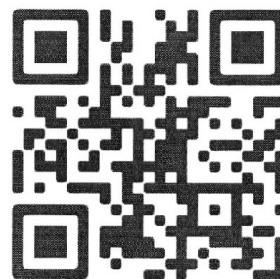


МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 10



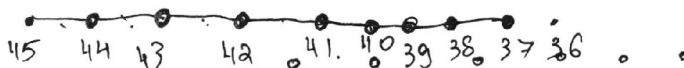
1. [3 балла] При каком наименьшем натуральном n число $(n-1)! + n! + (n+1)!$ делится на 289?
2. [3 балла] Из суммы квадратов семи последовательных натуральных чисел вычли число 28 и получили пятую степень натурального числа N , большего 8. Найдите наименьшее возможное значение N .
3. [4 балла] Решите неравенство

$$\left| \sqrt{x^2 - x - 2} + 5 \right| \geq \left| \sqrt{x^2 - x - 2} + x - 1 \right| + |6 - x|.$$

4. [5 баллов] На координатной плоскости рассматриваются ромбы с длиной стороны 5 такие, что абсциссы и ординаты всех четырёх вершин каждого ромба — целые числа из промежутка $[1; 45]$. Сколько существует таких ромбов? Напомним, что квадрат также является ромбом.
5. [5 баллов] Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющих уравнению

$$23 \cdot 2^x + 2025 = y^2.$$

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при каждом из которых для множества точек плоскости Oxy , задаваемых уравнением $x^2 + y^2 = a^2$, наибольшее значение выражения $y^2 - 4y - a$ равно 6.
7. [6 баллов] На сторонах AB и BC треугольника ABC выбраны точки M и N соответственно так, что $\angle MNB = \angle ANC = 70^\circ$. Найдите $\angle CAN$, если известно, что $BN \cdot MA = 2BM \cdot NC$.

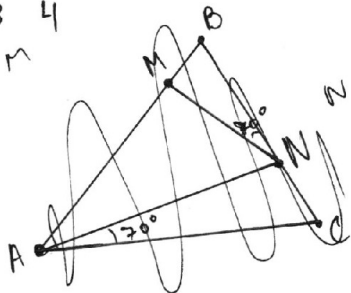


$$2 \cdot 90 = 92 = 4 \cdot 23$$

$$(a^2) + (a^2 + 1^2 + 2a) + (a^2 + 4a + 4) + (a^2 + 6a + 9) + (a^2 + 8a + 16) + (a^2 + 10a + 25) + (a^2 + 12a + 36)$$

45

1 2 3 4
m



$$N = 9 \Rightarrow 9^5 = 3^{10} = 81 \cdot 81 \cdot 9 = 7a^2 + 38a + 91 - 28 = N^5$$

$$\begin{array}{r} 39 \\ \times 37 \\ \hline 1600 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 17 \\ \times 17 \\ \hline 119 \\ + 170 \\ \hline 289 \end{array}$$

$$n^2 + n - 2 \quad n^2 + 2n + 1$$

$$\geq n + 3$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1



2



3



4



5



6



7



СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 1

$$n \in \mathbb{N}: (n-1)! + n! + (n+1)! : 289.$$

$$289 = 17^2 \Rightarrow (n-1)! (1 + n + n(n+1)) = (n-1)! \cdot (n+1)^2$$

Заметим, при $n=16$ $(n+1)^2 = 17^2 = 289 \Rightarrow$ произведение $(n-1)! \cdot (n+1)^2 : 289$. Докажем, что для $n < 16$ такого не будет:

не будет:

Пусть $n < 16 \Rightarrow$ Заметим $17 \in \mathbb{P}$.

$$(n+1)^2 \not\vdots 17 \text{ т.к. } n+1 < 17.$$

$$(n-1)! \not\vdots 17, \text{ т.к. } n-1 < 17, \text{ т.е. в ряду чисел}$$

от 1 до $n-1$ нет чисел $: 17$.

Произведение $(n-1)! \cdot (n+1)^2 \not\vdots 17$, а это противоречит условию $\Rightarrow n \geq 17$. $\rightarrow$ Минимальное подходящее $n=17$, пример разобран ранее.

Ответ: $n=17$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 2.

Обозначим сумму квадратов как:

$$S = (a-3)^2 + (a-2)^2 + (a-1)^2 + a^2 + (a+1)^2 + (a+2)^2 + (a+3)^2$$

$$S = 7a^2 + 28 \Rightarrow S - 28 = 7a^2 = N^5, \text{ при } n > 8.$$

Заметим, раз $7a^2 = N^5$, то $N:7 \Rightarrow N^5:7^5 \Rightarrow (a^2:7):7^5$
 $a^2:7^4 \Rightarrow a:7^2 \Rightarrow$ при разложении на простые множители ~~числа a~~

~~степень~~ степень $x y 7 (7^x) \geq 2$.

~~Если бы~~ Если бы не было ограничения на $N > 8$, мы бы

нашли минимальное число $N=7 \Rightarrow$ Заметим, что, раз

$N > 8$, то 7 следует делить на $n \in \mathbb{N}$, при этом $n \neq 1$.

$n_{\min} = 2$ — n минимальное, подходящее.

Ищем минимальное $N!$

$N = 7 \cdot n = 14 \Rightarrow N^5 = 14^{25}$ Однако при разложении

на простые множители ~~степени~~ степени всех

простых кроме 7 должны быть ≥ 2 (т.к. у a^2 все степени простых множителей ≥ 2) $\Rightarrow n_{\min} = 2^2$ — минимальное

подходящее n по этим условиям $\Rightarrow 7 \cdot n = N = 28 \Rightarrow N^5 = 28^5 =$

$= 7 \times a^2 \Rightarrow a^2 = 7^4 \cdot 4^5 = 7^4 \cdot 2^{10} = (7^2 \cdot 2^5)^2 \Rightarrow$ Ответ: $N = 28$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

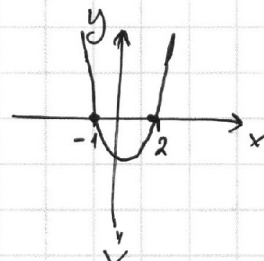
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\left| \sqrt{x^2 - x - 2} + 5 \right| \geq \left| \sqrt{x^2 - x - 2} + x - 1 \right| + |6 - x|$$

$$\sqrt{x^2 - x - 2} \geq 0 \Rightarrow x^2 - x - 2 \geq 0$$

$$D = 9$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm 3}{2} = \{2; -1\} \Rightarrow$$



① Пусть $x \geq 2$

$$x = (-\infty; -1]; [2; \infty)$$

$$\sqrt{x^2 - x - 2} + 5 \geq \sqrt{x^2 - x - 2} + x - 1 + |6 - x|$$

$$5 \geq x + |6 - x| \Rightarrow \text{т.к. } x \geq 0; |6 - x| \geq 0; \text{ то } \begin{cases} 6 \geq x \\ 6 \geq |6 - x| \end{cases}$$

$$6 \geq x + |6 - x| = x + 6 - x = 6$$

$$x = [2; 6]$$

② Пусть $x \leq -1$.

$$\sqrt{x^2 - x - 2} + 5 \geq \left| \sqrt{x^2 - x - 2} + x - 1 \right| + 6 - x$$

$$0 \geq \left| \sqrt{x^2 - x - 2} + (x - 1) \right| - (\sqrt{x^2 - x - 2} + x - 1)$$

Раскроем модуль:

~~Возведем в квадрат~~ предположим $n = -x$, т.е. $x = -n$.

$$n \geq 1 \text{ (т.к. } x \leq -1)$$

$$\left| \sqrt{n^2 + n - 2} - (n + 1) \right| \Rightarrow \sqrt{n^2 + n - 2} \leq n + 1 \quad \text{— сравним 2 числа.}$$

$$\text{Заметим, что они оба } \geq 0. \Rightarrow \text{возведем в } ^2: n^2 + n - 2 \leq n^2 + 2n + 1$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\downarrow$$
$$\left| \sqrt{n^2+n-2} - (n+1) \right| = (n+1) - \sqrt{n^2+n-2} = 1-x - \sqrt{x^2-x-2}$$
$$\downarrow$$

$$0 \geq 1-x - \sqrt{x^2-x-2} + 1-x - \sqrt{x^2-x-2} = 2(1-x - \sqrt{x^2-x-2})$$
$$\downarrow$$

Разделим обе части на 2:

$$0 \geq 1-x - \sqrt{x^2-x-2} \Rightarrow \sqrt{x^2-x-2} \geq 1-x. \Rightarrow \text{Заметим, что}$$

Мы уже сравнивали эти 2 числа ~~в виде~~ в виде

$\sqrt{n^2+n-2} < 1+n \Rightarrow \sqrt{x^2-x-2} < 1-x$, однако должно
быть наоборот. $\Rightarrow$ подходящих x ($x \leq -2$) нет.

$\downarrow$
Ответ: $x = [2; 6]$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

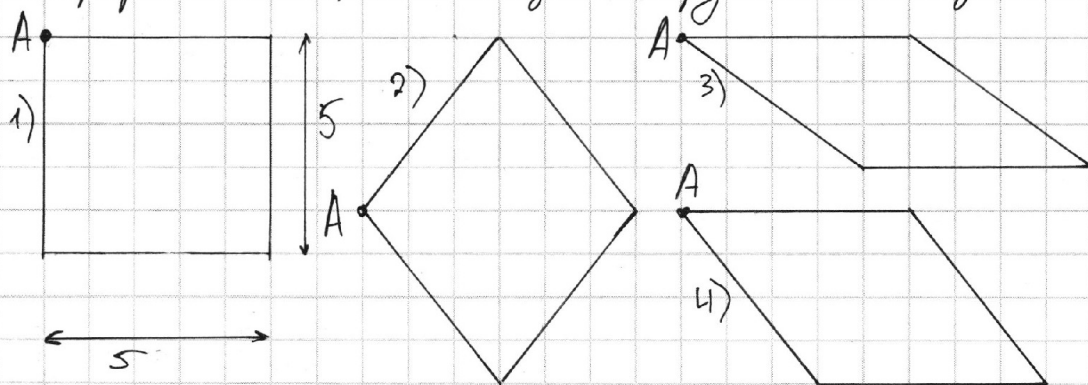
СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

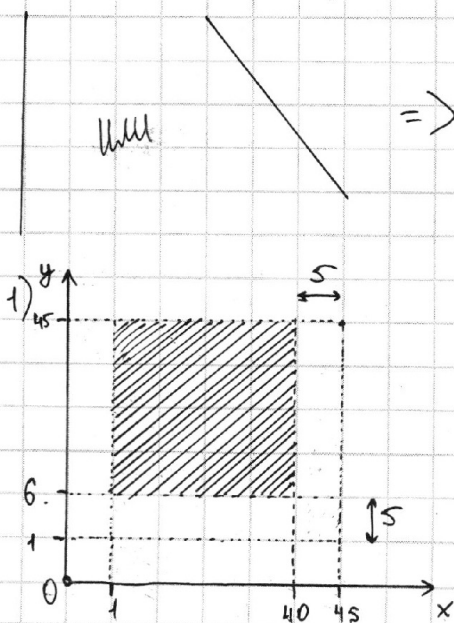
Задача 4.

Ромб - четырех угольник с 4^{ми} равными сторонами.

Заметим, что есть всего 4 ромба которые можем нарисовать с стороной 5 так, чтобы абциссы и ординаты были целыми:



Других нет, т.к. тут все варианты как поставить стороны 5, сам отрезок длиной 5 можно изобразить 2^{ми} способами:



способов расстановки
=> Найдём кол-во^о для каждого из 4ех.
Заметим для каждого искомого x_i = количество способов расставить ^{вершины} ~~по~~ ~~сторону~~
А так, что очертив фигуру она подходит под условия.

$$1) x_1 = (45 - (1+5) + 1)(45 - 5 - 1 + 1) = 40^2$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

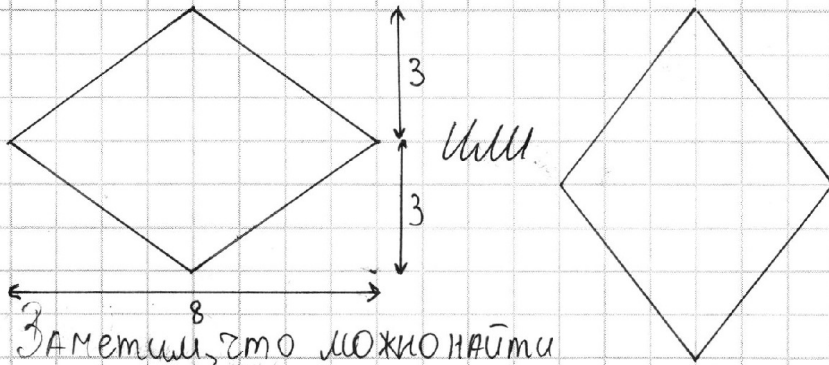
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

2 ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

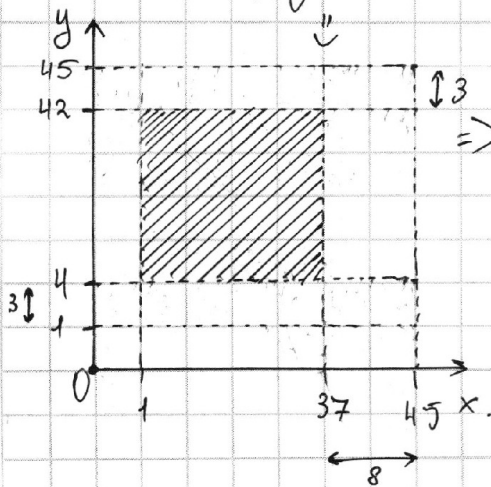
2) Поставить 2^ю ромб можно 2^{мя} способами:



Заметим, что можно найти

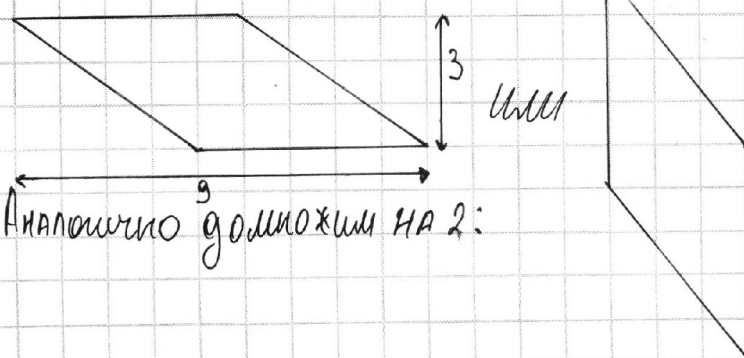
способов

кол-во для одного, затем должно быть на 2, т.к. ~~места для~~ ~~45x45~~ ~~45x45~~ точек представляют собой $\square$ ~~45x45~~.



$$\Rightarrow X_2 = 2 \cdot 37 \cdot 39 = 2 \cdot (38^2 - 1) = 2886$$

3) Аналогично 2 варианта постановки:



Аналогично должно быть на 2:

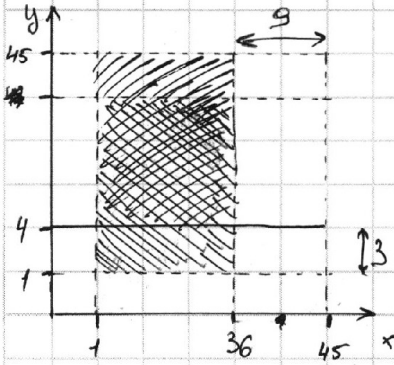


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

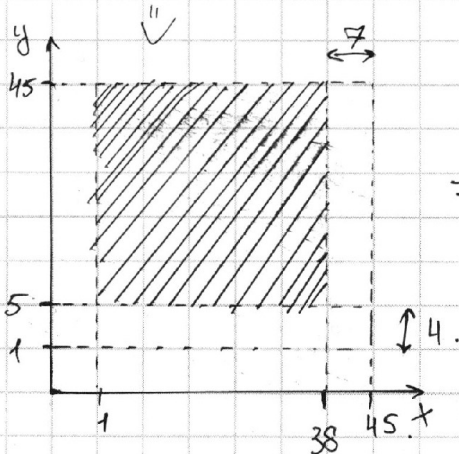
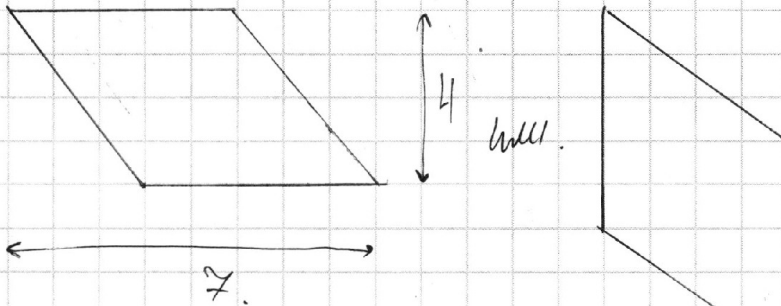
СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$X_3 = 42 \cdot 36 \cdot 2 = 3024$$

4) Также я вариант постановки:



$$\Rightarrow X_4 = 41 \cdot 38 \cdot 2 = 3116$$

$$\text{Итого } X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = \overset{1600}{\cancel{1000}} + 2886 + 3024 + 3116 = 10626 \Rightarrow \text{Ответ: } 10626.$$



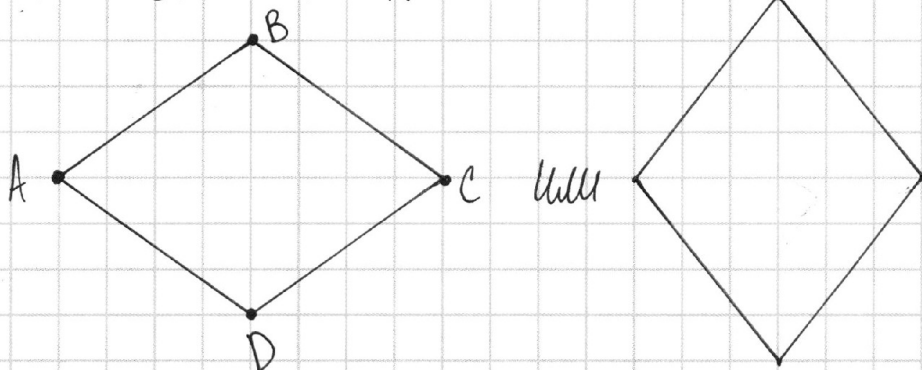
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
3 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

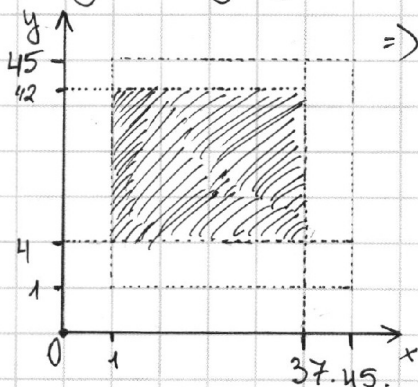
2) Ставим ромб. (не квадрат) Заметим, что можем поставить его 2^{12} способами:



Заметим, что кол-во вариантов для одного x_2 и второго x_3 будут равны $x_2 = x_3$ (очевидно).

Найдем x_2 :

Аналогично квадрату, следует найти кол-во вариантов поставить точку A так, что если деформировать ромб подходить под условие:



$$\Rightarrow x_2 = x_3 = \frac{42}{45-4} \left((45-3)^{38} - (1+3)^{39} + 1 \right) \left((45-8)^{37} - 1 + 1 \right)$$

$$x_2 = x_3 = 39 \cdot 37 = 38^2 - 1^2$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 40^2 + 2 \cdot 38^2 - 2 = 4486$$

Ответ: 4486.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Докажем, что только 2 пары a и b подходят ($a=3, b=4$
 $b=3, a=4$)

Переберем все пары чисел a и $b < 5$ это они не такие:
(т.к. гипотенуза больше катетов)

$$\begin{matrix} a^2 & b^2 \\ 1^2 + 1^2 & \neq 5^2 \end{matrix}$$

$$1^2 + 2^2 \neq 5^2$$

$$1^2 + 3^2 \neq 5^2$$

$$1^2 + 4^2 \neq 5^2$$

$$2^2 + 2^2 \neq 5^2$$

$$2^2 + 3^2 \neq 5^2$$

$$2^2 + 4^2 \neq 5^2$$

$$3^2 + 3^2 \neq 5^2$$

$$4^2 + 4^2 \neq 5^2$$

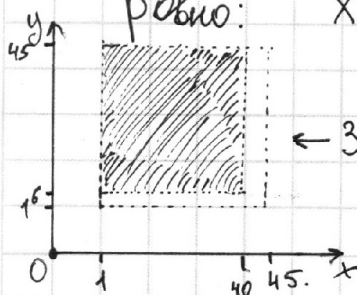
$\Rightarrow$ кроме названных, других пар подходящих a и b нет.

Что и требовалось. Тогда по 1^{му} прямоугольной треугольнику можно построить ромб. Он выйдет как на рис. 2.

$\Rightarrow$ Доказали, что только 2 ромба могут быть на плоскости.

Следует найти к-во способов поставить их на координатную плоскость в промежутке значений абсцисс и ординат $[1, 45]$

1) Ставим квадрат. Заметим, что чтобы поставить его нужно выбрать где будет стоять т. Заметим, что таких точек равно: $X_1 = (45 - (1+5) + 1)(45 - 5 - 1 + 1) = 40^2 = 1600$ (так, чтобы можно было построить квадрат, он подходит по усл.)



Заметим, что ордината (знач. по оси y) $= [1, 45 - 5]$ отн. к т. А. Абсцисса (знач. по оси x) $= [1 + 5, 45]$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

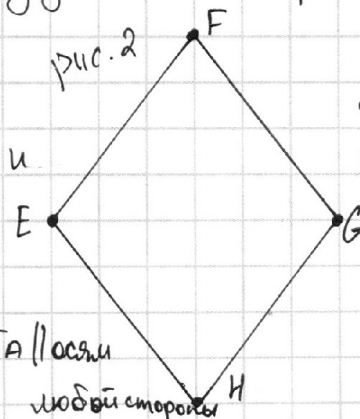
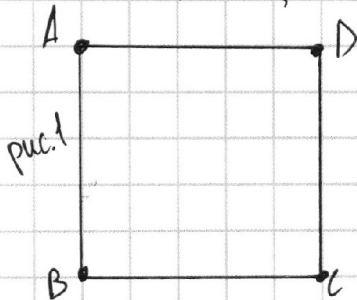
Задача 4.

Абсциссы и ординаты всех 4-х вершин — целые от 1 до 45 включительно. Заметим, что у прямоугольного треугольника с сторонами (катетами) 3 и 4 гипотенуза = 5. Также заметим, что ромб по определению — четырехугольник с равными сторонами и его диагонали $\perp$ друг-другу.

Можно каждый ромб разбить на 4 прямоугольных Δ кат с гипотенузами = 5,

~~вершины координат целые~~
~~абсциссы и ординаты~~

Заметим, что будет 2 таких ромба:



Еще докажем, что других нет:

Пусть одна из сторон ромба $\parallel$ оси Ox или Oy .

Противоположная тоже $\parallel$ и равна ей.

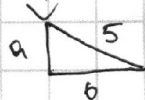
Чтобы получился ромб его 2 другие стороны должны быть

$\perp$ этим, и также получим параллелограмм с равными сторонами. Получим квадрат (рис. 1)

Пусть кат стороны ромба $\parallel$ оси

Ox или Oy . $\Rightarrow$ Если вершины лежат на таких точках, то ординаты и абсциссы равны.

Получим $\perp$ прямоугольный треугольник с целыми сторонами > 1 и гипотенузой 5.



$$5^2 = a^2 + b^2$$

на след. стр.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 5

$$2025 = 45^2$$

⇓

$$23 \cdot 2^x + 45^2 = y^2 \Rightarrow (y-45)(y+45) = 23 \cdot 2^x$$

Заметим, что если обозначить $y-45 = a$, то $a+90 = y+45$.

⇓

$$a \cdot (a+90) = 23 \cdot 2^x$$

⇓

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad a+90 : 23 &\Rightarrow a+90 \text{ можно записать как } a+90 = 23 \cdot 2^i \\ \textcircled{2} \quad a : 23 &\Rightarrow \text{аналогично } a = 23 \cdot 2^j \\ a+90 &= 23 \cdot 2^j \text{ где } i+j=x. \end{aligned}$$

$$\textcircled{1} \Rightarrow 2^j + 2 \cdot 45 = 23 \cdot 2^i \quad | : 2$$

$$2^{j-1} + 45 = 23 \cdot 2^{i-1} \Rightarrow \text{Заметим } i-1 \geq 1, \text{ т.к. } 23 < 45.$$

$$23 \cdot 2^{j-1} - \text{чет, т.к. } : 2.$$

⇓

$$45 + 2^{j-1} = \text{чет} \Rightarrow \text{нечет} + \begin{cases} \text{чет} \\ \text{нечет} \end{cases} = \text{чет} \Rightarrow 2^{j-1} - \text{нечет}.$$

$$2^{j-1} = 1 \Rightarrow 1 + 45 = 23 \cdot 2^{i-1} = 46 \Rightarrow 2^{i-1} = 2 \Rightarrow \boxed{j=1; i=2}.$$

$$a = 2 \Rightarrow 2 \cdot 92 = 23 \cdot 2^x = 8 \cdot 23 \Rightarrow \boxed{x=3} \quad \begin{cases} y=47 \\ \text{или} \\ y=-47 \end{cases}$$

Заметим, что это единственные варианты в данном пункте из-за однозначности хода решения (определенный рез-т после каждого действия)



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☒

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

② $a:23 \Rightarrow a = 23 \cdot 2^i; a+90 = 2^j$, где $i+j=x$

Повторяем аналогично 1-му пункту:

~~$a(a+90)$~~ $23 \cdot 2^i = 90 + 2^j \quad |:2$

$23 \cdot 2^{i-1} = 45 + 2^{j-1}$ Заметим $i-1 \geq 1$, т.к.

$23 \cdot 2^{i-1} - \text{чет}$ $\Leftarrow 23 < 45$

45 - нечет

$2^{j-1} - \text{нечет} \Rightarrow 2^{j-1} = 1 \Rightarrow j=1$

$92 = 23 \cdot 2^i \Rightarrow i=2 \Rightarrow x=3$

Аналогично

$x=3$
 $y=47$ или $x=3$
 $y=-47$

"

Ответ: $(3; 47);$ или $(3; -47)$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☒

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 7. В

Дано:

$\triangle ABC$
 $M \in AB$
 $N \in BC$
 $\angle MNB = \angle ANC = 70^\circ$
 $BN \times MA = 2BM \times NC$
 $\angle CAN = ?$

②

Т.к. AC — медиана в $\triangle ABC$,
то она биссектр.

$$\angle NAC = \frac{1}{2} \angle NAC' = 20^\circ$$

Ответ: 20°

① $BN \times MA = 2BM \times NC$

$$\frac{BN}{2NC} = \frac{BM}{MA}$$

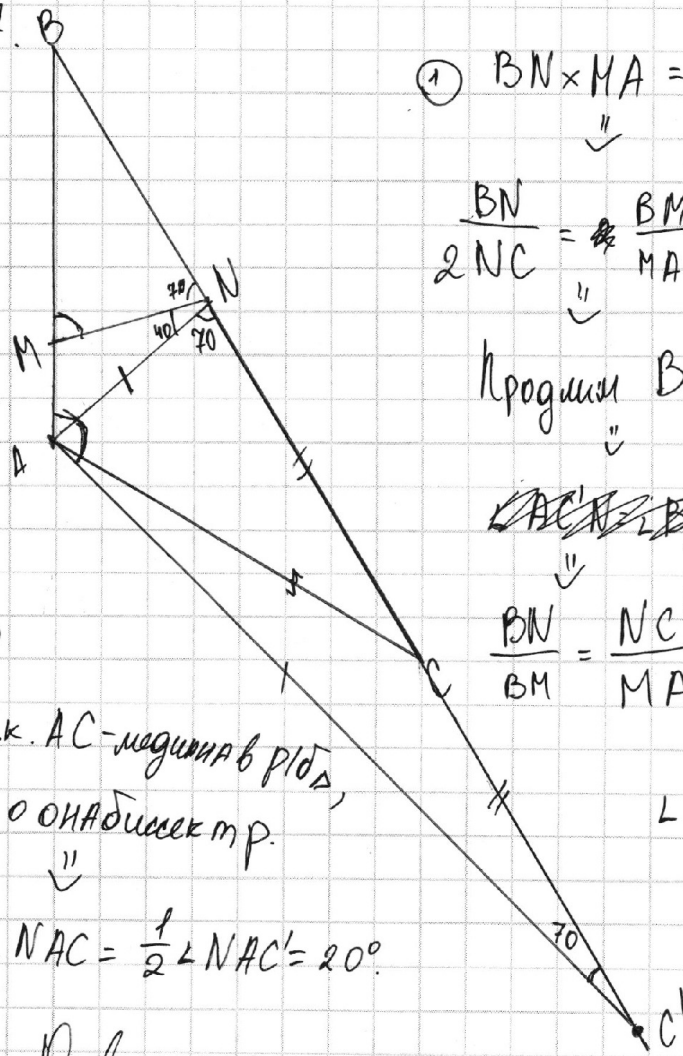
Продлим BC на NC от C

~~$\angle AC'N = \angle BNM$~~

$$\frac{BN}{BM} = \frac{NC'}{MA} \Rightarrow \frac{BC'}{BA}$$

$$\angle AC'C = 70^\circ$$

$\triangle AAC' - \text{p/d}$
 $AN = AC'$
 $\angle NAC' = 40^\circ$



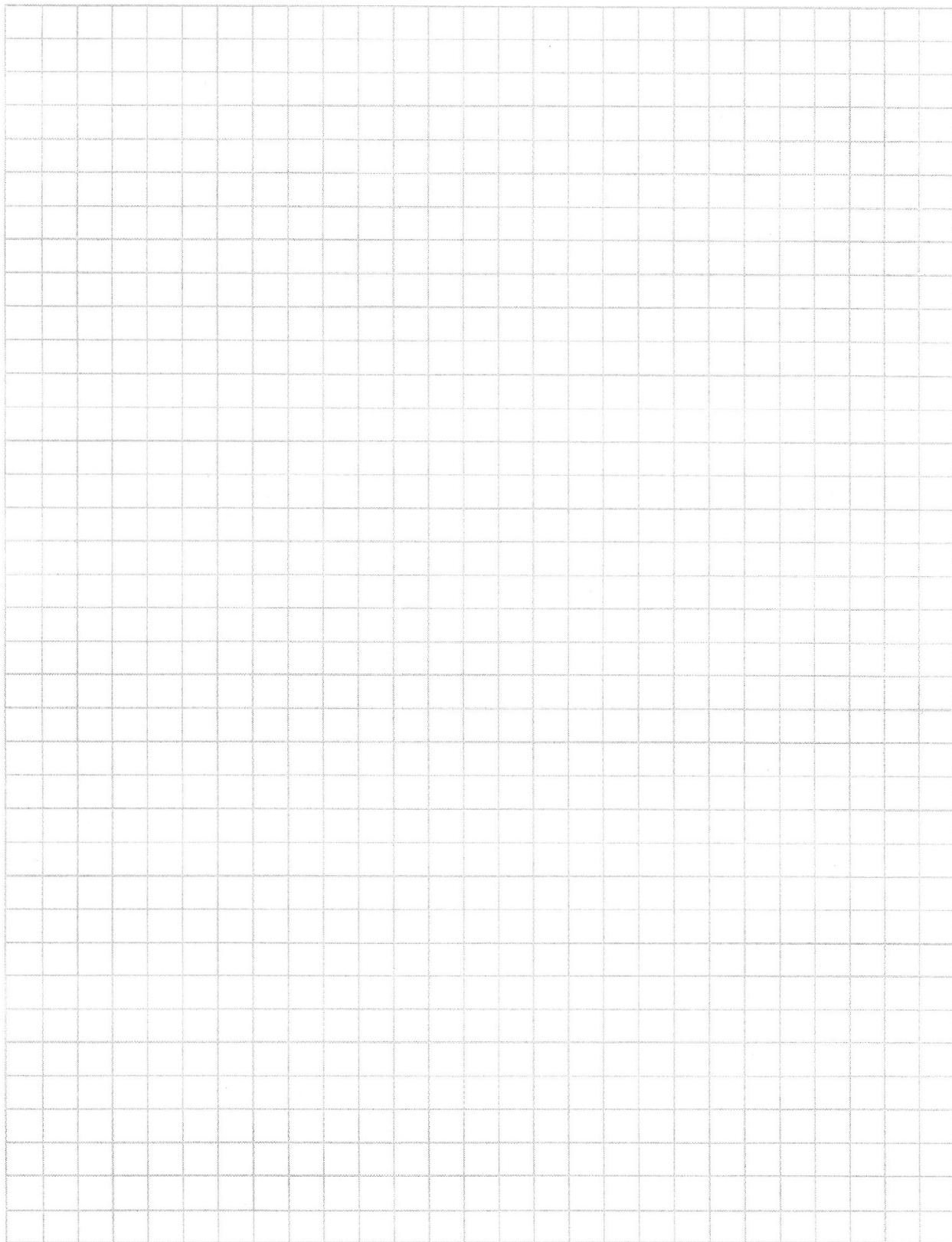


На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☒ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 _ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

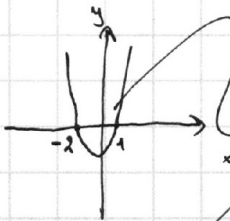
Задача 3.

Дано неравенство:

$$\sqrt{x^2 - x - 2} + 5 \geq \sqrt{x^2 - x - 2} + |x - 1| + |6 - x|$$

① Заметим, что под корнем выражение ≥ 0 .

$x^2 - x - 2 \geq 0 \Rightarrow$ т.к. корни $\{-2; 1\} \Rightarrow$ т.к. график выглядит так:



То при $x \in (-2; 1)$ $x^2 - x - 2 < 0$.

1) Пусть $x \leq -2$

$$23 \cdot 2^x = (y - 45)(y + 45) \Rightarrow 23 \cdot 2^x = y^2 - 45^2$$

$$23 \cdot 2^i + 90 = 2^j$$

$$45 + 23 = 68$$

$$\sqrt{x^2 - x - 2} + 5 \geq \sqrt{x^2 - x - 2} + |x - 1| + |6 - x|$$

Заметим, что $\sqrt{x^2 - x - 2} + x - 1 \leq 0$ при $x \leq -2$, т.к., если

$x = -n$, то: $(-n-1)^2 = n^2 + 2n + 1 \dots n^2 + n - 2$

$n \geq -3$, т.к. $n \geq 2$.

$$\sqrt{x^2 - x - 2} + 5 \geq \sqrt{x^2 - x - 2} - x + 1 + 6 - x$$

$2(\sqrt{x^2 - x - 2} + x) \geq 2 \Rightarrow \sqrt{x^2 - x - 2} + x \geq 1$. Заметим, что

Если x снова примет $-n$, при этом $n \geq 2$, то $\sqrt{n^2 + n - 2} + n$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

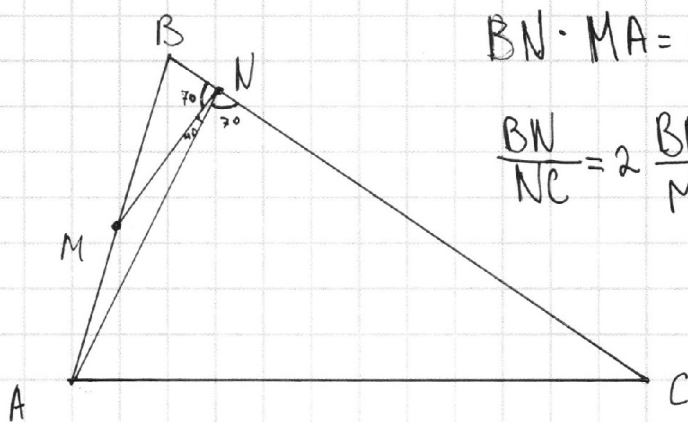
1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 7.

Дано
 $\triangle ABC$
 $M \in AB$
 $N \in BC$
 $\angle MNB =$
 $\angle ANC = 70^\circ$
 $BN \cdot MA = 2 \cdot BM \cdot NC$



$$BN \cdot MA = 2 \cdot BM \cdot NC$$

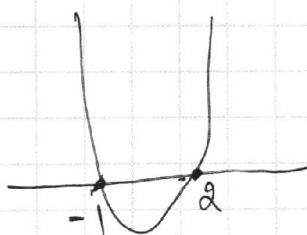
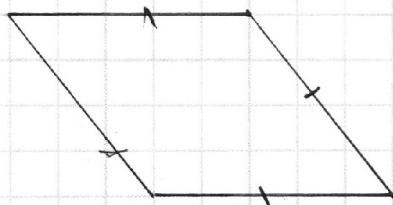
$$\frac{BN}{NC} = 2 \frac{BM}{MA}$$

$\angle CAN = ?$

$$\left| \sqrt{x^2 - x - 2} + 5 \right| \geq \left| \sqrt{x^2 - x - 2} + x - 1 \right|$$

$$D = 1 + 4 \cdot 2 = 3^2$$

$$x_1 = \frac{1 \pm 3}{2} = 2; -1.$$



$x - 1$

$$(-n - 2)^2 = n^2 - 4n + 4$$

$$25 + 5 - 2 = \sqrt{28}$$

$= 6$

$$-n \Rightarrow \sqrt{n^2 + n - 2}$$

$$-n \Rightarrow 2$$