



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 9



1. [3 балла] При каком наименьшем натуральном  $n$  число  $n! + (n+1)! + (n+2)!$  делится на 361?
2. [3 балла] Из суммы квадратов пяти последовательных натуральных чисел вычли число 10 и получили куб натурального числа  $N$ , большего 6. Найдите наименьшее возможное значение  $N$ .
3. [4 балла] Решите неравенство

$$\left| \sqrt{x^2 - 2x - 3} + 6 \right| \geq \left| \sqrt{x^2 - 2x - 3} + 2x - 1 \right| + |7 - 2x|.$$

4. [5 баллов] На координатной плоскости рассматриваются ромбы с длиной стороны 5 такие, что абсциссы и ординаты всех четырёх вершин каждого ромба — целые числа из промежутка  $[1; 50]$ . Сколько существует таких ромбов? Напомним, что квадрат также является ромбом.
5. [5 баллов] Найдите все пары целых чисел  $(x; y)$ , удовлетворяющих уравнению

$$19 \cdot 2^x + 2025 = y^2.$$

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых для множества точек плоскости  $Oxy$ , задаваемых уравнением  $x^2 + y^2 = a^2$ , наибольшее значение выражения  $x^2 - 6x + a$  равно 8.
7. [6 баллов] На сторонах  $AB$  и  $BC$  треугольника  $ABC$  выбраны точки  $M$  и  $N$  соответственно так, что  $\angle MNB = \angle ANC = 80^\circ$ . Найдите  $\angle CAN$ , если известно, что  $BN \cdot MA = 2BM \cdot NC$ .



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} n! + (n+1)! + (n+2)! &= n! (1 + (n+1) + (n+2)(n+1)) = \\ &= n! (n+2 + n^2 + 3n + 2) = n! (n^2 + 4n + 4) = n! (n+2)^2 \end{aligned}$$

(17)

Видим, что при  $n=17$  выражение делится на 361  
(т.к.  $(n+2)^2 = (17+2)^2 = 19^2 = 361$ )

Заметим также, что при  $n < 17$  каждое из чисел

$(n+2); n; (n-1); (n-2); \dots; 2$  меньше 19, а значит,

не делится на 19. И так как число 19 простое,

то и произведение  $n! (n+2)^2$  не делится на 19.

Раз оно не делится на 19, то на  $361 = 19^2$  тоже не делится.

Следовательно,  $n=17$  — наименьшее подходящее  $n$ .

Ответ:  $n=17$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть  $a$  — меньшее из пяти последовательных натур. чисел  $N^2$

$$\text{Тогда } a^2 + (a+1)^2 + (a+2)^2 + (a+3)^2 + (a+4)^2 - 10 = N^3 \quad N > 6$$

$$5a^2 + (2+4+6+8)a + 1+4+9+16 - 10 = N^3$$

$$5a^2 + 20a + 20 = N^3$$

$$5(a^2 + 4a + 4) = N^3$$

$$5(a+2)^2 = N^3$$

Видим, что  $(a+2) : 5$ , но если  $a+2=5$ , то  $N=5 < 6$ . Нам не подходит.  
Значит, число  $(a+2)$  должно содержать ещё какой-то множитель в третьей степени.\*  
Меньший из таких множителей —  $2^3$ .

$$\text{Тогда } a+2 = 5 \cdot 2^3 ; \quad N^3 = 5 (5 \cdot 2^3)^2 = 5^3 2^6$$

$$N = 5 \cdot 2^2 = 20$$

Получается, наименьшее  $N=20$  достигается при  $a = 5 \cdot 2^3 - 2 =$   
 $= 38$

Ответ:  $N=20$

(\*) Отличный от единицы

(\*) если степень этого множителя не будет кратна 3, то  $N$  не будет натур.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи **отдельно**.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

№3 Продолжение

(I)  $x \leq -1$

$$\sqrt{x^2 - 2x - 3} + 6 \geq 1 - 2x - \sqrt{x^2 - 2x - 3} + 7 - 2x$$

$$2\sqrt{x^2 - 2x - 3} \geq 2 - 4x$$

$$\sqrt{x^2 - 2x - 3} \geq 1 - 2x \quad 1 - 2x \geq 0 \text{ при } x < 0,5$$

Значит, в правой части положит. число

Возведем обе части в квадрат

$$x^2 - 2x - 3 \geq 1 - 4x + 4x^2$$

$$3x^2 - 2x + 4 \leq 0$$

$$D = -4 < 0, a = 3 > 0 \text{ ветви п. вверх}$$

$$x \in \emptyset$$

(II)

$$\sqrt{x^2 - 2x - 3} + 6 \geq \sqrt{x^2 - 2x - 3} + 2x - 1 + 7 - 2x$$

$$6 \geq 6$$

$$x \in (-\infty; +\infty)$$

$$x \in [3; 3,5]$$

$$3 \leq x \leq 3,5$$

(III)

$$x > 3,5$$

$$\sqrt{x^2 - 2x - 3} + 6 \geq \sqrt{x^2 - 2x - 3} + 2x - 1 + 2x - 7$$

$$4x \leq 14$$

$$x \leq 3,5$$

$$x \in \emptyset$$

Из всех трёх случаев нам подходит  $x \in [3; 3,5]$

Ответ:  $x \in [3; 3,5]$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№3

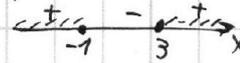
$$|\sqrt{x^2-2x-3}+6| \geq |\sqrt{x^2-2x-3}+2x-1| + |7-2x|$$

①  $\sqrt{x^2-2x-3}+6 > 0$  при любом  $x$  (неотриц. + полож.)

( $x$ ) подкоренное выражение неотрицательно

②  $x^2-2x-3 \geq 0$  ( $x$ )

$$(x-3)(x+1) \geq 0$$



$$x \in (-\infty; -1] \cup [3; +\infty)$$

$\Rightarrow$  неравенство имеет смысл при  $x \in (-\infty; -1] \cup [3; +\infty)$

②  $|7-2x| = \begin{cases} 7-2x & \text{при } x \leq 3,5 \\ 2x-7 & \text{при } x > 3,5 \end{cases}$

③ Решим нер-во:

$$\sqrt{x^2-2x-3} + 2x - 1 \geq 0$$

$$\sqrt{x^2-2x-3} \geq 1-2x$$

$$\begin{cases} 1-2x \geq 0 & \text{при } x \leq 0,5 \\ 1-2x < 0 & \text{при } x > 0,5 \end{cases}$$

при  $x \in [3; +\infty)$  неравенство выполняется т.к. в правой части отрицательное число, а в левой - неотрицательное

Рассмотрим теперь  $x \in (-\infty; -1]$ :

Тогда справа положительное число, и мы можем возвести обе части в квадрат

$$x^2-2x-3 \geq 4x^2-4x+1$$

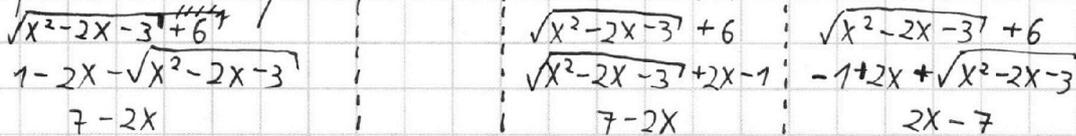
$$3x^2-2x+4 \leq 0$$

$$D = 4 - 4 \cdot 3 \cdot 4 = -44 < 0, a = 3 > 0 \text{ ветви параболы вверх}$$

Значит, неравенство неверно при любом  $x \in (-\infty; -1]$

$$|\sqrt{x^2-2x-3}+2x-1| = \begin{cases} \sqrt{x^2-2x-3}+2x-1 & \text{при } x \geq 3 \\ 1-2x-\sqrt{x^2-2x-3} & \text{при } x \leq -1 \end{cases}$$

④ Раскроем все модули в зависимости от значения  $x$ :



I

II

III



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 1

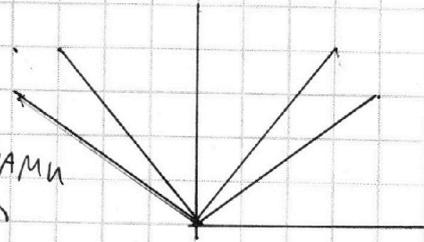
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

(24)

Рассмотрим вершину ромба с ~~данными~~ наименьшей ординатой, если такая вершина не одна, то рассматриваем из них вершину с меньшей абсциссой.

Из неё могут быть проведены такие отрезки:

Ромб однозначно задаётся двумя сторонами проведёнными



~~Тогда~~ Если из вершины можно провести  $n$  <sup>отрезков</sup> ~~ребер~~ так, что ромб, построенный на любых двух из них, подходит, то существует  $C_n^2$  ромбов с этой вершиной.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$19 \cdot 2^x + 2025 = y^2$$

$$19 \cdot 2^x = (y-45)(y+45)$$

Замена  $t = y - 45$

$$t(t+90) = 19 \cdot 2^x$$

(N5)

~~$t$  и  $t+90$  - числа одинаковой чётности  
значит,  $t$  должно быть чётным~~

...

подходит  ~~$t=38$ , тогда~~  $t=38$  и  $x=8$ , тогда  $y=83$  и  $x=8$   
- одно решение.  
Если подходит  $(8; 83)$ , то подходит и  $(8; -83)$

Ответ:  $(8; 83)$   
 $(8; -83)$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

(N5)

Уравнением  $x^2 + y^2 = a^2$  задается окружность с центром в начале координат и радиусом  $|a|$ , (либо точка  $(0;0)$ , если  $a=0$ )  
Значит,  $x$  принимает все значения, ~~в  $[-a; a]$~~   
~~от  $-a$  до  $a$~~ . модуль которых не больше  $|a|$ .

Пар. Вершина параболы  $y = x^2 - 6x + a$  имеет абсциссу  
 $x_B = -\frac{b}{2a} = 3$ .

т.к. ветви параболы смотрят вверх то она функция убывает на  $(-\infty; 3]$  и возрастает на  $[3; +\infty)$

Если  $a \geq 0$ , то максимум наибольшее значение выражения достигается при  $x = -a$ , т.к. расстояние от  $x_B$  до  $-a$  по оси  $x$  больше, чем расстояние до любого другого значения в промежутке  $[-a; a]$

Можем записать:

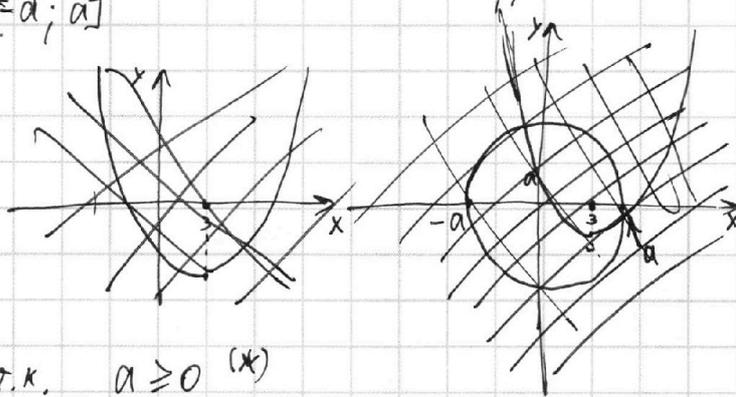
$$a^2 + 6a + a = 8$$

$$a^2 + 7a - 8 = 0$$

$$a = \frac{-7 \pm \sqrt{49 + 32}}{2}$$

$$\begin{cases} a = 1 \\ a = -8 \end{cases}$$

$a = -8$  не подходит, т.к.  $a \geq 0$  (\*)



Если  $a < 0$ , то наибольшее значение выражения достигается при  $x = a$  по той же причине

$$a^2 - 6a + a = 8$$

$$a^2 - 5a - 8 = 0$$

$$a = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 32}}{2}$$

$a = \frac{5 + \sqrt{57}}{2}$  не подходит, т.к.  $a < 0$  (\*\*)

$$\begin{cases} a = \frac{5 - \sqrt{57}}{2} \\ \sqrt{57} > \sqrt{25} = 5 \Rightarrow \frac{5 - \sqrt{57}}{2} < 0 \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

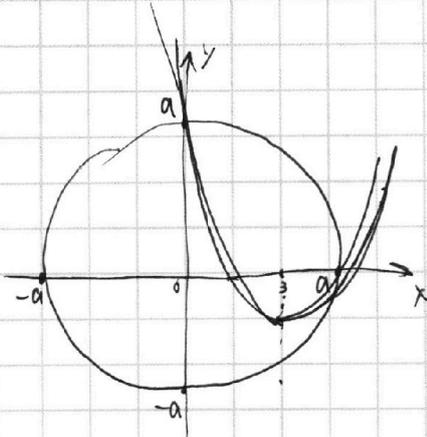
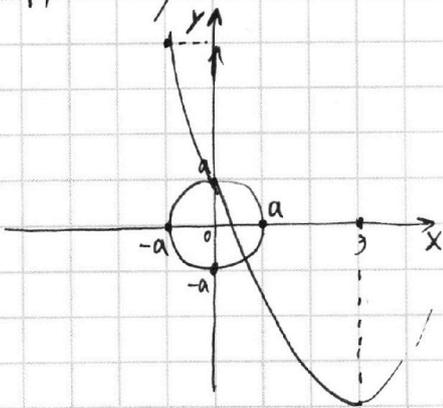
№6 продолжение

Из двух случаев подходят значения  $a=1$  и  $a = \frac{5-\sqrt{57}}{2}$

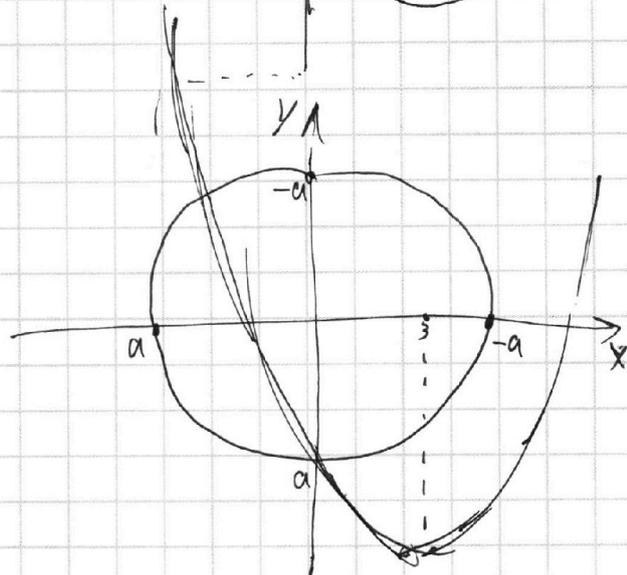
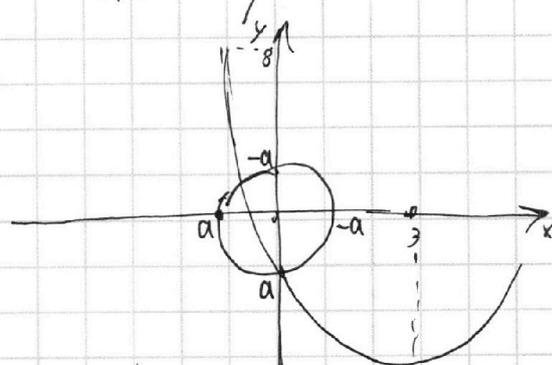
Ответ: 1 ;  $\frac{5-\sqrt{57}}{2}$

~~иллюстрация для случая~~

для случая  $a \geq 0$



для случая  $a < 0$



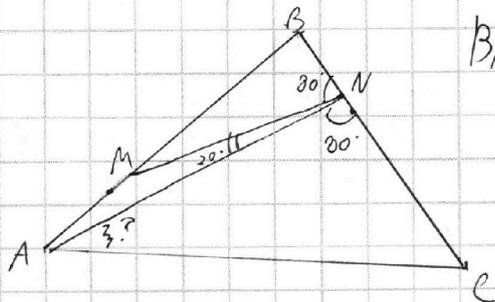


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$BN \cdot MA = 2 \cdot BM \cdot NC$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

ЧЕРНОВИК

$N > 6$

$$a^2 + (a+1)^2 + (a+2)^2 + (a+3)^2 + (a+4)^2 - 10 = N^3$$

$$5a^2 + (2+4+6+8)a + \cancel{4} + \cancel{4} + 16 - \cancel{4} = N^3$$

$$5a^2 + 20a + 20 = N^3$$

$$5(a^2 + 4a + 4) = N^3$$

$$5(a+2)^2 = N^3$$

$$3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 - 10$$

$$\cancel{2} + \cancel{4} + 25 + 36 + 49 - \cancel{4}$$

10

3 4

$$\begin{array}{r} 8 \\ \times 19 \\ \hline 72 \\ 152 \\ \hline 367 \end{array}$$

$1+2+6$

$2+6=26$

$$5 \cdot 5^2 \cdot 2^6$$

$$5 \cdot 2^3 = 40$$

$$\begin{aligned} n! + (n+1)! + (n+2)! &= n! (1 + n+1 + (n+2)(n+1)) = \\ &= n! (n+2 + n^2 + 3n+2) = n! (n^2 + 4n + 4) = n! (n+2)^2 \end{aligned}$$

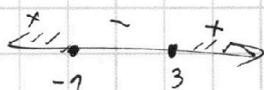
$$|\sqrt{x^2-2x-3} + 6| \geq |\sqrt{x^2-2x-3} + 2x-1| + |7-2x|$$

$$\sqrt{x^2-2x-3} + 6$$

$$S = 4$$

$$x^2 - 2x - 3 \geq 0$$

$$(x-3)(x+1) \geq 0$$



$$x \in (-\infty; -1] \cup [3; +\infty)$$

$$\sqrt{x^2-2x-3} + 2x-1 \geq 0$$

$$7 - 2x \geq 0$$

$$\sqrt{x^2-2x-3} \geq 1-2x$$

$$x \leq 3,5$$

$$\begin{cases} x^2 - 2x - 3 \geq 4x^2 - 4x + 1 \\ x \in (-\infty; -1] \end{cases}$$

$$3x^2 - 2x + 4 \leq 0$$

1+2-3

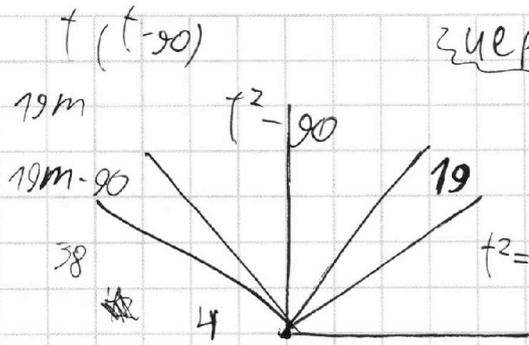


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Черновик

2 <sup>0</sup> 1 - 1	2 <sup>2</sup> 2 - 2	2 <sup>2</sup> 4 - 4	2 <sup>3</sup> 8 - 8	2 <sup>4</sup> 16 - 16	2 <sup>5</sup> 32 - 32	2 <sup>6</sup> 64 - 64	2 <sup>7</sup> 128 - 128	2 <sup>8</sup> 256 - 256	2 <sup>9</sup> 512 - 512	2 <sup>10</sup> 1024 - 1024	2 <sup>11</sup> 2048 - 2048	2 <sup>12</sup> 4096 - 4096	2 <sup>13</sup> 8192 - 8192	2 <sup>14</sup> 16384 - 16384
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

$$C_6^2 = \frac{6!}{2! \cdot 4!} = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15$$

a < 0

$$a = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 32}}{2}$$

$$a^2 - 6a + a = 8$$

$$a^2 - 5a - 8 = 0$$

$$10 \cdot 2^x + 2025 = y^2$$

$$10 \cdot 2^x + 45^2$$

$$46^2$$

$$19m + 90$$

$$19 \cdot 2 + 90 = 128$$

$$38 = k = y - 45$$

$$y = 83$$

$$(8; 83) \equiv -1$$

$$(8; -83) \equiv 7 \pmod{8}$$

$$19 \cdot 2^n = k$$

$$19 \cdot 2^{x-n} = k + 90$$

$$\begin{cases} 2^n = k & 9 \quad 16 \\ 19 \cdot 2^{x-n} = k + 90 \end{cases}$$

$$19 \cdot 2^{x-n} - 2^n = 99$$

$$x_B = -\frac{b}{2a} = 3$$

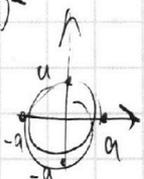
$$a^2 + 6a + a = 8$$

$$a^2 + 7a - 8 = 0$$

$$x^2 - 2x + 2$$

$$(x-2)^2$$

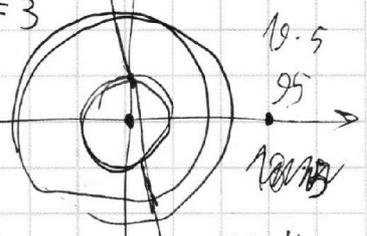
$$D=0$$



$$x \in [-a; a]$$

$$a = \frac{-7 \pm \sqrt{49 + 32}}{2}$$

$$= a = \frac{-7 \pm 9}{2} = \begin{cases} 1 \\ -8 \end{cases}$$



$$19 \cdot 4 =$$

$$= 76$$

$$14$$



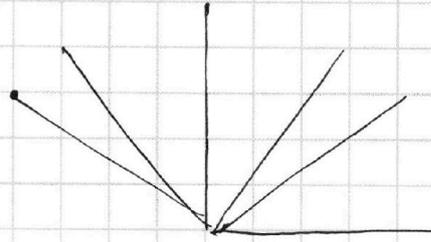
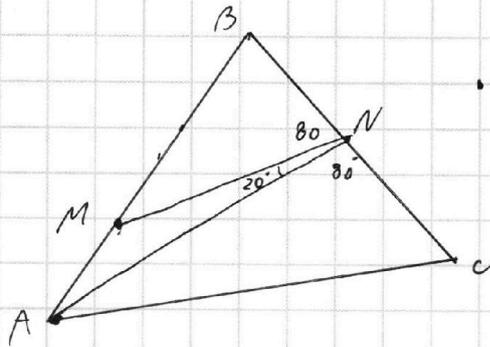
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

(Черновик)



$$BN \cdot MA = 2BM \cdot NC$$