

МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 10



1. [3 балла] При каком наименьшем натуральном  $n$  число  $(n-1)! + n! + (n+1)!$  делится на 289?
2. [3 балла] Из суммы квадратов семи последовательных натуральных чисел вычли число 28 и получили пятую степень натурального числа  $N$ , большего 8. Найдите наименьшее возможное значение  $N$ .
3. [4 балла] Решите неравенство

$$\left| \sqrt{x^2 - x - 2} + 5 \right| \geq \left| \sqrt{x^2 - x - 2} + x - 1 \right| + |6 - x|.$$

4. [5 баллов] На координатной плоскости рассматриваются ромбы с длиной стороны 5 такие, что абсциссы и ординаты всех четырёх вершин каждого ромба — целые числа из промежутка  $[1; 45]$ . Сколько существует таких ромбов? Напомним, что квадрат также является ромбом.
5. [5 баллов] Найдите все пары целых чисел  $(x; y)$ , удовлетворяющих уравнению

$$23 \cdot 2^x + 2025 = y^2.$$

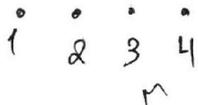
6. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых для множества точек плоскости  $Oxy$ , задаваемых уравнением  $x^2 + y^2 = a^2$ , наибольшее значение выражения  $y^2 - 4y - a$  равно 6.
7. [6 баллов] На сторонах  $AB$  и  $BC$  треугольника  $ABC$  выбраны точки  $M$  и  $N$  соответственно так, что  $\angle MNB = \angle ANC = 70^\circ$ . Найдите  $\angle CAN$ , если известно, что  $BN \cdot MA = 2BM \cdot NC$ .



$$2Agg = 9^2 = 4 \cdot 23$$

$$(a^2) + (a^2 + 1^2 + 2a) + (a^2 + 4a + 4) + (a^2 + 6a + 9) + (a^2 + 8a + 16) + (a^2 + 10a + 25) + (a^2 + 12a + 36)$$

45



$$N = 9 \Rightarrow 9^5 = 3^{10} = 81 \cdot 81 \cdot 9 = 7a^2 + 38a + 91 - 28 = N^5$$

$$\begin{array}{r} 39 \\ \times 37 \\ \hline 1600 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 17 \\ 119 \\ \hline 170 \\ \hline 289 \end{array} \quad \begin{array}{r} \times 38 \\ 38 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{cccccc} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \geq n+3 \end{array}$$

$$n^2 + n - 2 \quad n^2 + 2n + 1$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи **отдельно**.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

Задача 1

$$n \in \mathbb{N}: (n-1)! + n! + (n+1)! : 289.$$

$$289 = 17^2 \Rightarrow (n-1)! (1 + n + n(n+1)) = (n-1)! \cdot (n+1)^2$$

Заметим, при  $n=16$   $(n+1)^2 = 17^2 = 289 \Rightarrow$  произведе-  
ние  $(n-1)! \cdot (n+1)^2 : 289$ . Докажем, что для  $n < 16$  такого

не будет:

Пусть  $n < 16 \Rightarrow$  Заметим  $17 \in \mathbb{P}$ .

$(n+1)^2 \not\div 17$  т.к.  $n+1 < 17$ .

$(n-1)! \not\div 17$ , т.к.  $n-1 < 17$ , т.е. в ряду чисел

от 1 до  $n-1$  нет чисел  $:17$ .

Произведение  $(n-1)! \cdot (n+1)^2 \not\div 17$ , а это противоречит

условию  $\Rightarrow n \geq 17$ .  $\rightarrow$  Минимальное подходящее  $n=17$ ,

пример разобран ранее.

Ответ:  $n=17$ .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 2.

Обозначим сумму квадратов как:

$$S = (a-3)^2 + (a-2)^2 + (a-1)^2 + a^2 + (a+1)^2 + (a+2)^2 + (a+3)^2$$

$$S = 7a^2 + 28 \Rightarrow S - 28 = 7a^2 = N^5, \text{ при } n > 8.$$

Заметим, раз  $7a^2 = N^5$ , то  $N : 7 \Rightarrow N^5 : 7^5 \Rightarrow (a^2 : 7) : 7^5$   
 $a^2 : 7^4 \Rightarrow a : 7^2 \Rightarrow$  при разложении на простые множители ~~числа a~~

~~числа a~~ степень  $x y 7 (7^x) \geq 2$ .

~~Еще бы~~ Если бы не было ограничения на  $N > 8$ , мы бы

нашли минимальное число  $N = 7 \Rightarrow$  Заметим, что, раз

$N > 8$ , то 7 следует делить на  $n \in \mathbb{N}$ , при этом  $n \neq 1$ .

$n_{\min} = 2$  —  $n$  минимальное, подходящее.

Ищем минимальное  $N!$

$N = 7 \cdot n = 14 \Rightarrow N^5 = 14^{25}$  Однако при разложении

на простые множители ~~числа N~~ степени всех простых  $x$  кроме 7 должны быть  $\geq 2$  (т.к. у  $a^2$  все степени простых множителей  $\geq 2$ )  $\Rightarrow n_{\min} = 2^2$  — минимальное

подходящее  $n$  по этим условиям  $\Rightarrow 7 \cdot n = N = 28 \Rightarrow N^5 = 28^5 =$

$= 7 \times a^2 \Rightarrow a^2 = 7^4 \cdot 4^5 = 7^4 \cdot 2^{10} = (7^2 \cdot 2^5)^2 \Rightarrow$  Ответ:  $N = 28$ .



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

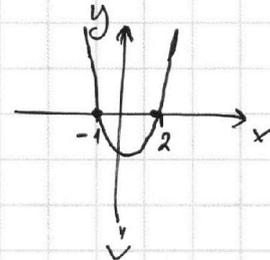
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\left| \sqrt{x^2 - x - 2} + 5 \right| \geq \left| \sqrt{x^2 - x - 2} + x - 1 \right| + |6 - x|$$

$$\sqrt{x^2 - x - 2} \geq 0 \Rightarrow x^2 - x - 2 \geq 0$$

$$D = 9$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm 3}{2} = \{2; -1\} \Rightarrow$$



① Пусть  $x \geq 2$

$$x = (-\infty; -1]; [2; \infty)$$

$$\sqrt{x^2 + x - 2} + 5 \geq \sqrt{x^2 - x - 2} + x - 1 + |6 - x|$$

$$5 \geq x + |6 - x| \Rightarrow \text{т.к. } x \geq 0; |6 - x| \geq 0; \text{ то } \begin{cases} 6 \geq x \\ 6 \geq |6 - x| \end{cases}$$

$$6 \geq x + |6 - x| = x + 6 - x = 6$$

$$x = [2; 6]$$

② Пусть  $x \leq -1$ .

$$\sqrt{x^2 - x - 2} + 5 \geq \left| \sqrt{x^2 - x - 2} + x - 1 \right| + 6 - x$$

$$0 \geq \left| \sqrt{x^2 - x - 2} + (x - 1) \right| - (\sqrt{x^2 - x - 2} + x - 1)$$

Раскроем модуль:

~~Возведем в квадрат~~ предположим  $n = -x$ , т.е.  $x = -n$ .

$$\left| \sqrt{n^2 + n - 2} - (n + 1) \right| \Rightarrow \sqrt{n^2 + n - 2} \leq n + 1 \quad \text{— сравним 2 числа.}$$

Заменим, что они оба  $\geq 0$ .  $\Rightarrow$  возведем в  $^2$ :  $n^2 + n - 2 \leq n^2 + 2n + 1$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\downarrow \\ \left| \sqrt{n^2+n-2} - (n+1) \right| = (n+1) - \sqrt{n^2+n-2} = 1-x - \sqrt{x^2-x-2}$$

$\downarrow$

$$0 \geq 1-x - \sqrt{x^2-x-2} + 1-x - \sqrt{x^2-x-2} = 2(1-x - \sqrt{x^2-x-2})$$

$\downarrow$

Разделим обе части на 2:

$$0 \geq 1-x - \sqrt{x^2-x-2} \Rightarrow \sqrt{x^2-x-2} \geq 1-x. \Rightarrow \text{Заметим, что}$$

Мы уже сравнивали эти 2 числа ~~в виде~~ в виде

$$\sqrt{n^2+n-2} < 1+n \Rightarrow \sqrt{x^2-x-2} < 1-x, \text{ однако должно}$$

быть наоборот.  $\Rightarrow$  ~~подходящих~~  $x \leq -2$  нет.

$\downarrow$

$$\text{Ответ: } x = [2; 6]$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

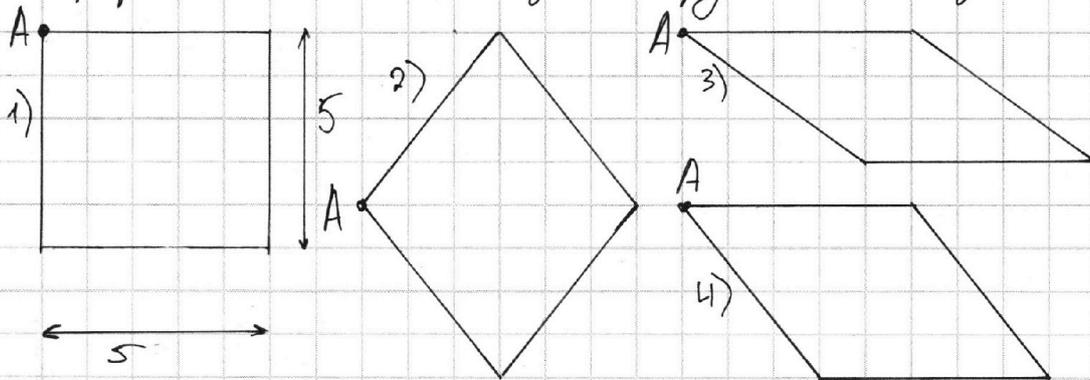
СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

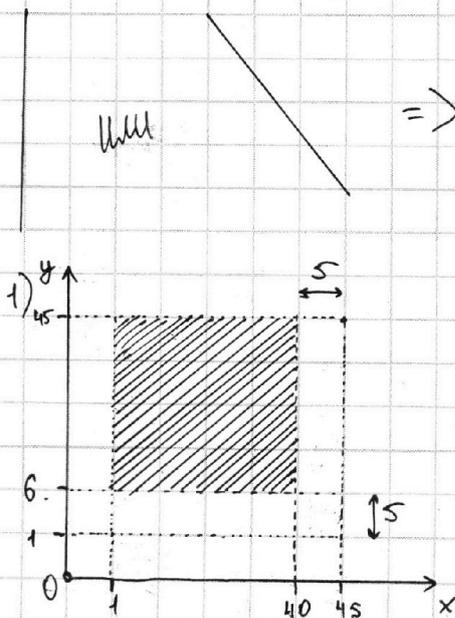
### Задача 4.

Ромб - четырех угольник с 4<sup>ми</sup> равными сторонами.

Заметим, что есть всего 4 ромба которые можем нарисовать с стороной 5 так, чтобы абциссы и ординаты были целыми:



Других нет, т.к. тут все варианты как поставить стороны 5, сам отрезок длиной 5 можно изобразить 2<sup>ми</sup> способами:



способов расстановки  
=> Итого кол-во<sup>у</sup> для каждого из 4ех;  
Заметим для каждого искомого  $x_i$  = количество способов расстановки ~~по~~ <sup>вершину</sup>  
А так, что очертив фигуру она подходит под условия.

$$1) x_1 = (45 - (1+5) + 1)(45 - 5 - 1 + 1) = 40^2$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

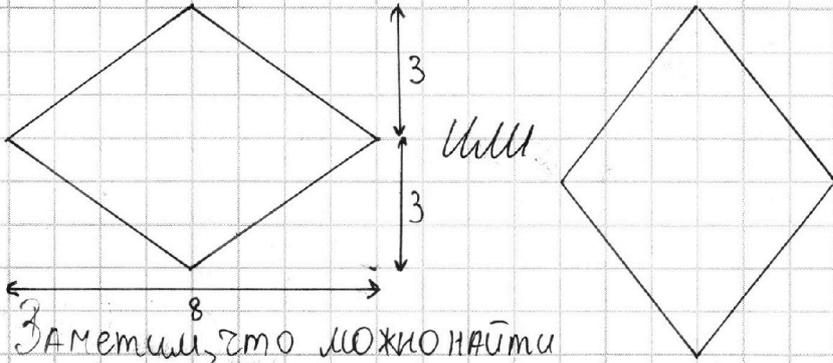
1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА

2 ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

2) Поставить 2<sup>ю</sup> ромб можно 2<sup>мя</sup> способами:



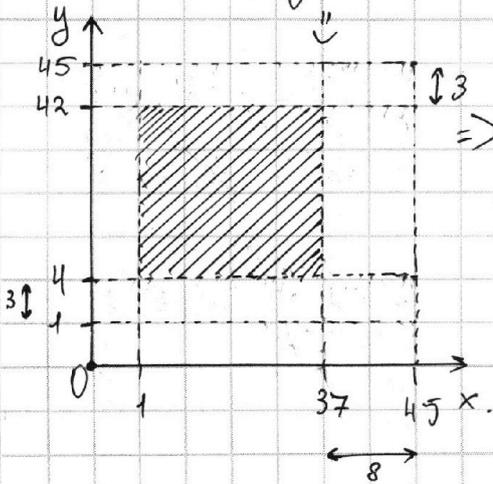
Заметим, что можно найти

способов

кол-во для одного, затем должно быть на 2, т.к. ~~кажд~~ <sup>места для</sup>

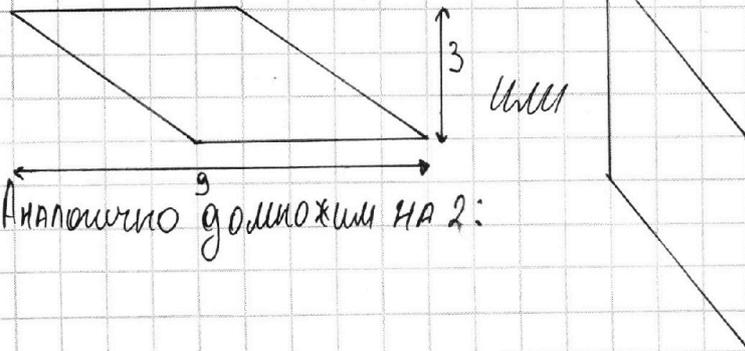
45 × 45

точек представляют собой  ~~кажд~~



$$\Rightarrow X_2 = 2 \cdot 37 \cdot 39 = 2 \cdot (38^2 - 1) = 2886$$

3) Аналогично 2 варианта постановки:



Аналогично должно быть на 2:

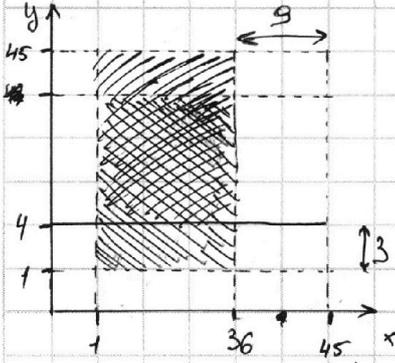


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

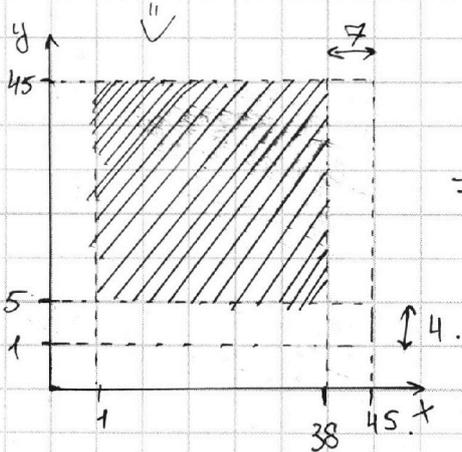
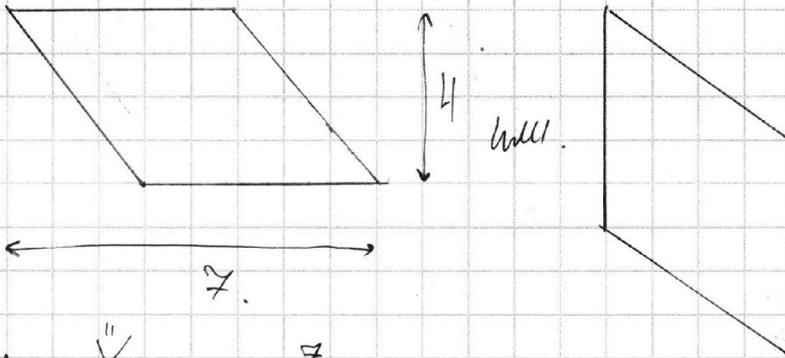
СТРАНИЦА  
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$X_3 = 42 \cdot 36 \cdot 2 = 3024$$

4) Также я вариант поставовки:



$$\Rightarrow X_4 = 41 \cdot 38 \cdot 2 = 3116$$

$$\text{Итого } X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = ~~1000~~ + 2886 + 3024 + 3116 = 10826 \Rightarrow \text{Объем: } 10626.$$



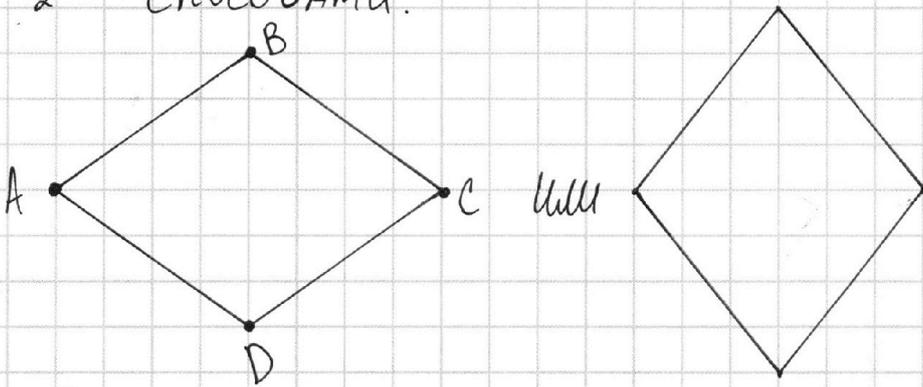
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
3 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

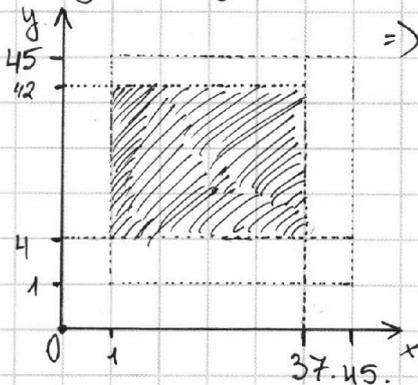
2) Ставим рошд. <sup>(не квадрат)</sup> Заметим, что можем поставить его  $2^{12}$  способами:



Заметим, что кол-во вариантов для одного  $x_2$  и второго  $x_3$  будут равны  $x_2 = x_3$  (очевидно).

Ищем  $x_2$ :

Аналогично квадрату, следует найти кол-во вариантов поставить точку ~~в~~ А так, что если дестраивать рошд по условию:



$$\Rightarrow x_2 = x_3 = \cancel{(45-4)} \left( (45-3)^{39} - (1+3)^{39} + 1 \right) \left( (45-8)^{37} - 1 + 1 \right)$$

$$x_2 = x_3 = 39 \cdot 37 = 38^2 - 1^2$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 40^2 + 2 \cdot 38^2 - 2 = 4486$$

Ответ: 4486.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Докажем, что только 2 пары  $a$  и  $b$  подходят ( $a=3, b=4$   
 $b=3, a=4$ )

Переберем все пары чисел  $a, b < 5$  это они не такие:  
(т.к. гипотенуза больше катетов)

$$\frac{a^2}{b^2} \neq 5^2$$

$$1^2 + 1^2 \neq 5^2$$

$$1^2 + 2^2 \neq 5^2$$

$$1^2 + 3^2 \neq 5^2$$

$$1^2 + 4^2 \neq 5^2$$

$$2^2 + 2^2 \neq 5^2$$

$$2^2 + 3^2 \neq 5^2$$

$$2^2 + 4^2 \neq 5^2$$

$$3^2 + 3^2 \neq 5^2$$

$$4^2 + 4^2 \neq 5^2$$

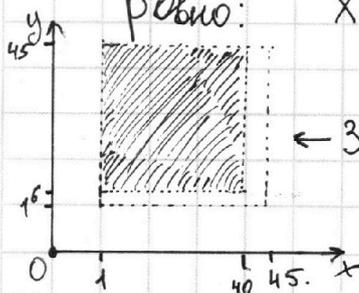
$\Rightarrow$  кроме названных, других пар подходящих  $a$  и  $b$  нет.

Итого и требовалось. Тогда по 1-му прямоугольному треугольнику можно построить ромб. Он выйдет как на рис. 2.

$\Rightarrow$  Доказали, что только 2 ромба может быть на плоскости.

Следует найти к-во способов поставить их на координатную плоскость в промежутке значений абсцисс и ординат  $[1, 45]$

1) Ставим квадрат. заметим, что чтобы поставить его нужно выбрать где будет стоять т. А. Заметим, что таких точек равно:  $X_1 = (45 - (1+5) + 1)(45 - 5 - 1 + 1) = 40^2 = 1600$  (таких точек можно построить квадрат, он подойдет по усл.)



Заметим, что ордината (знач. по оси  $y$ )  $= [1, 45 - 5]$  отн. к т. А. абсцисса (знач. по оси  $x$ )  $= [1 + 5, 45]$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

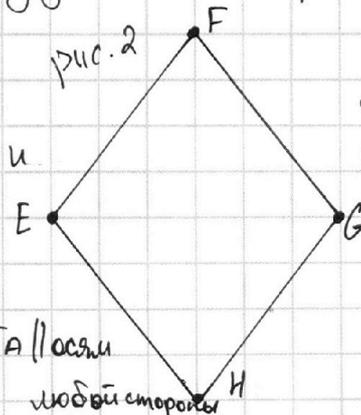
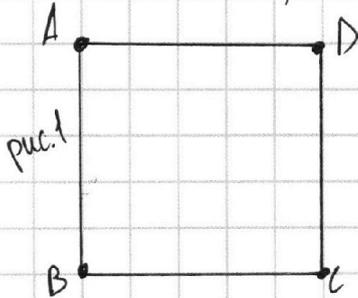
### Задача 4.

Абсциссы и ординаты всех 4<sup>х</sup> вершин - целые от 1 до 45 включительно. Заметим, что у прямоугольного треугольника с сторонами (катетами) 3 и 4 гипотенуза = 5. Также заметим, что ромб по определению - четырехугольник с равными сторонами и его диагонали  $\perp$  друг-другу.

Можно каждый ромб разделить на 4 прямоугольных  $\Delta$  катетами = 5,

~~Вершины координат также целые~~  
~~абсциссы и ординаты~~

Заметим, что будет 2 таких ромба:



Ему докажем, что других нет:

Пусть кат стороны ромба  $\parallel$  осям

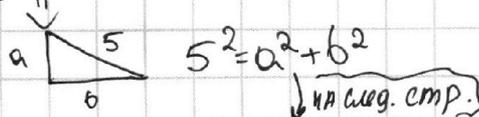
Пусть одна из сторон ромба  $\parallel$  оси  $Ox$  или  $Oy$ .

$Ox$  или  $Oy \Rightarrow$  все вершины лежат на таких точках, что ординаты и абсциссы равны.

Противоположная тоже  $\parallel$  и равна ей.

Получим прямоугольный треугольник с целыми сторонами  $> 1$  и гипотенузой 5.

Чтобы получился ромб его 2 другие стороны должны быть  $\perp$  этим, и на те получим параллелограмм с равными сторонами.



Получим квадрат (рис. 1)



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 5

$$2025 = 45^2$$

⇓

$$23 \cdot 2^x + 45^2 = y^2 \Rightarrow (y-45)(y+45) = 23 \cdot 2^x$$

Заметим, что если обозначить  $y-45 = a$ , то  $a+90 = y+45$ .

$$a \cdot (a+90) = 23 \cdot 2^x$$

⇓

①  $a+90 : 23 \Rightarrow a+90$  можно записать как  $a+90 = 23 \cdot 2^i$   
 ②  $a : 23 \Rightarrow$  аналогично  $a = 23 \cdot 2^j$   
 $a+90 = 23 \cdot 2^j$  где  $i+j = x$ .

$$\textcircled{1} \Rightarrow 2^j + 2 \cdot 45 = 23 \cdot 2^i \quad | : 2$$

$$2^{j-1} + 45 = 23 \cdot 2^{i-1} \Rightarrow \text{Заметим } i-1 \geq 1, \text{ т.к. } 23 < 45.$$

$$23 \cdot 2^{j-1} - \text{чет, т.к. } : 2.$$

⇓

$$45 + 2^{j-1} = \text{чет} \Rightarrow \text{нечет} + \begin{cases} \text{чет} \\ \text{нечет} \end{cases} = \text{чет} \Rightarrow 2^{j-1} - \text{нечет}.$$

$$2^{j-1} = 1 \Rightarrow 1 + 45 = 23 \cdot 2^{i-1} = 46 \Rightarrow 2^{i-1} = 2 \Rightarrow j=1; i=2.$$

$$a = 2 \Rightarrow 2 \cdot 92 = 23 \cdot 2^x = 8 \cdot 23 \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=47 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x=3 \\ y=-47 \end{cases}$$

Заметим, что это единственные варианты в данном пункте из-за однозначности хода решения (определенный рез-т после каждого действия)



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$② \quad a:23 \Rightarrow a = 23 \cdot 2^i; \quad a+90 = 2^j, \text{ где } i+j=x$$

Повторяем аналогично 1-му пункту:

$$\cancel{a+90} = 23 \cdot 2^i = 90 + 2^j \quad | :2$$

$$23 \cdot 2^{i-1} = 45 + 2^{j-1} \quad \text{Заметим } i-1 \geq 1 \text{ т.к.}$$

$$23 \cdot 2^{i-1} - \text{чет} \quad \Leftarrow 23 < 45$$

45 - нечет

$$2^{j-1} - \text{нечет} \Rightarrow 2^{j-1} = 1 \Rightarrow j = 1$$

$$92 = 23 \cdot 2^i \Rightarrow i = 2 \Rightarrow x = 3$$

Аналогично

$$\begin{matrix} x=3 \\ y=47 \end{matrix} \text{ или } \begin{matrix} x=3 \\ y=-47 \end{matrix}$$

⇓

Ответ: (3; 47); или (3; -47).



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

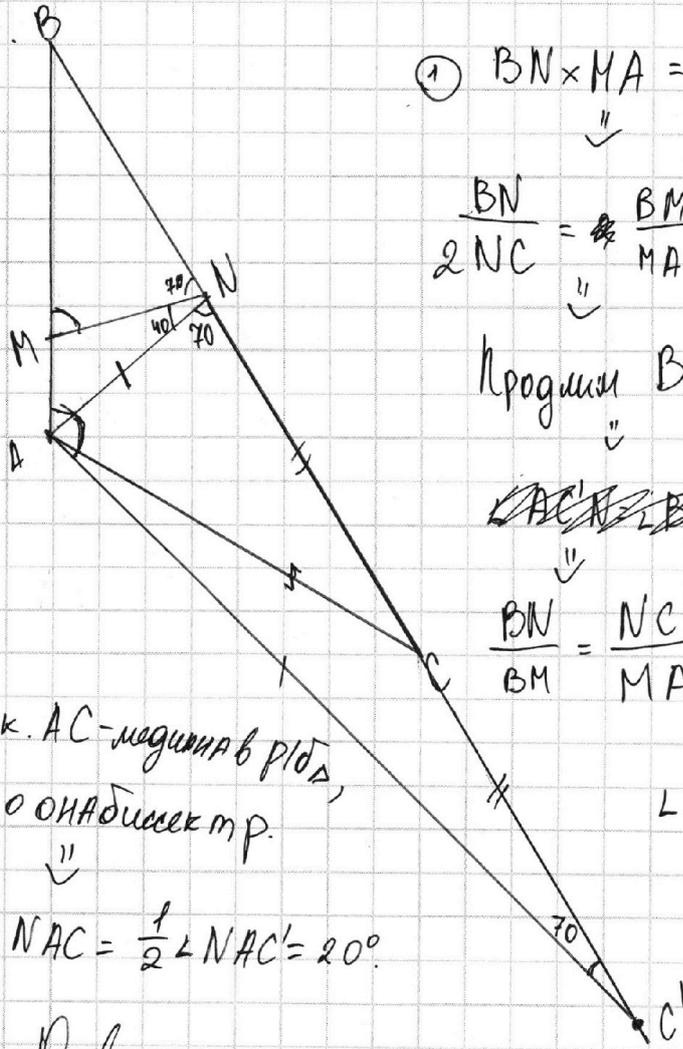
СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

### Задача 7. В

Дано:

$\triangle ABC$   
 $M \in AB$   
 $N \in BC$   
 $\angle MNB = \angle ANC = 70^\circ$   
 $BN \times MA = 2BM \times NC$   
 $\angle CAN = ?$



$$\textcircled{1} BN \times MA = 2BM \times NC$$

$$\frac{BN}{2NC} = \frac{BM}{MA}$$

Продлим BC на NC' от C'

~~$\angle AC'N = \angle BNM$~~  ~~из условия~~

$$\frac{BN}{BM} = \frac{NC'}{MA} \Rightarrow = \frac{BC'}{BA}$$

$$\angle AC'C = 70^\circ$$

$\triangle AC'C - \text{p/d}$

$$AN = AC'$$

$$\angle NAC' = 40^\circ$$

$\textcircled{2}$

Т.к. AC - медиана в  $\text{p/d}$ ,  
 то она биссектр.

$$\angle NAC = \frac{1}{2} \angle NAC' = 20^\circ$$

Ответ:  $20^\circ$

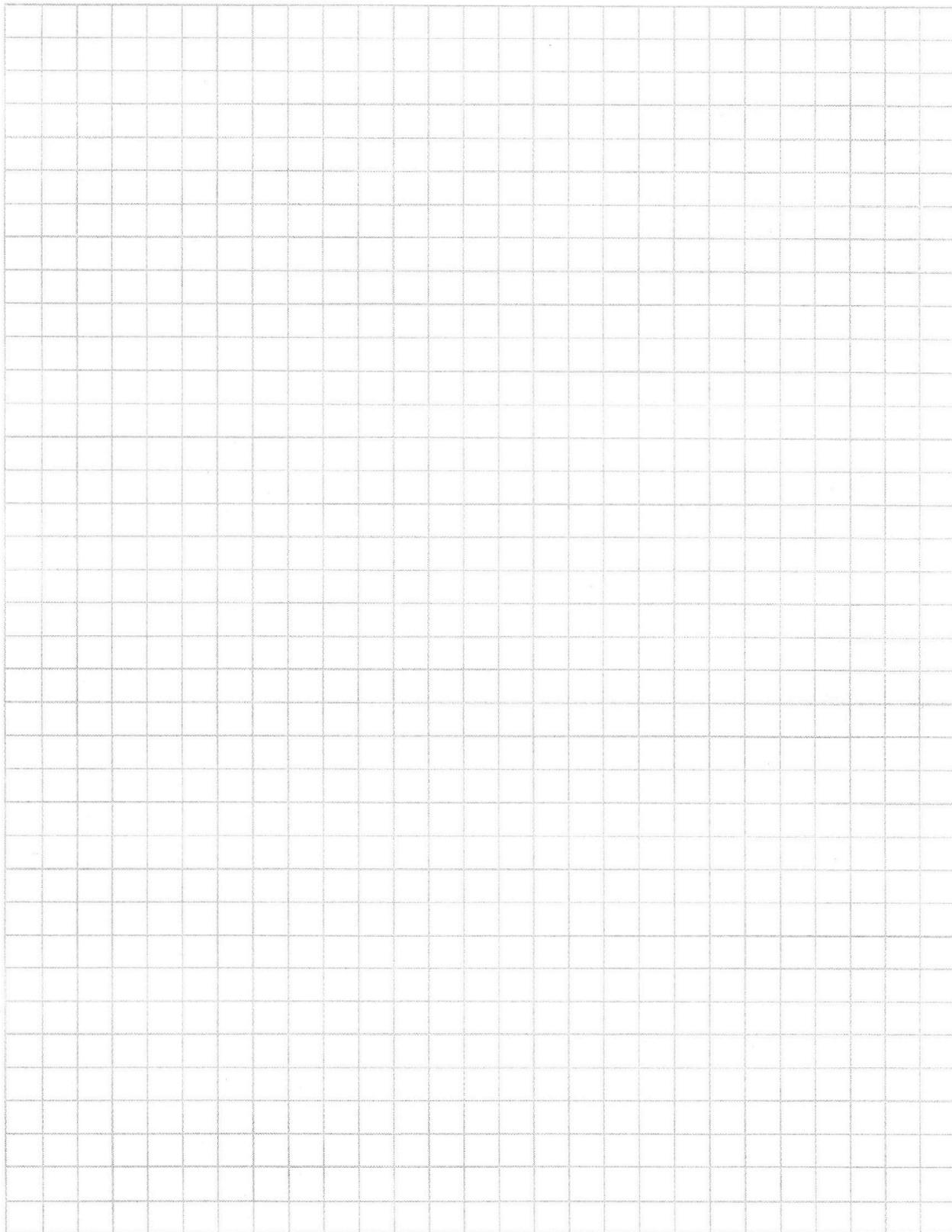


На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи **отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>						

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

Задача 3.

$$2025 = 45^2$$

$$\times 45$$

$$\hline 225$$

$$\hline 1800$$

$$\Rightarrow 23 \cdot 2^x = (y-45)(y+45)$$

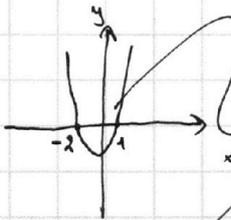
Дано неравенство:

$$\sqrt{x^2-x-2} + 5 \geq \sqrt{x^2-x-2} + |x-1| + |6-x|$$

Заметим, что под корнем выражение  $\geq 0$ .

$$23 \cdot 2^i + 90 = 2^j$$

$x^2-x-2 \geq 0 \Rightarrow$  т.к. корни  $\{-2; 1\} \Rightarrow$  т.к. график вы смотрит так:



То при  $x \in (-2; 1)$   $x^2-x-2 < 0$ .

$$x \in (-\infty; -2] \cup [1; \infty)$$

1) Пусть  $x \leq -2$

$$23 + 45 = 2^{j-1}$$

$$23 \cdot 2^i + 90 = 2^j$$

$$\sqrt{x^2-x-2} + 5 \geq \sqrt{x^2-x-2} + |x-1| + 6-x$$

Заметим, что  $\sqrt{x^2-x-2} + |x-1| < 0$  при  $x \leq -2$ , т.к., если

$$x = -n, \text{ то: } (-n-1)^2 = n^2 + 2n + 1 \dots n^2 + n - 2$$

$$n \geq -3, \text{ т.к. } n \geq 2$$

$$\sqrt{x^2-x-2} + 5 \geq \sqrt{x^2-x-2} - x + 1 + 6 - x$$

$$2(\sqrt{x^2-x-2} + x) \geq 2 \Rightarrow \sqrt{x^2-x-2} + x \geq 1$$

Если  $x$  снова примет вид  $-n$ , при этом  $n \geq 2$ , то  $\sqrt{n^2+n-2} + n$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи отдельно.

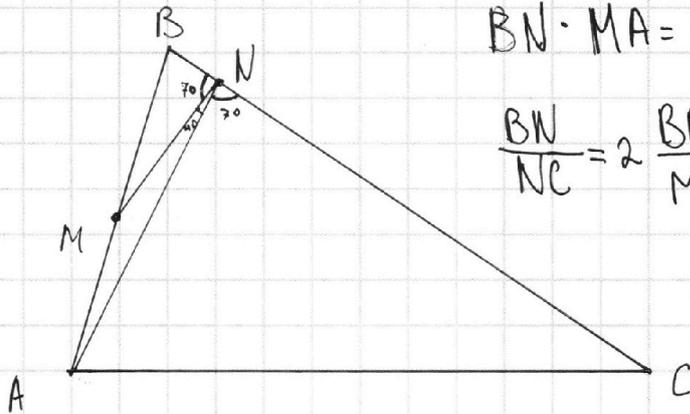
1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 7

Дано  
 $\triangle ABC$   
 $M \in AB$   
 $N \in BC$   
 $\angle MNB =$   
 $\angle ANC = 70^\circ$   
 $BN \cdot MA = 2 \cdot BM \cdot NC$



$$BN \cdot MA = 2 \cdot BM \cdot NC$$

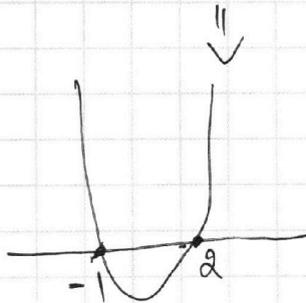
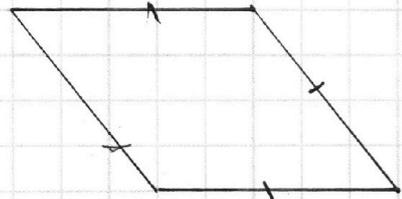
$$\frac{BN}{NC} = 2 \frac{BM}{MA}$$

$\angle CAN = ?$

$$\left| \sqrt{x^2 - x - 2} + 5 \right| \geq \left| \sqrt{x^2 - x - 2} + x - 1 \right|$$

$$D = 1 + 4 \cdot 2 = 3^2$$

$$x_1 = \frac{1+3}{2} = 2; -1$$



$x - 1$

$$(-n-2)^2 = n^2 - 4n + 4$$

$-5$   
 $\Downarrow$

$$25 + 5 - 2 = \sqrt{28}$$

$= 6$

$$-n \Rightarrow \dots$$

$$\sqrt{n^2 + n - 2} \quad -n = 2$$