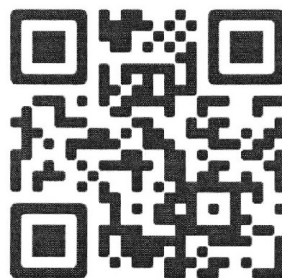




МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 9



1. [3 балла] При каком наименьшем натуральном n число $n! + (n+1)! + (n+2)!$ делится на 361?
2. [3 балла] Из суммы квадратов пяти последовательных натуральных чисел вычли число 10 и получили куб натурального числа N , большего 6. Найдите наименьшее возможное значение N .
3. [4 балла] Решите неравенство

$$\left| \sqrt{x^2 - 2x - 3} + 6 \right| \geq \left| \sqrt{x^2 - 2x - 3} + 2x - 1 \right| + |7 - 2x|.$$

4. [5 баллов] На координатной плоскости рассматриваются ромбы с длиной стороны 5 такие, что абсциссы и ординаты всех четырёх вершин каждого ромба — целые числа из промежутка $[1; 50]$. Сколько существует таких ромбов? Напомним, что квадрат также является ромбом.
5. [5 баллов] Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющих уравнению

$$19 \cdot 2^x + 2025 = y^2.$$

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при каждом из которых для множества точек плоскости Oxy , задаваемых уравнением $x^2 + y^2 = a^2$, наибольшее значение выражения $x^2 - 6x + a$ равно 8.
7. [6 баллов] На сторонах AB и BC треугольника ABC выбраны точки M и N соответственно так, что $\angle MNB = \angle ANC = 80^\circ$. Найдите $\angle CAN$, если известно, что $BN \cdot MA = 2BM \cdot NC$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1. Преобразуем наше выражение: $n! + (n+1)! + (n+2)! =$
 $= n! (1 + n+1 + n^2 + 2n+2) = n! (n+2)^2$

Заметим, что $361 = 19^2$. Тогда мы можем увидеть, что $n=17$ подходит под условие делимости на 19 : $17! \cdot 19^2 : 19^2$. Теперь докажем, что оно наименьшее: П.к. 19 — число простое, то $\Rightarrow$ если $n < 17$, то в $n!$ не будет множителя 19 , а $\Rightarrow n! \not\vdots 19$, а $n+2$ в свою очередь < 19 , а $\Rightarrow (n+2)^2$ тоже на 19 не делится, а $\Rightarrow n! (n+2)^2$ тоже не будет делиться на 19 (в силу простоты этого числа), а $\Rightarrow$ Ответ: 17



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☒

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

2. Пусть среднее из наших пяти чисел равно x , тогда
 $(x-2)^2 + (x-1)^2 + x^2 + (x+1)^2 + (x+2)^2 = N^3 + 10$ (это условие задачи)
 $5x^2 + 10 = N^3 + 10 \Rightarrow 5x^2 = N^3$
мы получили, что N^3 представим в виде $5x^2$, где x — натуральное число. Тогда заметим, что N^3 делится на 5 и все остальные его простые множители имеют чётную степень возведения. П.к. N^3 — куб, то $\exists$ ^{все} чётные степени возведения такие простые $\nmid$ быть кратными 3. Заметим, что нам достаточно, чтобы 5-ка содержалась в третьей степени, потому что $3-1=2$, а $2:2=1$. Будем делать у простых множителей наименьшие степени возведения, чтобы число было минимальным. Так можно делать, поскольку мы рассматриваем простые множители числа N^3 в отдельности друг от друга и вместе они никак не взаимодействуют. Заметим, что N^3 делится на что-то ещё, кроме 5, т.к. $N > 5$. Тогда рассмотрим 2 случая: 1) N^3 делится только на 5. Тогда $5^{2x+1} = 5^{3y}$ ($y > 1$), тогда подберём $y=3$, т.к.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☒

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

степень возведения 5-ки в N° -число нечетное. В этом случае наименьшее значение $N=125$.

II) N° делится ещё на то, кроне 5. Тогда этот простой множитель будет входить в степени, кроне 2 и 3, то есть 6. Ну раз мы хотим, чтобы N было минимальным, то и простые множители должны быть минимальными, а значит мы можем взять за этот простой множитель число 2. Тогда $N^{\circ} = 5^1 \cdot 2^6 \Rightarrow N=20$ (мы берём 2 в 6-ю степень, т.к. хотим, чтобы степень Φ возведения была минимальной, чтобы число было наименьшим). Заметим, что $N > 5$ в этом случае, $\Rightarrow$ можем не указывать новых множителей в число. Из двух случаев наименьшее N получилось во втором случае, $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ Ответ: 20. (Также можно удостовериться, что 10, 15 не подходят: $10^{\circ} = 2^1 \cdot 5^3$, а $\Rightarrow$ это не представимо как $5 \cdot x^2$, т.к. 2 содержится в неч. степени. $15^{\circ} = 5^3 \cdot 3^3$, а это не представимо как $5 \cdot x^2$, т.к. 3 содерж. в неч. степени.)



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☒

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$1. |\sqrt{x^2-2x-3} + 6| \geq |\sqrt{x^2-2x-3} + 2x-1| + |7-2x|$$

$$\sqrt{x^2-2x-3} \geq 0 \Rightarrow \text{либо } x \geq 3, \text{ либо } x \leq -1$$

Покажем, что $x \in [3; 3,5]$ подходит (раскроем модули):

$$\sqrt{x^2-2x-3} + 6 \geq \sqrt{x^2-2x-3} + 2x-1 + 7-2x$$

$$\sqrt{x^2-2x-3} \geq \sqrt{x^2-2x-3}$$

$$0 \geq 0 \text{ все верно}$$

Покажем, что $x \in (3,5; +\infty)$ не подходит:

$$\sqrt{x^2-2x-3} + 6 \geq \sqrt{x^2-2x-3} + 2x-1 + 2x-4$$

$$\sqrt{x^2-2x-3} + 14 \geq \sqrt{x^2-2x-3} + 4x; \quad 4x > 14, \text{ т.к. } x > 3,5$$

Противоречие.

Покажем, что $x \in [-1; -\infty)$ не подходит:

$$\sqrt{x^2-2x-3} + 6 \geq 7-2x \text{ (т.к. } |\sqrt{x^2-2x-3} + 2x-1| - \text{положительное,}$$

то после его прибавления не нарушится наша оценка на

$$x^2 - 2x - 3 \geq 4x^2 - 4x + 1 \text{ (неверность знака.)}$$

$$0 \geq 3x^2 - 2x + 4$$

$$D = 4 - 48 = -44 < 0, \Rightarrow x \in \emptyset$$

$$\text{Ответ: } x \in [3; 3,5]$$



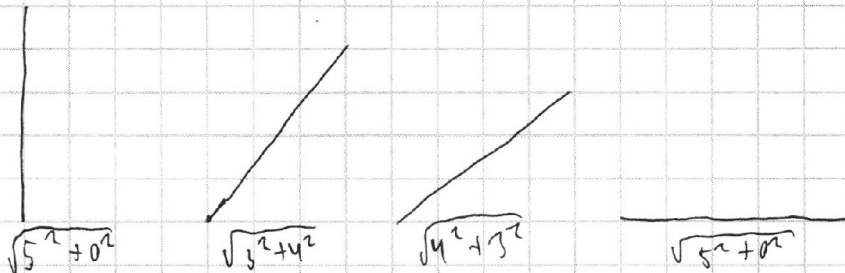
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

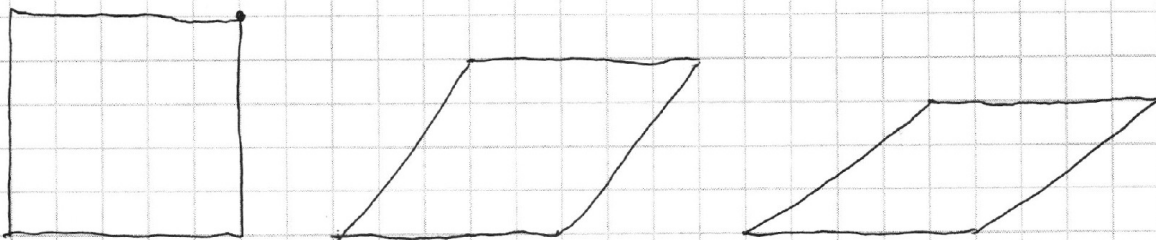
СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

ч. Заметим, что мы можем получить отрезок длины 5 с целочисленными координатами только след. образом (т.к. коорд. по x и y - целые):



Рассмотрим какие могут получиться ромбы:
Заметим, что ~~каждый~~ раз наша фигура - ромб ^{может перекоситься}
то он симметричен относительно диаго-
налей, а $\Rightarrow$ мы можем получить только
след. ромбы: с точностью до поворота и от-
зеркаливания



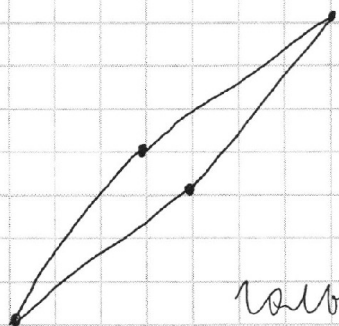


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Тогда заметим, что, чтобы можно было отложить ~~реш~~ ровно в узлах сетки, ~~он~~ нужно, чтобы прямоугольник, в котором он находится 15×8 , 4×8 , 3×9 , 7×7 соответственно, тоже помещался в доску, причём мы можем заметить, что в квадратике 5×5 такой раз 1 , в квадратике 7×7 их 2 , в прямоугольнике 4×8 и 3×9 их тоже 2 (в силу своей симметрии картинка). Тогда заметим, что доска имеет размеры 45×45 . Значит квадратиков 5×5 там помещится $45 \cdot 45$, квадратиков 7×7 там помещится $43 \cdot 43$. Прямоугольников 4×8 и 3×9 помещится $46 \cdot 42 \cdot 2$ и $47 \cdot 41 \cdot 2$ соответственно, а $\Rightarrow$ всего раз ~~ровно~~ будет $45 \cdot 45 + 43 \cdot 43 \cdot 2 + 46 \cdot 42 \cdot 2 \cdot 2 + 47 \cdot 41 \cdot 2 \cdot 2 = 2025 + 3698 + 7728 + 7708 = 21159$

Ответ: ~~24987~~ 21159



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☒

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$II) 2 = y + 45 \Rightarrow y = -43 \Rightarrow y - 45 = -88, \text{ а } \Rightarrow (y - 45)(y + 45) < 0$$

Противоречие

$$III) 38 = y - 45 \Rightarrow y = 83 \Rightarrow y + 45 = 128. \text{ Подходит}$$

$$IV) 38 = y + 45 \Rightarrow y = -7 \Rightarrow y - 45 = -52. \text{ Противоречие}$$

Итого получили, что $y = 83$, но т.к. в нашем примере y содержится в квадрате, то $y = \pm 83$ тоже подходит, а $\Rightarrow$ Ответ: $(8; \pm 83)$

$$(20=8, \text{ т.к. } 128=2^7, 38=2 \cdot 19; 128-38=2^8-19)$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☒

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

5. $19 \cdot 2^x + 2025 = y^2$, П.к. y - целое, то и y^2 - тоже целое, а $\Rightarrow 19 \cdot 2^x$ - тоже целое, а $\Rightarrow x \geq 0$.

$19 \cdot 2^x = (y - 45)(y + 45)$. Для начала заметим, что $x = 0$ не подходит, т.к. тогда $(y - 45)(y + 45) = 19$, а 19 не может являться произведением двух целых чисел, отличающихся на 90 (т.к. хотя бы одно из них будет по модулю больше или равно 45, а другое либо 0, что в произведении даст 0, либо хотя бы 1 по модулю, что в произведении с первым даст число, которое хотя бы 45 по модулю, а 19 меньше по модулю, чем 45). Тогда мы можем заметить, что $y - 45$ и $y + 45$ - одной четности, а $\Rightarrow$ они четные, т.к. левая часть равенства тоже четная. Тогда заметим, что ровно одно из них делится на 4, т.к. $90 \equiv 2 \pmod{4}$, а $\Rightarrow$ одно число это либо 2, либо $19 \cdot 2$, а другое 2^k . Разберем случаи ~~ка~~ которые могли произойти:
 $\neq 1$ $y - 45 = 2 \Rightarrow y = 47 \Rightarrow y + 45 = 92$, а $92 \cdot 2$ - противоречие.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☒

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

А подобны эти Δ т.к. BC и $B'C'$, $\alpha \Rightarrow \angle ABC = \angle AB'C'$,
 $\alpha \Rightarrow$ они подобны по двум углам, $\alpha \Rightarrow$ Ответ: 10°



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи **отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

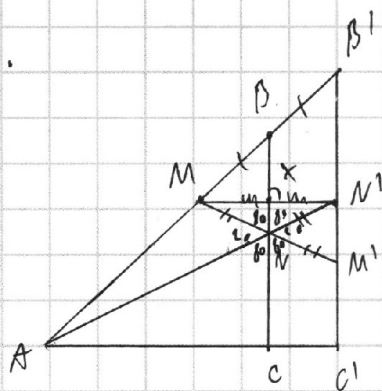
6
☐

7
☒

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

7.



Дано: $\angle MNB = \angle ANC = 80^\circ$, $BN \cdot MA = 2BM \cdot CN$

Найти: $\angle CAN$

Решение: м.к. $BN \cdot MA = 2BM \cdot CN$,
то $\Rightarrow \frac{BN}{CN} = \frac{2BM}{MA}$. Продлим АВ за м.В

на отрезок по длине равный MB и проведем через новую м.В' (MB=BB') прямую, параллельную ВС до пересечения с прямой AC в м.С'. Продолжения AN и MN пересекут B'C' в точках N' и M' соответственно. Тогда заметим, что $MB/BB' = MX/XN' = MN/M'N'$ по теореме Фалеса. (м.Х - точка пересечения MN' и BC). Тогда заметим, что $\angle ANC = \angle XNN' = 80^\circ$, а $\Rightarrow$ XN - биссектриса и медиана в $\triangle MNN'$, а $\Rightarrow$ она и высота, а также $\triangle MNN'$ - равнобедренный, а $\Rightarrow MN = NN'$. Тогда $\angle MN'A = 180 - 90 - 80 = 10^\circ$, а $\angle MN'A = \angle N'AC$ как накрест лежащие при параллельных прямых MN' и AC (AC' || MN' по теореме Фалеса м.к. $BN/CN = B'N'/N'C' = 2BM/MN$ соответственные $BN/CN = B'N'/N'C'$ как отношения в подобных $\triangle ABC$ и $\triangle AB'C'$

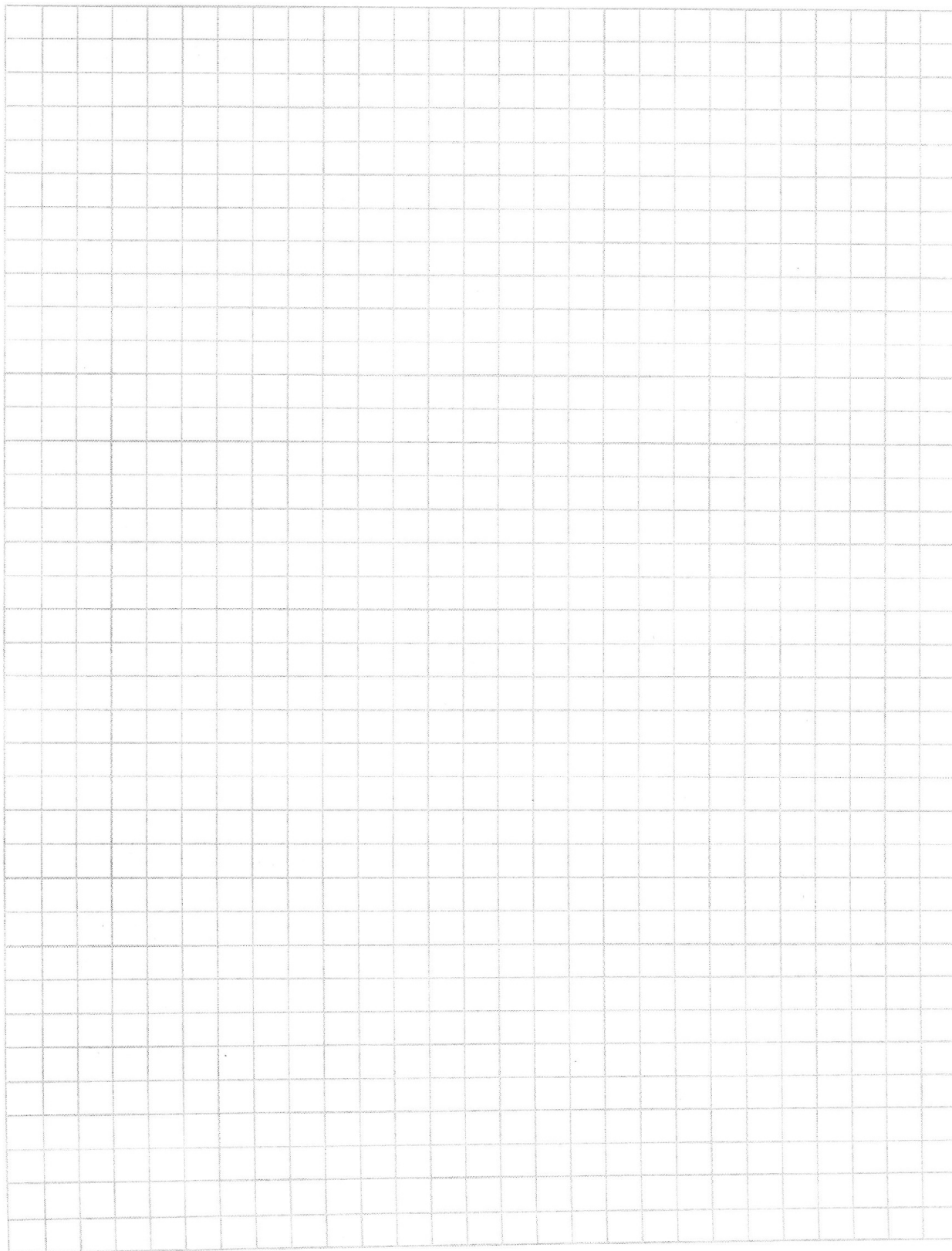


На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!



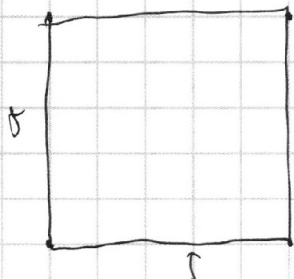


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$45 \cdot 49$$

$$45 \cdot 45$$

$$19 \cdot 21$$

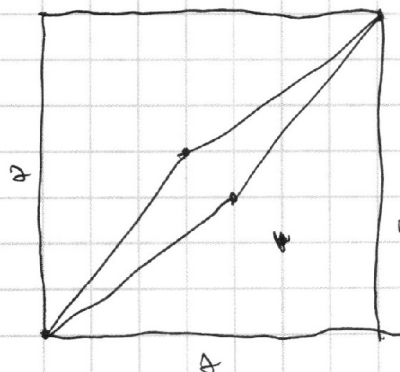
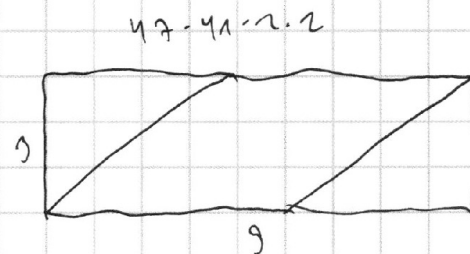
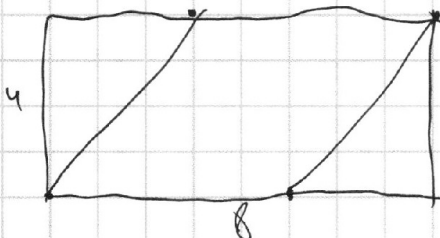
$$4$$

$$45 \cdot 45 \cdot 2 \cdot 2 = 808$$

$$\begin{array}{r} 48 \\ \times 47 \\ \hline 47 \\ 188 \\ \hline 2256 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 188 \\ \times 27 \\ \hline 1296 \\ 376 \\ \hline 5088 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 11 \\ \times 2025 \\ \hline 55125 \\ 20250 \\ \hline 222750 \end{array}$$



$$47 \cdot 41 \cdot 2 \cdot 2$$

$$\begin{array}{r} 44 \\ \times 44 \\ \hline 176 \\ 176 \\ \hline 1936 \end{array}$$

$$43 \cdot 43 \cdot 2 \cdot 2 = 7396$$

$$\begin{array}{r} 46 \\ \times 42 \\ \hline 92 \\ 188 \\ \hline 1932 \end{array}$$

$$19 \cdot 2^2 \cdot 2025 = y^2$$

$$19 \cdot 2^2 = (y - 45)(y + 45)$$

$$x = 8 \quad y = \pm 83$$

$$\begin{array}{r} 38 \quad 128 \\ 2 \quad 466 \\ 86 \quad 24 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 48 \\ \times 41 \\ \hline 48 \\ 168 \\ \hline 1968 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1972 \\ \times 47 \\ \hline 13804 \\ 78816 \\ \hline 92488 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи **отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$n^1 + (n+1)^1 + (n+2)^1 = n^1 \cdot ((n+2) \cdot (n+1) + n+1+1) = n^1 \cdot (n^2 + 3n+2 + n+1+1) = n^1 \cdot (n^2 + 5n+4) = n^1 \cdot (n+2)^2$$

$$570^2 + 10 = n^3$$

$$570^2 \geq 10 + n^3$$

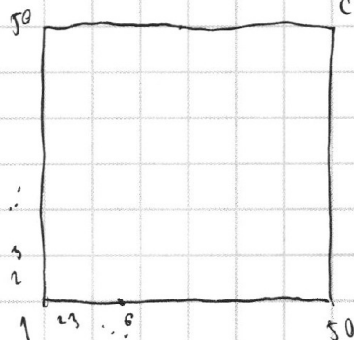
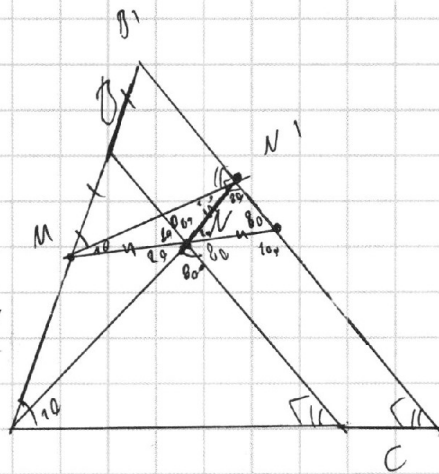
$$570^2 = 2 + \frac{n^3}{5}$$

$$15 \cdot 15 \cdot 3 = 685$$

$$20 \cdot 10 \cdot 4$$

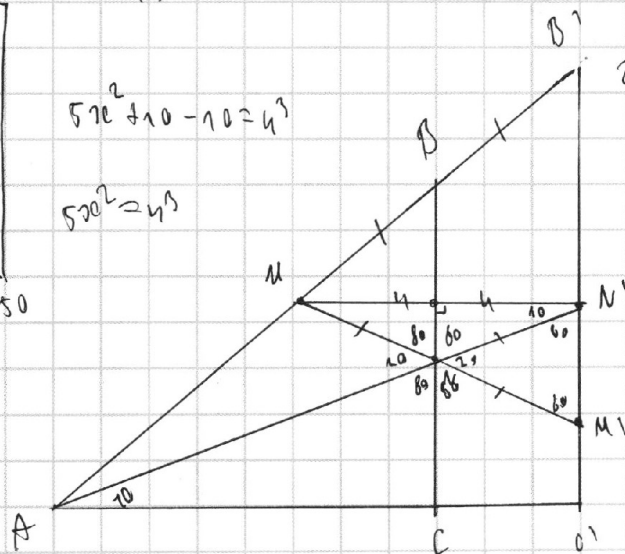
$$BN \cdot MA = 2BM \cdot CN$$

$$\frac{BN}{CN} > \frac{2BM}{MA}$$



$$570^2 + 10 = n^3$$

$$570^2 = n^3$$



$$2/4/8/10/13/17/19/9/18$$

$$570^2 = 52 \cdot 10^3$$

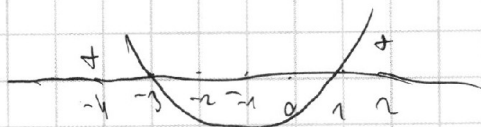
$$5 \cdot 4$$

$$570^2 = 20^3$$

$$20^2 = 5^3 - 4^3 = 2^6$$

$$19 \cdot 2^x = (y-45)(y+45)$$

$$(x-3)(x+1) = 0$$

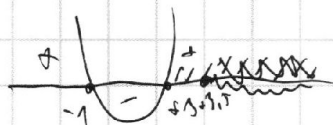




На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐2
☐3
☐4
☐5
☐6
☐7
☐СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$t = 0$$

$$|\sqrt{x^2 - 2x - 3} + 6| \geq |\sqrt{x^2 - 2x - 3} + 2x - 1| + |7 - 2x|$$

$$|t + 6| \geq |t + 2x - 1| + |7 - 2x| \quad t + 6 \geq t + 2x - 1 + 7 - 2x$$

$$\cancel{|t + 6| \geq |t - 2x + 1| + |7 - 2x|} \quad t + 6 \geq t + 2x - 1 + 7 - 2x$$

$$t + 6 \geq t + 1 - 2x + 7 - 2x \quad t + 6 \geq t + 4x - 8$$

$$\cancel{t + 6 \geq t - 4x + 8} \quad t + 14 \geq t + 4x$$

$$x \geq 1$$

$$\cancel{t + 6} \quad 19 \cdot 2^x + 2025 = y^2$$

$$x \geq 0.5$$

$$19 \cdot 2^x = (y - 45)(y + 45)$$

$$6 \geq 3 + 9$$

$$t + 6 \geq -t - 2x + 1 + 7 - 2x$$

$$2t \geq -4x + 8$$

$$\sqrt{x^2 - 2x - 3} + 6 \geq 7 - 2x$$

$$t \geq -2x + 1$$

$$\sqrt{x^2 - 2x - 3} \geq 1 - 2x$$

$$\sqrt{x^2 - 2x - 3} \geq -2x + 1$$

$$x^2 - 2x - 3 \geq 4x^2 - 4x + 1$$

$$x^2 - 2x - 3 \geq 4x^2 - 4x + 1$$

$$0 \geq 3x^2 + 2x + 4$$

$$x^2 - 2x - 3 \geq 0$$

$$x \in \emptyset$$

$$D = 4 - x > 0$$