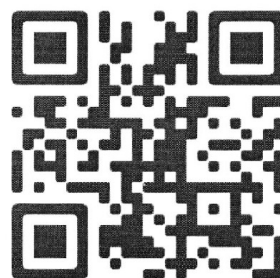


МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 10



1. [3 балла] При каком наименьшем натуральном n число $(n-1)! + n! + (n+1)!$ делится на 289?
2. [3 балла] Из суммы квадратов семи последовательных натуральных чисел вычли число 28 и получили пятую степень натурального числа N , большего 8. Найдите наименьшее возможное значение N .
3. [4 балла] Решите неравенство

$$\left| \sqrt{x^2 - x - 2} + 5 \right| \geq \left| \sqrt{x^2 - x - 2} + x - 1 \right| + |6 - x|.$$

4. [5 баллов] На координатной плоскости рассматриваются ромбы с длиной стороны 5 такие, что абсциссы и ординаты всех четырёх вершин каждого ромба — целые числа из промежутка $[1; 45]$. Сколько существует таких ромбов? Напомним, что квадрат также является ромбом.
5. [5 баллов] Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющих уравнению

$$23 \cdot 2^x + 2025 = y^2.$$

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при каждом из которых для множества точек плоскости Oxy , задаваемых уравнением $x^2 + y^2 = a^2$, наибольшее значение выражения $y^2 - 4y - a$ равно 6.
7. [6 баллов] На сторонах AB и BC треугольника ABC выбраны точки M и N соответственно так, что $\angle MNB = \angle ANC = 70^\circ$. Найдите $\angle CAN$, если известно, что $BN \cdot MA = 2BM \cdot NC$.



1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$289 = 17^2$$

N1

Пусть $(n-1)! \equiv k \pmod{289}$, тогда:

$$n! \equiv n \cdot (n-1)! \equiv n \cdot k \pmod{289}$$

$$(n+1)! \equiv n \cdot (n+1) \cdot (n-1)! \equiv (n^2 + n) \cdot k \pmod{289}$$

$$0 \equiv (n-1)! + n! + (n+1)! \equiv k + k \cdot n + k \cdot (n^2 + n) \equiv k \cdot (n+1) \cdot (n+1)$$

$$① (n+1)(n+1) : 289$$

$$\begin{array}{l} \Downarrow \\ (n+1) : 17 \\ \Downarrow \\ n \geq 16 \end{array}$$

$$② (n+1)^2 : 289$$

$$\begin{array}{l} \Downarrow \\ n+1 : 17 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \Downarrow \\ k : 289 \Rightarrow (n-1)! : 289 = 17^2 \\ \Downarrow \\ n \geq 35 \end{array}$$

Проверим $n=16$

$$15! + 16! + 17! \equiv k + 16k + 16 \cdot 17k \equiv 17k + 16 \cdot 17k \equiv 289k \pmod{289}$$

$$\Downarrow \\ 15! + 16! + 17! : 289$$

Ответ: при $n=16$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

нет ответа по варианту N 2
а - ~~наименьшее~~ ^{большая} ~~число~~ ^{разность} семи чисел

$$a^2 + (a+1)^2 + (a+2)^2 + (a+3)^2 + (a-1)^2 + (a-2)^2 + (a-3)^2 - 28 =$$

$$= 7a^2 + 2a + 4a + 6a - 2a - 4a - 6a + 1 + 4 + 9 + 1 + 4 + 9 - 28 = 7a^2 = N^5$$

$$\Rightarrow N \geq 8$$

$$N \geq 14$$

$$\text{Пусть } N = 14$$

$$7^5 \cdot 2^5 = 7 \cdot a^2$$

$$\text{Тогда } N \geq 21$$

$$\text{Если } N = 21$$

$$7^5 \cdot 3^5 = 7 \cdot a^2$$

решений нет т.к. $v_2(7 \cdot a^2) = v_2(a^2) = 2 \cdot v_2(a) \geq 2$
 $v_2(7^5 \cdot 3^5) = 5 \nless 2$

$$v_3(7 \cdot a^2) = v_3(a^2) = 2 \cdot v_3(a) \geq 2$$

$$v_3(7^5 \cdot 3^5) = 5 \nless 2$$

$$\text{Тогда } N \geq 28$$

$$7^5 \cdot 2^{10} = 7(7^2 \cdot 2^5)^2 = 7^5 \cdot 2^{10}$$

$$\text{Ответ: } N = 28$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№3

$$|\sqrt{x^2-x-2}+5| \geq |\sqrt{x^2-x-2}+x-1| + |6-x|$$

$$\sqrt{x^2-x-2}+5 \geq |\sqrt{x^2-x-2}+x-1| + |6-x|$$

$$\sqrt{x^2-x-2} \geq 0$$

$$\sqrt{x^2-x-2}+5 \geq 0$$

$$x^2-x-2 = (x-2)(x+1) \quad x_1 = -1 \quad x_2 = 2$$

$$\begin{cases} x \leq -1 \\ x \geq 2 \end{cases}$$

$$① \begin{cases} \sqrt{x^2-x-2}+x-1 \geq 0 \\ 6-x \geq 0 \end{cases}$$

$$6-x \geq 0$$

$$5 \geq x-1+6-x$$

$$0 \geq 0 \quad \checkmark$$

$$x \leq 6$$

при $x \geq 2$ $\begin{cases} x-1 \geq 1 \\ \sqrt{x^2-x-2}+x-1 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow 2 \leq x \leq 6$

при $x \leq -1$ $\begin{cases} x-1 \leq -2 \\ 1-x \geq 2 \geq 0 \end{cases}$

$$1) \sqrt{x^2-x-2} \geq 1-x$$

$$\Leftrightarrow (т.к. 1-x \geq 0)$$

$$x^2-x-2 \geq x^2-2x+1$$

$$-1 \geq x \geq 3$$

Противоречие. В этом случае подходит $x \in [2, 6]$

$$② \begin{cases} \sqrt{x^2-x-2}+x-1 < 0 \\ 6-x \geq 0 \end{cases}$$

$$2\sqrt{x^2-x-2}+5 \geq -x+1+6-x$$

$$\sqrt{x^2-x-2} \geq 1-x \quad \text{при } 1-x \leq 0 \quad x \leq 1$$

если $1-x \geq 0$, то это пер 1) $\Rightarrow x \geq 3$

$$\sqrt{x^2-x-2}+x-1 \geq 0 \quad \text{при } x-1 \geq 2 \geq 0 \quad \text{— противоречие}$$

тогда $1-x < 0$

$$x-1 \geq 0$$

$$\sqrt{x^2-x-2}+x-1 \geq 0 \quad \text{— противоречие}$$

В этом сл $x \in \emptyset$

~~это не Слк. рассм~~



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☒

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(3) \quad 6 - x < 0$$
$$\Downarrow$$
$$x > 6$$

$$\sqrt{x^2 - x - 2} + x - 1 \not\geq \sqrt{x^2 - x - 2} + 5 \geq 0$$

$$\sqrt{x^2 - x - 2} + x - 1 + |6 - x| > \sqrt{x^2 - x - 2} + 5 + |6 - x| \geq \sqrt{x^2 - x - 2} + 5$$

противоречие - в этом сл. $x \in \emptyset$

Ответ: $x \in [2; 6]$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☒

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№4

Отметили в. А - самая нижняя среди самых левых
($\min x$ и $\min y$ среди верш. с $\min x$)

Найдем все вектора из А длины 5 с целыми x, y

$$\vec{v}(x, y)$$

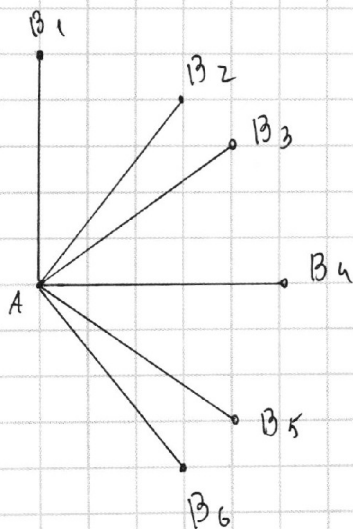
$$5 = |\vec{v}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$25 = x^2 + y^2$$

$x \geq 0$ т.к. y А x -min; если $x=0$ $y \geq 0$

$ x $	x^2	$ y $	$5^2 - x^2$	$ y $		
0	0	5	25	5	✓	(0; 5) (0; -5)
1	1	4	24	$\sqrt{24}$	x	
2	4	3	21	$\sqrt{21}$	x	
3	9	4	16	4	✓	(3; 4) (3; -4) (-3; 4) (-3; -4)
4	16	3	9	3	✓	(4; 3) (4; -3) (-4; 3) (-4; -3)
5	25	0	0	0	✓	(5; 0) (-5; 0)
≥ 5	> 25		≤ 0	$\emptyset$	x	

Нанертили все $\vec{v}$ из А



$\vec{AB}_1(0;5)$
 $\vec{AB}_2(3;4)$
 $\vec{AB}_3(4;3)$
 $\vec{AB}_4(5;0)$
 $\vec{AB}_5(4;-3)$
 $\vec{AB}_6(3;-4)$

ромб будет задаваться по 2 выбранным векторам и координатами точек

разделим все ромбы на 15 групп по выбранным парам векторов, тогда если выбран вектора $\vec{v}_1(x_1; y_1)$ и $\vec{v}_2(x_2; y_2)$ из А $A(x_A; y_A)$, тогда

$$1 \leq x_A + x_1 + x_2 \leq 44$$

$$1 \leq y_A + y_1 + y_2 \leq 44$$

$$1 \leq x_A + y_1 \leq 44$$

$$1 \leq y_A + y_1 \leq 44$$

$$1 \leq y_A + y_1 + y_2 \leq 44$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пара: $B_1 B_2$

$$1 \leq x_A \leq 44 - 0 - 3 = 41 \quad - \text{и} 6.$$

$$1 \leq y_A \leq 44 - 5 - 4 = 35 \quad - \text{и} 35.6.$$

и 35

⊕ При симметрии отн. прямой ~~$y=x$~~ $y=x$ $B_1 B_2 \rightarrow B_3 B_4$

при симм. отн. ~~прямой~~ Ox ^{пара} $B_1 B_2 \rightarrow B_1 B_6$; $B_3 B_4 \rightarrow B_4 B_5$
значит в этих парах столько же случаев

итого $и 35 \cdot 4$ $- B_1 B_2, B_3 B_4, B_1 B_6, B_4 B_5$

Пара $B_1 B_3$:

$$1 \leq x_A \leq 44 - 4 - 0 = 40 \quad \text{и} 6.$$

$$1 \leq y_A \leq 44 - 5 - 3 = 36 \quad \text{и} 36.6$$

и 36

Точками же ком. симм. получаем, что в парах:
 $B_2 B_4, B_1 B_5, B_4 B_5$ столько же сл.

итого $40 \cdot 36 \cdot 4$

Пара $B_1 B_4$

$$1 \leq x_A \leq 40 \quad \text{и} 0^2 \text{ сл.}$$

$$1 \leq y_A \leq 40$$

Пара $B_2 B_3$

$$1 \leq x_A \leq 45 - 4 - 5 = 38 \quad \text{и} 38^2$$

$$1 \leq y_A \leq 38$$

⊕ при симм. отн. Ox $B_2 B_3 \rightarrow B_5 B_6$

итого: $38^2 \cdot 2$ где $B_2 B_3, B_5 B_6$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☒

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пара: $B_2 B_5$

$$1 \leq X_A \leq 48 - 7 = 38$$

$$1 \leq y_A \leq 38^2$$

при сим отн Ox $B_2 B_5 \Rightarrow B_2 B_6$

$38^2 \cdot 2$ где $B_2 B_5$ и $B_2 B_6$

Пара $B_2 B_6$

$$1 \leq X_A \leq 41 \quad 37 \cdot 33$$

$$1 \leq y_A \leq 33$$

пара $B_2 B_5$ сим от прями $y = x$

$37 \cdot 33 - 2$ где $B_2 B_6$ и $B_2 B_5$

$$\begin{array}{r} 8 \times 41 \\ 35 \\ \hline 205 \\ + 123 \\ \hline 1435 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 1435 \\ 4 \\ \hline 5740 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 40 \times 36 \\ 40 \\ \hline 1440 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \wedge 1440 \\ 4 \\ \hline 5760 \end{array}$$

$$40^2 = 1600$$

$$\begin{array}{r} \times 38 \\ 38 \\ \hline 304 \\ + 114 \\ \hline 1444 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \wedge 1444 \\ 5 \\ \hline 7220 \end{array}$$

$$37 \cdot 33 = 1493$$

$$\begin{array}{r} 7220 \\ + 5740 \\ + 5760 \\ + 1600 \\ + 1443 \\ \hline 21763 \end{array}$$

Ответ: 21763



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x, y \in \mathbb{Z} \quad N5$$

$$y^2 \in \mathbb{Z}$$

$$23 \cdot 2^x + 2025 \in \mathbb{Z}$$

$$23 \cdot 2^x \in \mathbb{Z} \quad 23 : 2$$

$$x \geq 0$$

$$(y-45) = k$$

$$23 \cdot 2^x = (y-45)(y+45) = k(k+90) = k^2 + 90k$$

$$\text{Пусть } x \geq 0 \quad 23 \cdot 2^x = 23 \leq k^2 + 90k$$

$$\text{при } k = 0, -90 \quad k(k+90) \geq 0 \quad x$$

$$\text{если } -90 < k < 0, \text{ то } k(k+90) < 0 \quad x$$

$$\text{при } k \leq -91$$

$$k(k+90) \geq 91 \quad x$$

$$\text{при } k \geq 91 \quad k(k+90) \geq 91 \quad x$$

$$\text{в этом сл } y \neq 0$$

$$\text{значит } x \geq 1 \quad k(k+90) : 2 \Rightarrow k : 2 \text{ и } (k+90) : 2, \text{ значит одно из них } : 4, \text{ т.е. разность } \frac{90}{4} = 22.5$$

$$\text{Пусть } k = 23 \cdot 2 \quad k+90 = 136 \neq 2^x \quad x$$

$$k+90 = 23 \cdot 2 \quad k < 0 \quad x$$

$$k = 23 \cdot 2 \quad \text{т.е. } k : 2 \quad x$$

$$k+90 = 2$$

$$k = 2 \quad k+90 = 4 \cdot 23 \quad \checkmark$$

$$k+90 = 2 \quad k < 0$$

$$y = \pm 47$$

$$x \geq 3$$

$$23 \cdot 2^3 = 2 \cdot 92$$

$$\text{ответ: } x=3 \quad y = \pm 47$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 + y^2 = a^2$$

$$y^2 - 4y - a = 6$$

$$y^2 + 4|a| - a = 6$$

① $a \geq 0$

$$a^2 + 3a - 6 = 0$$

$$D = 9 + 24 = 33$$

$$a_1 = \frac{-3 - \sqrt{33}}{2} < 0 \quad \times \text{ не подходит}$$

$$a_2 = \frac{-3 + \sqrt{33}}{2} \geq 0 \quad \text{подходит}$$

② $a < 0$

$$a^2 - 5a - 6 = 0$$

$$(a-6)(a+1)$$

$$a_1 = -1 < 0 \quad \text{подходит}$$

$$a_2 = 6 > 0 \quad \text{не подходит}$$

$$\text{Ответ: } a \in \left\{ -1, \frac{\sqrt{33} - 3}{2} \right\}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

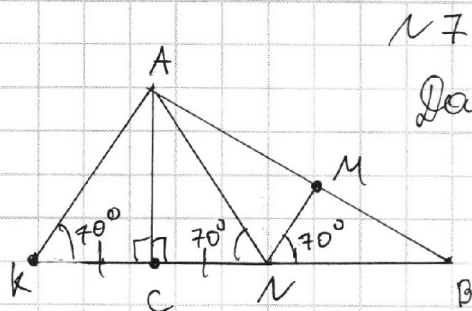
6
☐

7
☒

СТРАНИЦА

1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Дано: $\angle MNB = \angle CNA = 70^\circ$;
 $BM \cdot MA = 2BM \cdot NC$;

Найти: $\angle CAN$

Решение: Отметим точку K на продолжении BC за точку C так что $KC = CN$

$$KN = 2 \cdot CN$$

$$\frac{BM}{MA} = \frac{BK}{NC} = \frac{BK}{KN}$$

$MN \parallel KA$ по теореме Фалеса

$\angle BNM = \angle BNA$ как соответственные

$$\angle AKN = \angle BNM = \angle ANC$$

$\triangle KNA$ - равнобедренный

AC - медиана в нем значит еще и высота

$$\angle CAN = 180^\circ - \angle KCA - \angle CNA = 20^\circ$$

Итого: $\angle CAN = 20^\circ$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$285 = 17^2$$

$$(n-1)! \equiv k \pmod{285}$$

$$(n-1)! + n! + (n+1)! \equiv k + k(n) + k(n+1) \equiv k(2n+2) \pmod{17}$$

$$k(2n+2) \equiv 0$$

$$① k \not\equiv 0 \Rightarrow n-1 \geq 34 \quad n \geq 35$$

$$② 2n+2 \equiv 0 \Rightarrow n+1 \equiv 0 \quad n \geq 288$$

$$③ k:17, 2n+2:17 \quad 2n+2, n+1:17 \quad n \geq 16$$

$$\begin{matrix} 4 \\ (n-1):17 \end{matrix} \quad n \geq 18$$

$$16 \quad (x+1)^2 - 2\frac{1}{4} \quad \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - 2$$

$$k \quad n \cdot k \quad n \cdot (n+1) \cdot k = k \cdot (n^2 + 2n + 1)$$

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{1 \quad 5 \quad 7+8+13}$$

$$\begin{matrix} x^2+2x+1 = x^2-x-2 \\ 2x+1 = -x-2 \\ 3 \equiv x \end{matrix} \quad g1$$

$$(n+1)^2 \quad 8 \cdot 7 \cdot 13$$

$$1+4+9+16+25+36 \quad 3 \equiv x \quad (n+1)(n+2)(2n+3) - n(n+1)(2n+1) = 6(n+1)$$

g1

$$2n^2 + 7n + 6 - 2n^2 - n = 6(n+1)$$

$$a^2 + (a+1)^2 + (a+2)^2 + (a+3)^2 + (a+4)^2 + (a+5)^2 + (a+6)^2$$

$$7a^2 + 42a + 91 + 28 = 7 \cdot (a^2 + 6a + 9) = 7 \cdot (a+3)^2 = 7 \cdot 1^2$$

$$\sqrt{7(a+3)} : 2 \geq 2$$

$$(4 \cdot 7)^5$$

$$1+4+9$$

$$-\sqrt{x^2-x-2} + 5 \geq |-\sqrt{x^2-x-2} + x - 1| + |6-x| \quad (x-2)(x+1) \quad 1 \quad 2$$

① ++

$$x \geq 6$$

$$5 \geq 5 \quad ②$$

$$x \leq 6$$

$$③ -7$$

② +- -

$$5 \geq x - 1 - 6 + x$$

$$12 \geq 2x$$

$$6 \geq x$$

④

$$2\sqrt{x^2-x-2} + 5 \geq -x + 1 + 6 - x$$

$$2\sqrt{x^2-x-2} \geq 1-x$$

$$\sqrt{x^2-x-2} \geq \frac{1-x}{2}$$

$$x^2-x-2 \geq \frac{x^2-2x+1}{4}$$

$$2\sqrt{x^2-x-2} \geq \frac{1-x}{2}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Handwritten mathematical work on grid paper, featuring geometric diagrams and algebraic calculations.

Top Left: A triangle with vertices A, B, C. Point M is on BC, and N is on AC. Angles are marked: $\angle B = 70^\circ$, $\angle C = 70^\circ$, $\angle A = 40^\circ$. Sides are labeled: $AB = 13$, $BC = 13$, $AC = 13$. A point K is marked on BC. A coordinate system is shown with x and y axes. Equations: $5^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2$, $3^2 + 4^2 = 5^2$.

Top Right: Calculations involving $BM \cdot MA = 2 \cdot BM \cdot NC$ and $\frac{BM}{AM} = \frac{BN}{CN}$. A long division is shown: $39 \overline{) 351}$ resulting in 9.

Middle Left: A rectangle with vertices A, B, C, D. A point K is marked on BC. Equations: $23 \cdot 2^x + 20 \cdot 2^y = 9^2$, $23 \cdot 2^x = (y+45)(y-45)$, $23 \cdot 2^y = k(k+50)$, $k^2 + 50k$.

Middle Right: A triangle with vertices A, B, C. Point M is on BC, and N is on AC. Angles are marked: $\angle B = 40^\circ$, $\angle C = 70^\circ$, $\angle A = 70^\circ$. Sides are labeled: $AB = 13$, $BC = 13$, $AC = 13$. A point K is marked on BC. A coordinate system is shown with x and y axes. Equations: $46 + 30 = 76$, $[1; 37]$, $[1; 40]$.

Bottom Left: A circle with center O. A point A is marked on the circle. A line segment OA is drawn. A point B is marked outside the circle. A line segment AB is drawn. A point C is marked on the line segment AB. A point D is marked on the line segment AC. A point E is marked on the line segment BC. A point F is marked on the line segment CD. A point G is marked on the line segment DE. A point H is marked on the line segment EF. A point I is marked on the line segment FG. A point J is marked on the line segment GH. A point K is marked on the line segment HI. A point L is marked on the line segment IJ. A point M is marked on the line segment JK. A point N is marked on the line segment KL. A point O is marked on the line segment LM. A point P is marked on the line segment MN. A point Q is marked on the line segment NO. A point R is marked on the line segment OP. A point S is marked on the line segment PQ. A point T is marked on the line segment QR. A point U is marked on the line segment RS. A point V is marked on the line segment ST. A point W is marked on the line segment TU. A point X is marked on the line segment UV. A point Y is marked on the line segment VW. A point Z is marked on the line segment WX. A point A is marked on the line segment YZ. A point B is marked on the line segment ZA. A point C is marked on the line segment AB. A point D is marked on the line segment BC. A point E is marked on the line segment CD. A point F is marked on the line segment DE. A point G is marked on the line segment EF. A point H is marked on the line segment FG. A point I is marked on the line segment GH. A point J is marked on the line segment HI. A point K is marked on the line segment IJ. A point L is marked on the line segment JK. A point M is marked on the line segment KL. A point N is marked on the line segment LM. A point O is marked on the line segment MN. A point P is marked on the line segment NO. A point Q is marked on the line segment OP. A point R is marked on the line segment PQ. A point S is marked on the line segment QR. A point T is marked on the line segment RS. A point U is marked on the line segment ST. A point V is marked on the line segment TU. A point W is marked on the line segment UV. A point X is marked on the line segment VW. A point Y is marked on the line segment WX. A point Z is marked on the line segment XY. A point A is marked on the line segment ZA. A point B is marked on the line segment AB. A point C is marked on the line segment BC. A point D is marked on the line segment CD. A point E is marked on the line segment DE. A point F is marked on the line segment EF. A point G is marked on the line segment FG. A point H is marked on the line segment GH. A point I is marked on the line segment HI. A point J is marked on the line segment IJ. A point K is marked on the line segment JK. A point L is marked on the line segment KL. A point M is marked on the line segment LM. A point N is marked on the line segment MN. A point O is marked on the line segment NO. A point P is marked on the line segment OP. A point Q is marked on the line segment PQ. A point R is marked on the line segment QR. A point S is marked on the line segment RS. A point T is marked on the line segment ST. A point U is marked on the line segment TU. A point V is marked on the line segment UV. A point W is marked on the line segment VW. A point X is marked on the line segment WX. A point Y is marked on the line segment XY. A point Z is marked on the line segment YZ. A point A is marked on the line segment ZA. A point B is marked on the line segment AB. A point C is marked on the line segment BC. A point D is marked on the line segment CD. A point E is marked on the line segment DE. A point F is marked on the line segment EF. A point G is marked on the line segment FG. A point H is marked on the line segment GH. A point I is marked on the line segment HI. A point J is marked on the line segment IJ. A point K is marked on the line segment JK. A point L is marked on the line segment KL. A point M is marked on the line segment LM. A point N is marked on the line segment MN. A point O is marked on the line segment NO. A point P is marked on the line segment OP. A point Q is marked on the line segment PQ. A point R is marked on the line segment QR. A point S is marked on the line segment RS. A point T is marked on the line segment ST. A point U is marked on the line segment TU. A point V is marked on the line segment UV. A point W is marked on the line segment VW. A point X is marked on the line segment WX. A point Y is marked on the line segment XY. A point Z is marked on the line segment YZ.

Bottom Right: Calculations involving $36 \cdot 39$, $36 \cdot 38$, $36 \cdot 37$, $36 \cdot 36$, $36 \cdot 35$, $36 \cdot 34$, $36 \cdot 33$, $36 \cdot 32$, $36 \cdot 31$, $36 \cdot 30$, $36 \cdot 29$, $36 \cdot 28$, $36 \cdot 27$, $36 \cdot 26$, $36 \cdot 25$, $36 \cdot 24$, $36 \cdot 23$, $36 \cdot 22$, $36 \cdot 21$, $36 \cdot 20$, $36 \cdot 19$, $36 \cdot 18$, $36 \cdot 17$, $36 \cdot 16$, $36 \cdot 15$, $36 \cdot 14$, $36 \cdot 13$, $36 \cdot 12$, $36 \cdot 11$, $36 \cdot 10$, $36 \cdot 9$, $36 \cdot 8$, $36 \cdot 7$, $36 \cdot 6$, $36 \cdot 5$, $36 \cdot 4$, $36 \cdot 3$, $36 \cdot 2$, $36 \cdot 1$.

Bottom Center: A coordinate system with x and y axes. A point A is marked at $(1, 37)$. A point B is marked at $(1, 40)$. A point C is marked at $(4, 42)$. A point D is marked at $(4, 41)$. A point E is marked at $(1, 37)$. A point F is marked at $(1, 40)$. A point G is marked at $(4, 42)$. A point H is marked at $(4, 41)$. A point I is marked at $(1, 37)$. A point J is marked at $(1, 40)$. A point K is marked at $(4, 42)$. A point L is marked at $(4, 41)$. A point M is marked at $(1, 37)$. A point N is marked at $(1, 40)$. A point O is marked at $(4, 42)$. A point P is marked at $(4, 41)$. A point Q is marked at $(1, 37)$. A point R is marked at $(1, 40)$. A point S is marked at $(4, 42)$. A point T is marked at $(4, 41)$. A point U is marked at $(1, 37)$. A point V is marked at $(1, 40)$. A point W is marked at $(4, 42)$. A point X is marked at $(4, 41)$. A point Y is marked at $(1, 37)$. A point Z is marked at $(1, 40)$. A point A is marked at $(1, 37)$. A point B is marked at $(1, 40)$. A point C is marked at $(4, 42)$. A point D is marked at $(4, 41)$. A point E is marked at $(1, 37)$. A point F is marked at $(1, 40)$. A point G is marked at $(4, 42)$. A point H is marked at $(4, 41)$. A point I is marked at $(1, 37)$. A point J is marked at $(1, 40)$. A point K is marked at $(4, 42)$. A point L is marked at $(4, 41)$. A point M is marked at $(1, 37)$. A point N is marked at $(1, 40)$. A point O is marked at $(4, 42)$. A point P is marked at $(4, 41)$. A point Q is marked at $(1, 37)$. A point R is marked at $(1, 40)$. A point S is marked at $(4, 42)$. A point T is marked at $(4, 41)$. A point U is marked at $(1, 37)$. A point V is marked at $(1, 40)$. A point W is marked at $(4, 42)$. A point X is marked at $(4, 41)$. A point Y is marked at $(1, 37)$. A point Z is marked at $(1, 40)$.

Bottom Right: Calculations involving $6 \cdot 5 = 15$, $a^2 - 3a = 6$, $a^2 - 3a - 6 = 0$, $D = 9 + 24 = 33$, $a = \frac{-3 \pm \sqrt{33}}{2}$, $a^2 = \frac{9}{4} + \frac{33}{4} \pm \frac{\sqrt{33}}{2}$, $21 \pm 8\sqrt{33}$.