5) =$$

$$= 28N^5$$

$$x = \frac{-42 \pm \sqrt{28N^5}}{14} \quad \text{или} \quad x = \frac{-42 - \sqrt{28N^5}}{14}, \quad \text{то } x < 0; \text{ то } x \in \mathbb{N}$$

принимается

$$x = \frac{-42 + \sqrt{28N^5}}{14} = -3 + \frac{\sqrt{28N^5}}{14} \quad \text{и.к. } x \in \mathbb{N}, \text{ то}$$

$$\frac{\sqrt{28N^5}}{14} > 3 \quad \sqrt{28N^5} = 14y, \text{ где } y \in \mathbb{N}$$

$$\sqrt{28N^5} > 42$$

$$28N^5 > 1764$$

$$N^5 > 63$$

↑
можно не учитывать
и.к. по условию $N > 8$
и $N^5 > 63$

$$28N^5 : 14^2$$

$$2N^5 : 14$$

$$N^5 : 7$$

$$N = 7y, \quad N > 8; \quad y \in \mathbb{N}$$

$$7y > 8$$

$$y > \frac{8}{7} \quad \text{и т.к. } y \in \mathbb{N}$$

$$y = 2$$

$$N = 7 \cdot y = 7 \cdot 2 = 14$$

$$\text{Ответ: } N = 14$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

3) м.к $\sqrt{y} \geq 0$, м.б

$\sqrt{x^2-x-2} \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x^2-x-2} + 5 > 0 \Rightarrow$ модуль слева
можно убрать

если $\sqrt{x^2-x-2} \geq 0$, то $\sqrt{x^2-x-2} \cdot x^2-x-2 \geq 0$

$x^2-x-2 = 0$

$D = 9$
 $x_1; x_2 = \frac{1 \pm 3}{2} = 2; -1$
||

$x^2-x-2 = (x-2)(x+1)$ и м.к $\sqrt{x^2-x-2} \geq 0$, м.б

$x \geq 2$; $x \leq -1$

таким образом неравенство сейчас выглядит так:

$\sqrt{x^2-x-2} + 5 \geq |\sqrt{x^2-x-2} + x - 1| + |6 - x|$ убираем
модуль

1. $\sqrt{x^2-x-2} + 5 \geq \sqrt{x^2-x-2} + x - 1 + x - 6$; $x \geq 6$

$5 \geq 2x - 7 \Rightarrow 6 \geq x$ и м.к $x \geq 6$, но при этом

увеличить неравенство не получается

2. $\sqrt{x^2-x-2} + 5 \geq \sqrt{x^2-x-2} + x - 1 + 6 - x$; $x \leq 6$; $x \geq 2$

$5 \geq 5$ так подходит отрезок $x \in [6; 2]$

3. $\sqrt{x^2-x-2} + 5 \geq -\sqrt{x^2-x-2} - x + 1 + 6 - x$; $x \leq -1$

$2\sqrt{x^2-x-2} \geq -2x + 2 \Rightarrow \sqrt{x^2-x-2} \geq -x + 1$ м.к $x \leq -1$

$x^2-x-2 \geq x^2-2x+1$

$x \geq 3$ но $x < -1$

~~так~~ $-x + 1 \geq 0$, но
 $(\sqrt{x^2-x-2})^2 \geq (-x+1)^2$

Ответ: $x \leq 6$; $x \geq 2$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи отдельно.

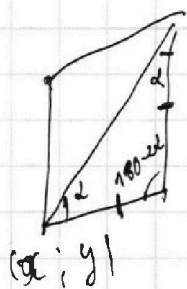
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

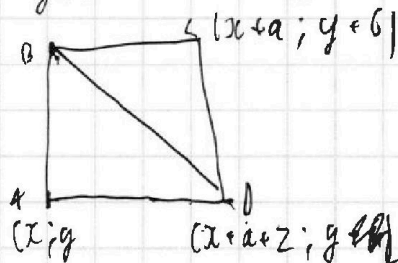
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

4) пусть верш рабды $(x; y)$, а противополож.
верш $(x+a; y+b)$, тогда
 $(x+a; y+b)$



м.к. координата по x не влияет
 $x+a$ м.к. дане в квадрате



длина AD = длина CD
 $\sqrt{(a+b)^2}$ $\sqrt{a^2+b^2}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$5) \quad 2^3 \cdot 2^x = y^2 - 2025 \quad 2025 = 45^2$$

$$2^3 \cdot 2^x = (y-45)(y+45)$$

$$2^x = \frac{(y-45)(y+45)}{2^3} \quad \text{одна из скобок делится на } 2^3$$

$$\text{Пусть } y-45 \equiv 0 \pmod{2^3}$$

$$y+45 \equiv 2^k \quad y = 2^k - 45$$

$$y-45 = 2^k - 90 \equiv 0 \pmod{2^3}$$

$$2^k \equiv 2^1 \pmod{2^3}$$

$$\text{Сумма в матрице } 2^a \equiv 2^3$$

a	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$2^a \pmod{2^3}$	1	2	4	8	16	9	18	43	3	6	12	1	2

$$\text{данные от записки и.к. } 2^{a+1} \equiv 2^a \cdot 2 \pmod{2^3}$$

$$2^k \equiv 2^1 \pmod{2^3} \quad \text{матрица от темы в матрице}$$

$$\text{Пусть } y+45 \equiv 0 \pmod{2^3}$$

$$y = 45 = 2^k \quad y = 2^k + 45 \quad y+45 = 2^k + 90 \equiv 0 \pmod{2^3}$$

$$2^k \equiv 2 \pmod{2^3} \quad \text{но матрица } k = 1+16; 66/10, \text{ но}$$

$$2^k + 90 \text{ имеет степень } 2 \text{ и если } 2^k > 90, \text{ то}$$

$$2^k < 2^k + 90 < 2^{k+1} = 2^k \cdot 2 \quad \text{а } 2^{1+16} > 90, \text{ при } 6 > 12; 6 \leq 0; k=1$$

$$y = 2^1 + 45 = 47; \quad 2^x = \frac{47^2 - 2025}{2^3} = 8 \Rightarrow x=3$$

$$\text{Ответ: } y=47; x=3$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☒	☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

6) $y^2 - 4y - a$ будет максимальным если
 y - максимально возможный
 y - максимально возможный

1. $a > 0$

$$x^2 + y^2 = a^2$$

$$y - \max$$

$$\max y = a$$

$$\min y = -a$$

$$\max y) y^2 - 4y - a = a^2 - 4a - a = a^2 - 5a$$

$$\min y) y^2 - 4a - a = a^2 + 4a - a = a^2 + 3a$$

$$a^2 + 3a > a^2 - 5a \quad \text{т.к. } a > 0$$

$$a^2 + 3a - 6 = 0 \quad D = 9 + 24 = 33 \quad \sqrt{33} > 5 \Rightarrow -3 + \sqrt{33} > 0$$

$$a = \frac{-3 + \sqrt{33}}{2} \quad a \neq \frac{-3 - \sqrt{33}}{2} \quad \text{т.к. } a > 0$$

или

2. $a < 0$

$$x^2 + y^2 = a^2 \quad \max y = -a; \min y = a$$

$$\max y) a^2 + 3a \quad a^2 + 3a < a^2 - 5a \quad \text{т.к. } a < 0$$

$$\min y) a^2 - 5a$$

$$a^2 - 5a - 6 = 0 \quad D = 25 + 24 = 49 \quad a = \frac{5 \pm 7}{2}$$

$$a_1 = -1 \quad a_2 = 6 \text{ — невозможно т.к. } a < 0$$

$$\text{Ответ: } a = -1 \text{ или } a = \frac{-3 + \sqrt{33}}{2}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒

СТРАНИЦА
 _ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 1.
 разложим 289 на простые

~~$289 = 17^2$ т.к. 17 - простое число, то
 $x!$ делится на 17, только если $x \geq 17$ т.к.
 иначе 17 не будет в множителе и т.к. 17
 простое с любой другой число < 17 его не
 делит~~

~~значит 2 слагаемых будут : 17, а конкретно~~

~~$n! + (n+1)! = 289 \Rightarrow n = 17$~~

~~если $n < 17$, то $n! \div 17$ и $(n+1)! \div 17$~~

~~$(n-1)! \div 17$~~

~~$(n+1)!$ делится так раз на 17~~

~~а~~

$289 = 17^2$

$(n-1)! + n! + (n+1)! = \frac{n!}{n} + n! + n!(n+1) = n! \left(\frac{1}{n} + 1 + n + 1 \right) =$

$= n! \left(n+2 + \frac{1}{n} \right)$ т.к. $n \in \mathbb{N} \Rightarrow n+2 \in \mathbb{N}$ а $\frac{1}{n} \notin \mathbb{N}$, где $n > 1$

выясним, что

$n+2 + \frac{1}{n} \notin \mathbb{N}$, где $n > 1 \Rightarrow n+2 + \frac{1}{n} \neq 17$

в выражении $n! \left(n+2 + \frac{1}{n} \right) \div 17^2$, $n+2 + \frac{1}{n} \neq 17$

$36 \mid 23$

то

$n! \div 17^2$

$4 - 4 = 0$

$(n-1)^2$

$n! \left(n+2 + \frac{1}{n} \right) = \frac{n! (n^2 + 2n + 1)}{n}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$5) \quad 23 \cdot 2^x = y^2 - 2025$$

$$2025 = 45^2$$

$$23 \cdot 2^x = (y - 45)(y + 45)$$

$$2^x = \frac{(y - 45)(y + 45)}{23}$$

одна из скобок
дел на 23 и получается
степень 2

пусть $y - 45 \equiv 0 \pmod{23}$

$$y - 45 = 23k$$

$$y + 45 = 2^k$$

$$y = 23k - 45$$

$$y = \frac{(2^{(1+106)} + 45)(2^{(1+106)} - 45)}{23}$$

$$y - 45 = 2^k - 90 \equiv 0 \pmod{23}$$

$$2^k \equiv 21 \pmod{23}$$

$$\begin{array}{r} 23 \overline{) 360} \\ \underline{-23} \\ 130 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 23 \overline{) 258} \\ \underline{-23} \\ 13 \end{array}$$

$$\frac{(1+106)}{23} \cdot 2^{1+106} - 2025$$

$$2^a \equiv 21 \pmod{23} \Rightarrow 2^{a+106} + 90 \cdot 2^{1+106}$$

Сделаем таблицу

a	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$2^a \pmod{23}$	2	4	8	16	9	18	13	3	6	12

м.к. при $2^a \equiv 0 \pmod{23}$, то
все $2^a \equiv 0 \pmod{23}$ при $a \geq 8$

$2^k \equiv 21 \pmod{23}$ но y так как между противоречием

пусть $y + 45 \equiv 0 \pmod{23}$

$$y - 45 = 2^k$$

$$y = 2^k + 45$$

$$y + 45 = 2^k + 90 \equiv 0 \pmod{23}$$

$2^k \equiv 2 \pmod{23}$ но так как $k = 1$ других k нету
($2^a \pmod{23}$)

$$y = 2^1 + 45 = 47 \quad 2^x = \frac{47^2 - 2025}{23} = 8 \Rightarrow x = 3$$

Ответ: $y = 47$; $x = 3$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$5) 2^x = \frac{(y-45)(y+45)}{23} = 2^x \cdot 23$$

$$a^2 = x^2 + y^2$$

$$y^2 = a^2 - x^2$$

$$y = 2^{\frac{x}{2}} - 45$$

$$2^{\frac{x}{2}} = 45$$

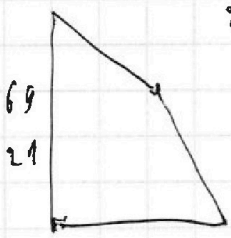
$$2^{\frac{x}{2}} = 12$$

$$y^2 - 4y - a \leq 6$$

$$y^2 - 4y + x^2 - y^2$$

$$2y^2$$

$$a^2 - x^2 - \sqrt{a^2 - x^2} - a \leq 6$$



$$2 \quad 4 \quad 9 \quad 16 \quad 25 \quad 36$$

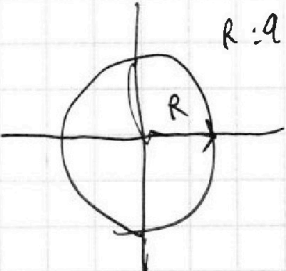
$$36 \div 23$$

$$\begin{array}{r} 2 \\ 45 \\ \times 45 \\ \hline 225 \\ 180 \\ \hline 2025 \end{array}$$

$$y = a \cdot 2^{\frac{x}{2}} - 45$$

$$2^{\frac{x}{2}} - 90 = 69$$

$$2^{\frac{x}{2}} = 159$$



$$R = a \quad y = a$$

$$a = 6$$

$$a^2 - 4a - a = a^2 - 5a = 6$$

$$a^2 - 5a - 6 = 0$$

$$D = 25 + 24 = 49$$

$$a_1, a_2 = \frac{5 \pm 7}{2} = -1; 6$$

$$x = -a \quad y = -a$$

$$a^2 + 4a - a$$

$$a^2 + 3a = 6$$

$$a^2 + 3a - 6 = 0$$

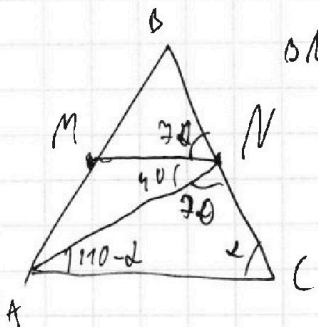
$$\frac{9 - 6\sqrt{33} + 33}{4} + \frac{-9 + 3\sqrt{33}}{2}$$

$$\frac{42}{4} - \frac{18}{1}$$

$$\frac{9 + 24 = 33}{-3 \pm \sqrt{33}}$$

$$100$$

$$a = \frac{-3 + \sqrt{33}}{2}$$



$$ON \cdot MA = \angle OM \cdot NC$$

$$\frac{(y-45)}{(x+106)} \cdot \frac{(x+106)}{(2-456)}$$

$$y = 2 + 45 = 47$$

A

$$\begin{array}{r} 47 \\ \times 47 \\ \hline 329 \\ 188 \\ \hline 2209 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -2209 \\ 2025 \\ \hline 184 \end{array}$$

$$2^x + 90 = 1^x$$

$$25 \cdot x - 90 = 12^6$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$1) \begin{array}{r|l} 289 & 17 \\ \hline 17 & 17 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 289 : 2 = X \\ 289 : 3 = X \\ 289 : 5 = X \\ 289 : 7 = X \\ 289 : 11 = X \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 289 : 13 = X \\ 289 : 17 = \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 119 \\ \times 17 \\ \hline 119 \end{array}$$

$$(n-1)! \text{ ум } n! \text{ ум } (n+1)! \geq 17!$$

$$\begin{array}{r} 2025 \\ \times 5 \\ \hline 10125 \\ \times 9 \\ \hline 181875 \end{array}$$

$$2) x + (x+1)^2 + (x+2)^2 + \dots + (x+6)^2 = N^5; N > 8$$

$$2(1+2+3+4+5+6) = 28$$

$$2x^2 + 42x + 91 = N^5$$

$$91 - N^5 = 28$$

$$2x^2 + 42x + 91 - 28N^5 = 0$$

$$x = \frac{-42 \pm \sqrt{2145}}{4} = -3 \pm \frac{\sqrt{2145}}{4}$$

$$8 = 1764 - 28(63 - N^5) = 28N^5$$

$$28N^5 = 14^2$$

$$2N^5 = 17$$

$$N^5 = 7$$

$$N = 7$$

$$\begin{array}{l} n!(n+1) + n! + \frac{n!}{n} \\ n!(n+1+1+\frac{1}{n}) \\ n!(n+\frac{2n+1}{n}) \end{array}$$

$$3) |\sqrt{x^2-x-2}| + 5 \geq |\sqrt{x^2-x-2}| + x - 1 + |6-x|$$

$$x = (9-45)(9+45) \quad 2x = (9-45)(9+45)$$

$$1+8=9$$

$$\frac{17 \pm 3}{2} \quad 1; -2$$

$$\sqrt{x^2-x-2} + 5 \geq$$

$$x^2-x-2 \geq x^2-2x+1$$

$$-x-2 \geq 0 \quad x \geq 3$$

$$\sqrt{x^2-x-2} + 5 \geq \sqrt{x^2-x-2} + x - 1 + (x-6) \quad x \geq 6$$

$$\sqrt{x^2-x-2} + 5 \geq \sqrt{x^2-x-2} + x - 1 + (6-x) \quad x \leq 6; x \geq 1$$

$$\sqrt{x^2-x-2} + 5 \geq -\sqrt{x^2-x-2} - x + 1 + (6-x) \quad x \leq -2$$

$$2\sqrt{x^2-x-2} + 11 \geq -x - 5 + 1 + 6 - x = -2x + 2$$

$$\sqrt{x^2-x-2} \geq -x + 1$$

$$x^2-x-2 \geq x^2-2x+1$$

$$-3 \geq 3x$$

$$-1 \geq x$$

$$x \geq 3$$

$$\frac{17^2 + 17 + 1}{17}$$

$$17 + 1 + \frac{1}{17}$$

$$n! \left(\frac{n^2 + 2n + 1}{n} \right)$$